F 1130/2

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

SERIA ELECTROTEHNICĂ

TOMUL XLIV NUMĂRUL 1 ANUL 1982
IANUARIE–MARTIE

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*

MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. docent ing. *Florea Oprea*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Prof. dr. ing. *Marin Rădoi*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent ing. *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București. Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356
TELEX: 10.490 PIBUH

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper trough ILEXIM import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest ROMANIA

Sumar

MŰSZAKI INFORMÁCIÓS KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1883

MATEMATICĂ

I. Bacalu
Asupra unor proprietăţi speciale reziduale pentru sisteme de operatori 3

S. G. Hristova, D. D. Bainov
Asupra unor inegalităţi integrale pentru funcţii scalare de argument vectorial (l. rusă) 11

I. Tache
Aplicarea unor metode geometrice în studiul circuitelor electrice 15

FIZICĂ

Luminiţa Daniello, D. Iordache, I. M. Popescu
Asupra parametrilor corelaţiilor care descriu dependenţa de temperatură a permeabilităţii materialelor ferimagnetice în zona tranziţiei de fază (l. engleză) 23

ELECTROTEHNICĂ

Gabriela Spineanu
Influenţa neuniformităţii întrefierului asupra determinării inducţiei magnetice rezultante, la un cuplaj cu curenţi turbionari, în construcţia cu poli aparenţi 31

Fl. Ionescu
Criterii privind alegerea schemelor de protecţie împotriva supratensiunilor în staţiile construite cu echipament capsulat, izolat cu SF_6 39

ELECTRONICĂ

G. Cartianu
Asupra criteriului de stabilitate a unui sistem în vecinătatea condiţiilor limită (l. germană) 47

G. Rulea
Controlul măsurării parametrilor unei joncţiuni simetrice de tip diport 55

T. Tebeanu, D. Dascălu, N. Marin
Modelarea funcţionării diodei IMPATT la semnal mare în oscilatoare de putere . . 61

REŢELE ELECTRICE

D. Cristescu, Marilena Ungureanu, Ioana Dorobanţu, P. Postolache
Efecte perturbatoare ale liniilor electrice aeriene (perturbaţii şi zgomot acustic) . . . 69

CENTRALE ELECTRICE

P. Buhuş, Gh. Comănescu
Valoarea echivalentă pentru calculul pierderilor a curentului absorbit de motoarele sondelor petrolifere în pompaj 79

AUTOMATICĂ

T. Borangiu, R. Dobrescu, T. Ionescu
Sistem CNC cu prelucrare distribuită pentru conducerea adaptivă a maşinilor unelte . 89

I. Catană
Unele probleme privind proiectarea şi simularea sistemelor electrohidraulice 97

CALCULATOARE

Irina Athanasiu, Cr. Zervos
Evaluarea performanţelor sistemului de calcul microprocesor FELIX M 18 105

Summary

MATHEMATICS

I. Bacalu
On Some Residually Spectrale Properties for Operators Systems 3

S. G. Hristova, D. D. Bainov
On Some Integral Inequalities for Scalar Functions of Vectorial Argument 11

I. Tache
On Some Geometrical Methods in the Study of Electrical Circuits 15

PHYSICS

Luminița Daniello, D. Iordache, I. M. Popescu
On the Parameters of the Correlations Describing the Temperature Dependence of the Permeability of the Ferrimagnetic Materials in the Phase Transition Zone . . . 23

ELECTROTECHNICS

Gabriela Spineanu
The Influence over the Air-Gape Nonuniformity Concerning the Determination of Magnetical Resultant Induction on an Eddy-Currents Coupling, Made in Apparent Poles (I) 31

Fl. Ionescu
Criteria for Choice Overvoltage Protection of Metal-Enclosed SF_6 — Substations 39

ELECTRONICS

G. Cartianu
On the Criterion of a System Stability on the Proximity of Limit Conditions 47

G. Rulea
Two Port Symmetrical Junction Parameters Measurement Control 55

T. Tebeanu, D. Dascălu, N. Marin
Modelling the Large-Signal Behaviour of IMPATT Diodes in Power Oscillators . . . 61

POWER ENGINEERING

D. Cristescu, Marilena Ungureanu, Ioana Dorobanțu, P. Postolache
Electrical Transmission Lines Effects. Radio and Audible Noise 69

P. Buhuș, Gh. Comănescu
Determination of the Equivalent Current for Energy Loss Calculations, Absorbed by the Electrical Motors Used in Pomping Wells 79

AUTOMATIC CONTROL

T. Borangiu, R. Dobrescu, T. Ionescu
Distributed CNC System for Adaptive Control of Machine Tools 89

I. Catană
Some Problems about Designing and Simulation Electrohydraulic Servosystem . . 97

COMPUTER SCIENCE

Irina Athanasiu, Cr. Zervos
Performance Evaluation Study Performed on a Felix M 18 Microcomputer System . 105

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.98

ASUPRA UNOR PROPRIETĂȚI SPECTRALE REZIDUALE PENTRU SISTEME DE OPERATORI

I. BACALU*

În această notă se încearcă o extindere pentru sisteme de operatori a studiului unor proprietăți spectrale reziduale ale unui operator ([7], [2]) și obținerea unor rezultate similare.

Fie X un spațiu Banach și $a = (a_1, \dots a_n)$ un sistem de operatori liniari, continui pe X, comutativ. Noțiunile, definițiile și notațiile pe care le folosim sînt cele din [6], [4], [7]. Demonstrațiile sînt adaptări, cu modificări neesențiale ale celor din [6]. Vom folosi permanent egalitatea $\mathscr{B}(V, X) = C^\infty(U, X)$ [8].

1. **Definiție.** Fie $a = (a_1, \dots, a_n)$ un sistem de operatori $a_i \in B(X)$ care comută și S_a o mulțime compactă minimală din $\mathbb{C}^n$ care are proprietatea că $H^{n-1}(C^\infty(G, X), \alpha \oplus \bar{\partial})) = 0$ pentru orice mulțime deschisă G astfel încît $G \cap S_a = \emptyset$. Vom nota cu $d(a, X)$ reuniunea tuturor mulțimilor deschise $V \subset \mathbb{C}^n$ care au proprietatea că există o formă $\psi \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup \cup d\bar{z}, C^\infty(V, X)]$ satisfăcînd egalitatea $sx = (\alpha \oplus \partial)\psi$ adică $xs_1 \wedge s_2 \wedge \dots \dots \wedge s_n = \left[(z_1 - a_1)s_1 + \dots + (z_n - a_n)s_n + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} dz_n\right] \wedge \psi(z)$ (reamintim că există mulțimi V cu această proprietate, de exemplu mulțimea rezolvantă $r(a, X)$). Vom nota, de asemenea, $g(a, x) = C^n \setminus d(a, x)$, $r(a, x) = d(a, x) \cap (\mathbb{C}^n \setminus S_a)$, $sp(a, x) = \mathbb{C}^n \setminus r(a, x) = g(a, x) \cup S_a$.

Vom numi mulțimea $r(a, x)$, *mulțimea rezolvantă* a lui x în raport cu a, mulțimea $sp(a, x)$ *spectrul* lui x în raport cu a, iar S_a *reziduul spectral* al lui a. Vom numi *mulțime rezolvantă analitică* a lui x în raport cu a și vom nota cu $\rho(a, x)$, mulțimea $\rho(a, x) = \delta(a, x) \cap (\mathbb{C}^n \setminus S_a)$, unde $\delta(a, x)$ este mulțimea acelor elemente $z \in \mathbb{C}^n$ astfel încît există o vecinătate deschisă V a lui z și n funcții analitice pe V cu valori în X, $f_1, f_2, \dots, f_n$, satisfăcînd identitatea $x \equiv (\zeta_1 - a_1)f_1(\zeta) + \dots + (\zeta_n - a_n)f_n(\zeta)$, $\zeta \in V$. Prin *spectrul analitic* al lui x în raport cu a vom înțelege mulțimea $\sigma(a, x) = \mathbb{C}^n \setminus \rho(a, x) = \gamma(a, x) \cup S_a$ unde $\gamma(a, x) = \mathbb{C}^n \setminus \delta(a, x)$. Vom arăta că

Manuscris primit la data de 6 iulie 1981
* Lector, Catedra Matematici II

pentru un sistem de operatori care admit o S-capacitate spectrală $\mathcal{E}$[3], avem $g(a, x) = \gamma(a, x)$, $d(a, x) = \delta(a, x)$, $\rho(a, x) = r(a, x)$, $sp(a, x) = \sigma(a, x)$.

2. **Propoziție.** *Pentru un sistem de operatori* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *care comută avem:*

1° $x = 0$ implică $g(a, x) = \emptyset$, $sp(a, x) = S_a$;

2° $g(a, x + y) \subset g(a, x) \cup g(a, y)$,
$sp(a, x + y) \subset sp(a, x) \cup sp(a, y)$, $\forall x, y \in X$;

3° $g(a, by) \subset g(a, x)$, $sp(a, by) \subset sp(a, x)$, dacă $ba_i = a_{ib}$ $b \in B(X)$, $x \in X$;

4° $g(a, y) \subset sp(a, y) \subset \sigma(a, Y)$, *unde* Y *este un subspațiu (liniar închis) al lui* X, *invariant pentru toți* a_i *iar* $y \in Y$.

Demonstrație. 1° rezultă din faptul că pentru $x = 0$ și orice V, forma $\psi = 0 \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V, X)]$ verifică relația $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$. Fie $z \in d(a, x) \cap d(a, y)$ și $V_i \ni z$ astfel încît există formele $\psi_i \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V_i, X)]$ $(i = 1, 2,)$ verificînd egalitățile $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_1$, $sy = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_2$ Atunci forma $\psi_1 + \psi_2 \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V_1 \cap V_2, X)]$ verifică egalitatea $s(x + y) = (\alpha \oplus \bar{\partial})(\psi_1 + \psi_2)$, deci 2° este verificată. Incluziunile din 3° rezultă din faptul că luînd $\psi \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V, X)]$ astfel încît $xs = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ și aplicînd operatorul b coeficienților formei ψ, comutativitatea lui b cu fiecare a_i implică $(\alpha \oplus \bar{\partial})b\psi = b(\alpha \oplus \bar{\partial})\psi = bxs$ (înțelegînd egalitatea, pe componente). Ultima incluziune, 4°, rezultă din observația că pe mulțimea rezolvantă $r(a, X)$ este satisfăcută egalitatea $xs = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$.

Observație. Dacă $n = 1$, reziduul spectral S_a definit mai sus coincide cu reziduul S_T definit în [7] $(a = T)$. Într-adevăr în acest caz $H^\circ(C^\infty(G, X), \alpha \oplus \bar{\partial}) = 0$ pentru orice $[(\alpha \oplus \bar{\partial})f](z) = (z - a)f(z)\,s + \dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}\,dz$, atunci $(\alpha \oplus \bar{\partial})f = 0$ înseamnă $(z - a)f(z) \equiv 0$ și $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$. Operatorul $\alpha \oplus \bar{\partial}$ are deci nucleul nul pe $C^\infty(G, X)$ dacă și numai dacă singura funcție analitică f pe G verificînd $(z - a)f(z) = 0$ este funcția identic nulă.

Vom folosi următoarea lemă, demonstrată în [6].

3. **Lemă.** *Fie* V_1 *și* V_2 *două mulțimi deschise în* $\mathbb{C}^n$ *astfel încît* $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. *Atunci pentru orice* $f \in C^\infty(V_1 \cup V_2, X)$ *există* $f_i \in C^\infty(V_i, X)$ $(i = 1, 2)$, *astfel încît* $f = f_1 - f_2$ *pe* $V_1 \cap V_2$.

4. **Lemă.** *Fie a un sistem de operatori cu reziduul spectral* S_a *și* $V_i (i = 1,2)$ *două mulțimi deschise în* $\mathbb{C}^n \setminus S_a$ *astfel încît există formele* $\psi_i \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V_i, X)]$ *cu proprietatea* $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_i$. *Atunci există o formă* $\psi \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V_1 \cup V_2, X)]$ *cu proprietatea* $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ *pe* $V_1 \cup V_2$.

Demonstrație. Cînd $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ putem lua $\psi(z) = \psi_i(z)$ pentru $z \in V_i (i = 1, 2)$ și avem $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ pe $V_1 \cup V_2$. Dacă $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, avem $(\alpha \oplus \bar{\partial})(\psi_2 - \psi_1) = 0$ pe $V_1 \cap V_2$. Deoarece $G = V_1 \cap V_2 \subset \mathbb{C}^n \setminus S_a$, rezultă că există o formă $\varphi \in \Lambda^{n-2}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V_1 \cap V_2, X)]$ astfel încît $\psi_2 - \psi_1 = (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi(\psi_2 - \psi_1)$ aparține nucleului lui $\alpha \oplus \bar{\partial}$ și deci este imaginea prin $\alpha \oplus \bar{\partial}$ a unei forme $\varphi \in \Lambda^{n-2}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(V_1 \cap V_2)]$). Aplicînd coeficienților lui φ lema, 3, rezultă $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, unde $\varphi_i \in \Lambda^{n-2}[\sigma \cup d\bar{z},$

$C^\infty(V_i, X)](i = 1, 2)$. Prin urmare $(\alpha \oplus \bar{\partial})(\varphi_1 - \varphi_2) = (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi = \psi_2 - \psi_1$, de unde $\psi_1 + (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi_1 = \psi_2 + (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi_2$ pe $V_1 \cap V_2$. Notînd $\psi_i' = \psi_i + (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi_i (i = 1, 2)$ vom obţine $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_i'$ pe $V_i (i = 1, 2)$ şi $\psi_1' = \psi_2'$ pe $V_1 \cap V_2$. Deci definind $\psi(z) = \psi_i'(z)$ pentru $z \in V_i (i = 1, 2)$ se obţine o formă aşa cum se cere în enunţ şi lema este demonstrată.

5. **Corolar.** *Fie $\{V_i\}_{i=1}^m$ o familie finită de mulţimi deschise din $\mathbb{C}^n \setminus S_a$ astfel încît ecuaţia $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ are o soluţie ψ pe fiecare din ele. Atunci ecuaţia are o soluţie şi pe reuniunea lor. Dacă $K \subset r(a, x)$ este o mulţime compactă, există o vecinătate deschisă V a lui $K (V \subset r(a, x))$ pe care ecuaţia $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ are o soluţie.*

6. **Teoremă.** *Fie a un sistem comutativ de operatori cu reziduul spectral S_a. Atunci, pentru orice $x \in X$, ecuaţia $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ are o soluţie globală $\psi \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(r(a, x), X)]$; astfel mulţimea rezolvantă a lui x în raport cu a, $r(a, x)$, este mulţimea deschisă maximală pe care ecuaţia $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi$ are o soluţie.*

Demonstraţie. Fie $\{K_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ un şir crescător de mulţimi compacte astfel încît $r(a, x) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu$. Vom arăta că există un şir corespunzător de forma $\psi_\nu \in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(r(a, x), X)]$, care verifică egalitatea $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_\nu$ într-o vecinătate a lui K_ν şi $\psi_{\nu+1} = \psi_\nu$ într-o vecinătate a lui K_ν. Atunci $\psi = \lim_{\nu \to \infty} \psi_\nu$ există şi reprezintă o soluţie globală. Vom începe cu K_1. După corolarul 5 există o formă ψ_1^* definită într-o vecinătate deschisă a lui K_1 şi satisfăcînd egalitatea $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_1^*$ pe această vecinătate.

Deoarece spaţiul $C^\infty(r(a, x), X)$ este invariant la înmulţirea cu funcţii scalare de clasă C^∞([10], teorema 2.16.1), putem presupune fără a restrînge generalitatea că ψ_1^* este definită pe $r(a, x)$; în adevăr, prin înmulţirea lui ψ_1^* cu o funcţie scalară convenabilă, noua formă poate fi prelungită la $r(a, x)$ şi vom obţine o formă ψ_1 pe o vecinătate a lui K_1. Vom presupune acum că formele $\psi_1, \psi_2 \ldots, \psi_i$ din şirul dorit au fost deja determinate şi să aflăm ψ_{i+1}. Conform corolarului există o vecinătate V_{i+1} a mulţimii K_{i+1} şi o formă ψ_{i+1}^* pe această vecinătate satisfăcînd egalitatea $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_{i+1}^*$, putînd presupune că ψ_{i+1}^* definită pe întreaga mulţime $r(a, x)$. Dar $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_i$ într-o vecinătate V_i a lui K_i deci prin scădere obţinem $(\alpha \oplus \bar{\partial})(\psi_{i+1}^* - \psi_i) = 0$ pe $V_i \cap V_{i+1}$; cum $V_i \cap V_{i+1} \subset \mathbb{C}^n \setminus S_a$, va exista o formă φ' astfel încît $\psi_{i+1}^* - \psi_i = (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi'$ pe $V_i \cap V_{i+1}$, putînd presupune că φ' este definită pe $r(a, x)$. Vom nota $\psi_{i+1} = \psi_{i+1}^* - (\alpha \oplus \bar{\partial})\varphi'$ şi obţinem o formă definită pe $r(a, x)$. egală cu ψ_i pe $V_i \cap V_{i+1}$ şi verificînd $sx = (\alpha \oplus \bar{\partial})\psi_{i+1}$, pe vecinătatea V_{i+1} a lui K_{i+1}. Cu aceasta, demonstraţia este completă.

7. **Remarcă.** Se poate stabili o variantă locală a formulei Cauchy-Weil (1.2.4, [6]) exact pe aceeaşi cale ca în [6] formula 1.5.1. Fie a un sistem comutativ de operatori cu reziduul spectral S_a şi U o vecinătate deschisă a mulţimii $sp(a, x)$; evident $U \supset S_a$. Vom arăta că există o formă $\chi \in \Lambda^n[\sigma \cup d\bar{z}, C_0^\infty(\mathbb{C}^n, X)]$ în aceeaşi clasă de coomologie faţă de $\alpha \oplus \bar{\partial}$ cu sx şi astfel încît suport $(\chi) \subset U$. Conform teoremei 6 există o formă $\psi \in$

$\in \Lambda^{n-1}[\sigma \cup d\bar{z}, C^\infty(r(a,x), X)]$ astfel încît $sx=(\alpha+\bar{\partial})\psi$. Fie U_1 și U_2 două vecinătăți deschise relativ compacte ale mulțimii $sp(a,x)$, astfel ca $sp(a,x)\subset \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset \overline{U}_2 \subset U$ și să considerăm o C^∞ — funcție scalară h pe C^∞, $h=1$ în afara mulțimii U_2 și $h=0$ pe U_1. Cu ajutorul lui h să definim forma $\tilde{\psi}$ prin $\tilde{\psi}=h\psi$ pe $r(a,x)$ și $\tilde{\psi}=0$ pe U_1. Această formă are coeficienți în $C^\infty(\mathbb{C}^n, X)$ și satisface condiția $sx=(\alpha\oplus\bar{\partial})\tilde{\psi}$ în afara mulțimii relativ compacte U_2. Deci, notînd $\chi=sx-(\alpha\oplus\bar{\partial})\tilde{\psi}$ se obține o formă definită pe $\mathbb{C}^n$ cu suport $(\chi)\subset \overline{U}_2 \subset U$, adică tocmai forma cu proprietățile specificate. Ținînd seama de formula 1. 2. 4 [6], cu ajutorul formei χ de mai sus, putem scrie

$$x=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_U (-1)^n \pi_\chi \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

care va da varianta locală a formulei Cauchy-Weil 1.2.4, [6].

8. **Definiție.** Fie $\mathbb{C}$ planul complex, $S\subset \mathbb{C}^n$ o mulțime compactă, $\mathscr{F}_S$ familia mulțimilor închise $F\subset \mathbb{C}^n$ care au proprietatea: sau $F\cap S=\emptyset$ sau $F\supset S$ și $\mathscr{S}(X)$ familia tuturor subspațiilor liniare și închise ale lui X (unde X e spațiu Banach). Vom numi *S-capacitate spectrală* o aplicație $\mathfrak{E}: \mathscr{F}_S \to \mathscr{S}(X)$ care verifică proprietățile

1) $\mathfrak{E}(\emptyset)=\{(0\}$, $\mathfrak{E}(\mathbb{C}^n)=X$;

2) $\mathfrak{E}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{E}(F_i)$ pentru orice șir $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{S}_S$;

3) pentru orice S-acoperire finită deschisă $\{G_S\}\cup\{G_j\}_1^m$ a lui $\mathbb{C}^n$[7] avem $X=\mathfrak{E}(\bar{G}_S)+\sum_{j=1}^{m}\mathfrak{E}(\bar{G}_j)$. Un sistem comutativ $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de operatori, $a\subset B(X)$ se numește *S-decompozabil*, dacă există o S-capacitate spectrală $\mathfrak{E}$ astfel încît

4) $a_j\mathfrak{E}(F)\subset\mathfrak{E}(F)$ pentru orice $F\in\mathscr{F}_S$ și orice j,

5) $\sigma(a, \mathfrak{E}(F))\subset F$ pentru orice $F\in\mathscr{F}_S$.

Vom arăta că dacă sistemul a este S-decompozabil atunci $S\supset S_a$ unde S_a este reziduul spectral al lui a.

9. **Propoziție.** *Fie a un sistem S-decompozabil, D un polidisc deschis cu* $D\cap S=\emptyset$, *p un întreg,* $0\leqslant p\leqslant n-1$ *și* $\psi\in\Lambda^p[\sigma, \mathscr{U}(D,X)]$ *astfel încît* $\alpha\varphi=0$ (*unde* α *este definit prin* $(\alpha\psi)(z)=[(z_1-a_1)s_1+(z_2-a_2)s_2+\ldots+(z_n-a_n)s_n]\Lambda\psi(z)$. *Atunci pentru orice polidisc* $D'\subset D$ *cu* $D'\subset D$, *există o formă* $\varphi\in\Lambda^{p-1}[\sigma, \mathscr{U}(D',X)]$ *astfel încît* $\psi=\alpha\varphi$ *pe* D'. Demonstrația dată în [6] este adevărată și în acest caz cu singura observație că D nu mai este orice polidisc din $\mathbb{C}^n$, ci un polidisc care nu intersectează pe S.

10. **Teoremă.** *Dacă a este S-decompozabil atunci* $S\supset S_a$.

Demonstrație. Cu foarte mici deosebiri, demonstrația este aceeași ca în cazul sistemelor decompozabile ($S=\emptyset$) unde $S_a=\emptyset$ se numește proprietatea (L) [6]. Va trebui să arătăm că pentru orice polidisc $U\subset\mathbb{C}^n$ astfel încît $U\cap S=\emptyset$ avem $H^i(\mathscr{U}(U,X),\alpha)=0$, $0\leqslant i\leqslant n-1$ (facem observația că $H^i(\mathscr{U}(U,X),\alpha)=0$ implică $H^i(C^\infty(G,X),\alpha\oplus\bar{\partial})=0$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ unde U este orice polidisc deschis din $\mathbb{C}^n$, G este orice mulțime deschisă, $G\subset\mathbb{C}^n$ astfel ca $U\cap S=\emptyset$, $G\cap S=\emptyset$; demonstrația este dată în [6] pentru orice U, $G\subset\mathbb{C}^n$, teorema 1.5.16). Se argumentează

prin inducţie asupra lui i, începînd cu $i = 0$. Fie $f \in \mathcal{U}(U, X)$, astfel încît $\alpha f = 0$; conform propoziţiei precedente vom avea $f = 0$ pe orice polidisc D' cu $D' \subset U$ şi deci $f = 0$ pe U. Presupunem că pentru orice polidisc deschis $D \subset \mathbb{C}^n$ cu $D \cap S = \emptyset$ avem $H^{i-1}(\mathcal{U}(D, X), \alpha) = 0$ cu i fixat, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ şi să dovedim că $H^i(\mathcal{U}(U, X), \alpha) = 0$. Fie D_ν un şir de polidiscuri, $D_\nu \cap S = \emptyset$, astfel ca $\bar{D}_\nu \subset D_{\nu+1}$ pentru orice ν cu $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu = U$ şi $\psi \in \Lambda^i[\sigma, \mathcal{U}(U, X)]$ astfel încît $\alpha\psi = 0$. Aplicînd propoziţia precedentă pentru D_2, deducem că există o formă $\varphi_1 \in \Lambda^{i-1}[\sigma, \mathcal{U}(D_2, X]$ astfel încît $\psi = \alpha\varphi_1$ pe D_2; analog putem găsi o formă φ_2' pe D_3 cu $\psi = \alpha\varphi_2'$ pe D_3. Se obţine $\alpha(\varphi_1 - \varphi_2') = 0$ pe D_2 de unde, aplicînd ipoteza inductivă, deducem că există o formă $\chi \in \Lambda^{i-2}[\sigma, \mathcal{U}(D_2, X)]$, astfel încît $\varphi_1 - \varphi_2' = \alpha\psi$. Vom reţine din dezvoltarea Taylor a lui χ pe D_2 un număr de termeni suficient de mare, astfel încît χ' (partea reţinută) să verifice $\|\alpha\chi - \alpha\chi'\| < \frac{1}{2}$ pe $\bar{D}_1$. Raţionînd în mod analog, putem defini un şir de forme φ_ν, $\varphi_\nu \in \Lambda^{i-1}[\sigma, (\mathcal{U}D_{\nu+1}, X)]$ cu proprietăţile: $\psi = \alpha\varphi_\nu$ pe $D_{\nu+1}$ şi $\|\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu\| < 1/2^{\nu+1}$ pe $\bar{D}_\nu$. Şirul φ_ν converge evident la o formă avînd coeficienţi analitici pe U şi satisfăcînd $\psi = \alpha\varphi$ pe U, q.e.d.

În [3] s-a arătat unicitatea S-capacităţilor spectrale pentru sisteme de operatori S-decompozabile. Acum vom arăta acest lucru pe altă cale, punînd în evidenţă legătura între S-capacitatea spectrală ataşată unui operator şi anumite subspaţii liniare, caracterizate cu ajutorul spectrului local, caracterizare deosebit de utilă.

Fie a un sistem comutativ de operatori pe spaţiul X, $a \subset B(X)$, cu reziduul spectral S_a. Dacă H este o mulţime oarecare din $\mathbb{C}^n$ astfel ca $H \supset S_a$, vom nota $H_{[a]}(H) = \{x, x \in X, sp(a, x) \subset H\}$ şi $X_a(H) = \{x, x \in X, \sigma(a, x) \subset H\}$; $X_a(H)$ şi $X_a(H)$ sînt subspaţii liniare ale lui X şi $X_a(H) \subset X_{[a]}(H)$.

11. **Teorema.** *Dacă $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un sistem S-decompozabil atunci $\mathfrak{S}(F) = X_{[a]}(F)$ pentru orice mulţime închisă $F \supset S$.*

Demonstraţie. Conform teoremei 10, $S \supset S_a$, deci $F \supset S_a$ şi $X_{[a]}(F)$ are sens. Incluziunea $\mathfrak{S}(F) \subset X_{[a]}(F)$ rezultă din faptul că $sp(a, x) \subset \sigma(a, \mathfrak{S}(F))$ (prop. 2, 4°). Incluziunea inversă se demonstrează exact ca în [6] teorema 2.2.1 cu singura specificaţie că F nu mai este arbitrar ci $F \supset S$.

12. **Corolar.** *Fie a un sistem S-decompozabil. Atunci pentru orice mulţime închisă $F \supset S$, subspaţiul $X_{[a]}(F)$ este spaţiul maximal spectral pentru a; mai precis, pentru orice subspaţiu Z invariant pentru a astfel încît $\sigma(a, Z) \subset F$, avem $Z \subset X_{[a]}(F)$; în plus $\sigma(a, X_{[a]}(F)) \subset F$.*

Demonstraţie. Incluziunea $\sigma(a, X_{[a]}(F)) \subset F$ rezultă din teorema precedentă, deoarece $\sigma(a, \varepsilon(F)) \subset F$. Dacă Z este un subspaţiu invariant pentru a cu $\sigma(a, Z) \subset F$ atunci pentru orice $z \in Z$, $sp(a, z) \subset \sigma(a, Z) \subset F$ deci $z \in X_{[a]}(F)$, adică $Z \subset X_{[a]}(F)$.

13. **Propoziţie.** *Dacă a este un sistem S-decompozabil atunci pentru orice $x \in X$, avem $sp(a, x) = \sigma(a, x)$.*

Demonstraţie. Să arătăm întîi că $sp(a, x) \subset \sigma(a, x)$ sau echivalent cu aceasta $\rho(a, x) \subset r(a, x)$. Fie $z \in \delta(a, x)$ şi în conformitate cu definiţia 1 să considerăm o vecinătate deschisă V a lui z şi n funcţii analitice V cu valori în $X, f_1, f_2, \ldots, f_n$ verificînd identitatea $x \equiv (\xi_1 - a_1) f_1(\xi) + \ldots + \ldots + (\zeta_n - a_n) f_n(\zeta)$, $\xi \in V$. Considerăm forma de grad $n-1$ definită

pe V, $\psi(\zeta)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f_i(\zeta)\,s_1\wedge s_2\wedge\ldots\wedge\hat{s}_i\wedge\ldots s_n$. Această formă poate fi considerată ca un element din $\Lambda^{n-1}[\sigma\cup d\bar{z}, C^\infty(V,X)]$ și ținînd seama de analiticitatea funcțiilor $f_i(\bar{\partial}f_i=0)$ se verifică ușor egalitatea $sx=(\alpha\oplus\bar{\partial})\psi$ pe V; rezultă deci $V\subset d(a,x)$, adică $\delta(a,x)\subset d(a,x)$ sau $g(a,x)\subset\gamma(a,x)$ de unde $g(a,x)\cup S_a=sp(a,x)\subset\gamma(a,x)\cup S_a=\sigma(a,x)$. Pentru incluziunea inversă $\sigma(a,x)\subset sp(a,x)$, fie $z\in r(a,x)$ și D un polidisc deschis cu centrul în z astfel încît $D\subset r(a,x)$. Deoarece $x\in X_{[a]}(sp(a,x))=$ $=\varepsilon(sp(a,x))$ și $\sigma(a,X_{[a]}(sp(a,x)))\subset sp(a,x)$, D este conținut în $r(a,X_{[a]}(sp((a,x)))$ deci conform teoremei 1.1.3 [6] există funcțiile $f_1,\ldots,f_n$ analitice pe D cu valori în X, astfel încît $x=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-a_i)f_i(\zeta)$, $\zeta\in D$. Aceasta înseamnă că $z\in\rho(a,x)$, deci $r(a,x)\subset\rho(a,x)$ de unde $\sigma(a,x)\subset sp(a,x)$.

14. **Corolar.** *Dacă a este un sistem S-decompozabil atunci pentru orice mulțime $H\subset\mathbb{C}^n$ cu $H\supset S$ avem $X_{[a]}(H)=X_a(H)$.*

Rezultă ușor din propoziția precedentă.

15. **Propoziție.** *Dacă a este un sistem oarecare de operatori, atunci* $\sigma(a,X)=\bigcup_{x\in X}sp(a,x)$.

Demonstrație. Incluziunea $\bigcup_{x\in X}sp(a,x)\subset\sigma(a,X)$, rezultă din proprietatea 2, 4°, $sp(a,x)\subset\sigma(a,X)$. Invers dacă $z\in\bigcap_{x\in X}r(a,x)$, atunci $H^n(\mathcal{U}(z,X),\alpha)=$ $=0$; deoarece $z\notin S_a$, există un polidisc deschis D, cu $D\cap S_a=\emptyset$ și pentru care, conform teoremei 6 avem $H^i(\mathcal{U}(D,X),\alpha)=0$ $(i=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1)$. Atunci conform corolarului 1.3.4. [6] rezultă că $z\in(r(a.x)$, deci $\bigcup sp(a,x)\supset\sigma(a,X)$.

16. **Definiție.** Suportul S-capacității spectrale $\mathcal{E}$ este mulțimea suport $\mathcal{E}=\cap\{F;\ F$ închisă, $\mathcal{E}(F)=X\}$.

17. **Propoziție.** *Dacă a este un sistem S-decompozabil și $\mathcal{E}$ este S-capacitatea sa spectrală atunci suport $\mathcal{E}=sp(a,X)$.*

Demonstrație. Incluziunea $\sigma(a,X)\subset$ suport $\mathcal{E}$ rezultă din faptul că pentru orice F închisă, astfel încît $\mathcal{E}(F)=X$, avem $\sigma(a,X)=\sigma(a,\mathcal{E}(F))\subset$ $\subset F$, de unde $\sigma(a,X)\subset\cap\{F,F$ închisă, $\mathcal{E}(F)=X\}=$ suport $\mathcal{E}$. Pentru incluziunea inversă fie $z_0\in r(a,X)$ și să arătăm că $z_0\notin$ suport $\mathcal{E}$. Fie V o vecinătate deschisă a lui z_0 astfel încît $\bar{V}\subset r(a,X)$ și fie F o mulțime închisă astfel încît $z_0\notin F$ și $F\supset S$ și $X=\mathcal{E}(F)+\mathcal{E}(\bar{V})$; aceasta este posibil deoarece $z_0\notin S(S\subset\sigma(a,X))$. Fie $x\in\mathcal{E}(\bar{V})$; întrucît $V\subset r(a,X)$ rezultă că $sx=(\alpha\oplus\bar{\partial})\psi$ într-o vecinătate $(\mathbb{C}^n\setminus V)$ a spectrului $sp(a,X)$, deci aplicînd formula 1.2.4. [6] deducem $x=0$, deci $\mathcal{E}(\bar{V})=\{0\}$, adică $\mathcal{E}(F)=X$; din $z_0\notin F$ rezultă deci $z_0\notin$ suport $\mathcal{E}$, tocmai ce trebuia demonstrat.

17. **Corolar.** *Dacă a este un sistem S-decompozabil, atunci pentru orice mulțime închisă F avem* $\sigma(a,\mathcal{E}(F))\subset\sigma(a,X)$.

Demonstrație. Avem $\mathcal{E}(F\cap\sigma(a,X))=\mathcal{E}(F)\cap\mathcal{E}(\sigma(a,X))=\mathcal{E}(F)\cap$ $\cap X=\mathcal{E}(F)$, deci $\sigma(a,\mathcal{E}(F))=\sigma(a,\mathcal{E}(F\cap\sigma(a,X)))\subset F\cap\sigma(a,X)\subset$ $\subset(\sigma a,X)$.

BIBLIOGRAFIE

1. *E. Albrecht, F. H. Vasilescu*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 14 (1974), 771—775.
2. *I. Bacalu*, Rev. Roum. Math, Pures, Appl., 21 (1976), 177—194.
3. — Stud. și Cerc. Mat., 28 (1976), 131—134.
4. I. *Colojoară, C. Foiaș*, Theory of generalized spectral operators, Gardon and Breach (1968)
5. *C. Foiaș*, Rev. Roum. Math. Pures, Appl, 13 (1968), 1539—1545.
6. *St. Frunză*, O teorie axiomatică a descompunerilor spectrale pentru sisteme de operatori (teză). Stud. și Cerc. Mat. 27 (1975).
7. *F. H. Vasilescu*, Residually decomposable operators in Banach spaces, Tohoku Math. I., 1969, 16.
8. — Calcul funcțional analitic multidimensional, Ed. Academiei (1979)
9. *J. L. Taylor*, A joint spectrum for several commuting operators, J. Functional Anal., 6 (1970).
10. — Analytic functional calculus for several commuting operators. Acta Math. 125 (1970).

On Some Residually Spectrale Properties for Systems of Operators

In this note one obtains some results from the theory of residually decomposable systems of operators.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z.: 512.64

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

С. Г. ХРИСТОВА, Д. Д. БАЙНОВ*

В работе рассматриваются линейные и нелинейные интегральные неравенства типа Беллмана — Гронуолла для функций многих переменных.

В последние годы, в связи с развитием фундаментальной теории и теории устойчивости для различных классов дифференциальных уравнений, были рассмотрены как линейные так и нелинейные интегральные неравенства типа Беллмана — Гронуолла. В большинстве из работ посвященных ытим неравенствам были получены результаты относящихся к скалярным функциям скалярного аргумента. В настоящей работе обобщаются некоторые неравенства рассмотрены в [I] для функций векторного аргумента.

Пусть $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Будем говорить, что точка x следует $y (x > y)$, если для всех $i \in \overline{1, n}$ выполнены неравенства $x_i \geqslant y_i$.

Пусть $a, b \in R^n$, $b > a > 0$. Введем следующие обозначения:

$$B^a = I_1^a \times \ldots \times I_n^a,\ B_k^a = I_1^a \times \ldots \times I_{k-1}^a \times I_{k+1}^a \times \ldots \times I_n^a,$$

$$B(a, b) = I_1(a, b) \times \ldots \times I_n(a, b),$$

$$B_k(a, b) = I_1(a, b) \times \ldots \times I_{k-1}(a, b) \times I_{k+1}(a, b) \times \ldots \times I_n(a, b),$$

$$I_k^a = [0, a_k],\ I_k(a, b) = [a_k,\ b_k],\ k \in \overline{1, n},$$

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n,\ \mathrm{d}s' = \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_{k-1}\mathrm{d}s_{k+1} \ldots \mathrm{d}s_n.$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $u(x)$, $f(x)$, $g(x) : R^n \to R^1$ непрерывны и неотрицательны при $x > 0$.

Приятно в редакцию 14 декабря 1979.

* Пловдивский университет.

2. Функция $n(x): R^n \to R_1$ непрерывна и положительна при $x > 0$ и $n(x) \geqslant n(y)$ если $x > y$.

3. При $x > 0$ выполнено неравенство

$$u(x) \leqslant n(x) + g(x) \int_{B^x} f(s) u(s)\, \mathrm{d}s \tag{1}$$

Тогда при $x > 0$ выполнено неравенство

$$u(x) \leqslant n(x) \left[1 + g(x) \int_{B^x} f(s) \exp \left(\int_{B(s,x)} g(\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \right] \tag{2}$$

Доказательство. Из условия 2 теоремы 1 и неравенства (1) следует, что

$$\frac{u(x)}{n(x)} \leqslant 1 + g(x) \int_{B^x} f(s) \frac{u(s)}{n(x)}\, \mathrm{d}s \leqslant 1 + g(x) \int_{B^x} f(s) \frac{u(s)}{n(s)}\, \mathrm{d}s \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$\frac{u(x)}{n(x)} = w(x),$$

$$\int_{B^x} f(s)\, w(s)\, \mathrm{d}s = V(x).$$

Тогда неравенство (3) можно записать в виде

$$w(x) \leqslant 1 + g(x) V(x). \tag{4}$$

Дифференцируя функцию $V(x)$ по x_k получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} V(x) \leqslant \int_{B_k^x} f(x_k, s')\, w(x_k, s')\, \mathrm{d}s' \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B_k^x} f(x_k, s') \left[1 + g(x_k, s')\, V(x_k, s') \right] \mathrm{d}s' \leqslant$$

$$\leqslant V(x) \int_{B_k^x} f(x_k, s')\, g(x_k, s')\, \mathrm{d}s' + \int_{B_k^x} f(x_k, s')\, \mathrm{d}s'$$

откуда следует неравенство

$$V(x) \leqslant \exp \left(\int_{B^x} f(s)\, g(s)\, \mathrm{d}s \right) \cdot \int_{B^x} f(s) \exp \left(- \int_{I_k^s} \int_{B_k^x} f(\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B^x} f(s) \exp \left(\int_{B(s,\, x)} f(\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s.$$

Используя неравенство (4) и определение функции $w(x)$, получаем неравенство (2).

Этим теорема I доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $u(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x): R^n \to R^1$ непрерывны и положительны при $x > 0$.

2. Функция $W(t): R^1 \to R^1$ непрерывна, положительна и неубывающая при $t > 0$ и $W(\tau \cdot t) \leqslant W(\tau) \cdot W(t)$, $W(0) = 0$.

3. При $x > 0$ выполнено неравенство

$$u(x) \leqslant u_0 + g(x) \int_{B^x} f(s) u(s)\, \mathrm{d}s + \int_{B^x} h(s)\, W(u(s))\, \mathrm{d}s \tag{5}$$

где $u_0 > 0$ — постоянная.

Тогда при $x \in B^a$ выполнено неравенство

$$u(x) \leqslant G^{-1}\left[G(u_0) + \int_{B^x} h(s)\, W\left(1 + g(s)\left(\int_{B^s} f(\tau) \exp\left(\int_{B(\tau,s)} g(p)\, f(\mathrm{d}p)\right) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times\, \mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}s\right] \cdot \left[1 + g(x)\left(\int_{B^x} f(s) \exp\left(\int_{B(s,x)} g(\tau)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right)\right] \cdot \tag{6}$$

где

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\tau}{W(\tau)}, \qquad t \geqslant t_0 > 0$$

функция G^{-1} обратная для G, а точка $a \in R^4$, выбрана так, чтобы при $x \in B^a$ выполнено

$$G(u_0) + \int_{B^x} h(s) W\left[1 + g(s) \int_{B^s} f(\tau) \exp\left(\int_{B(\tau,s)} g(p)\, f(p)\, \mathrm{d}p\right) \mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}s \in$$

$$\in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$n(x) = u_0 + \int_{B^x} h(s)\, W(u(s))\, \mathrm{d}s.$$

Тогда неравенство (5) можно записать в виде

$$u(x) \leqslant n(x) + g(x)\left(\int_{B^x} f(s)\, u(s)\, \mathrm{d}s\right) \cdot$$

Функция $n(x)$ удовлетворяет условию 2 теоремы I и следовательно

$$u(x) \leqslant n(x)\left[1 + g(x)\left(\int_{B^x} f(s) \exp\left(\int_{B(s,x)} g(\tau)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right)\right] \cdot \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что

$$W(u(x)) \leqslant W(n(x)) \cdot W\left\{1 + g(x)\left(\int_{B^x} f(s) \exp\left(\int_{B(s,x)} g(\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}s\right]\right\},$$

откуда получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k} G(n(x)) \leqslant \int_{B_k^x} \frac{h(x_k, s')\, W(u(x_k, s'))}{W(n(x_k, s'))}\, \mathrm{d}s' \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B_k^x} h(x_k, s') W\Big[1 +$$

$$+ g(x_k, s')\left(\int_{I_k^x} \int_{B_k^s} f(\tau) \exp\left(\int_{I_k(\tau,x)} \int_{B_k(\tau,\, s)} g(p) f(p)\, \mathrm{d}p\right) \mathrm{d}\tau\right)\Big) \mathrm{d}s'\Big]$$

Интегрируем последнее неравенство по x_k от 0 до x_k и получаем неравенство

$$G(n(x)) \leqslant G(u_0) +$$

$$+ \int_{B^x} h(s) W\left[1 + g(s)\left(\int_{B^s} f(\tau) \exp\left(\int_{B(\tau,\, s)} (g(p) f(p)\, \mathrm{d}p\right) \mathrm{d}\tau\right)\right] \mathrm{d}s$$

откуда следует неравенство (6).

Этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B. G. Pachpatte*, On Some Generalizations of Bellman's Lemma, J. Math. Anal. Appl., 51 (1975), 141—150.

Asupra unor inegalităţi integrale pentru funcţii scalare de argument vectorial

În lucrare se consideră citeva inegalităţi integrale liniare şi neliniare de tip Bellman-Gronwall pentru funcţii de mai multe variabile reale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z.: 621.382 : 514.76
621.3.012.8 : 514.76

APLICAREA UNOR METODE GEOMETRICE IN STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE

I. TACHE *

Această lucrare se bazează pe ideea asimilării stărilor unui circuit cu puncte ale unei varietăți diferențiabile. Limbajul geometric constituie o nouă metodă și un nou tip de abordare a studiului unor circuite. În acest context se pot formula unele probleme legate de extinderea conceptului de pasivitate.

Introducere

Studiul circuitelor electrice liniare a cunoscut o puternică dezvoltare, conjugată cu folosirea metodelor matematice de algebră liniară, ecuații diferențiale, transformări integrale etc. În ultimul timp au apărut multe elemente neliniare (mai corect spus nu neapărat liniare) de circuit, așa cum sînt tranzistoarele, circuitele integrate, microprocesoarele etc. În legătură cu elementele neliniare se pun: problema evoluției lor dinamice în timp și probleme specifice de control al acestei evoluții.

Această lucrare se bazează pe ideea asimilării stărilor unui circuit cu puncte ale unei varietăți diferențiabile. Limbajul geometric este aici mai mult decît o modalitate de descriere și se constituie într-o metodă și un nou tip de abordare a studiului unor circuite. În acest context se pot formula unele probleme legate de extinderea conceptului de pasivitate.

1. Metoda geometrică

Se tratează mai întîi un exemplu simplu. Fie circuitul din figura 1. Presupunem că toate elementele acestui circuit sînt necuplate și că, exceptînd rezistența R_2, toate elementele sînt liniare.

Pentru R_2 se presupune o caracteristică tensiune-curent neliniară $i_{R_2} = f\left(v_{R_2}\right)$.

Manuscris primit la data de 20 noiembrie 1981
* Student, Facultatea Electronică și telecomunicații

În afară de notațiile din fig. 1 se mai notează cu q sarcina de pe armăturile condensatorului C și cu Φ fluxul inducției magnetice prin bobina L. Pentru fiecare element de circuit se scriu caracteristicile de dispozitiv :

$$\begin{aligned} v_{R_1} - R_1 i_{R_1} &= 0 \\ i_{R_2} - f(v_{R_2}) &= 0 \\ q - Cv_c &= 0 \\ \Phi - Li_L &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Se scriu și ecuațiile care decurg din teoremele lui Kirchhoff :

$$\begin{aligned} &v_e - i_{R_1} - v_L - v_c = 0 \\ &v_{R_2} - v_c = 0\,; \quad i_L = i_c + i_{R_2} \\ &i_L = i_{R_1}\,; \quad i_L = i_e \end{aligned} \tag{2}$$

Din ecuațiile lui Maxwell avem :

$$\begin{aligned} i_c &= \dot{q} \\ v_L &= \dot{\Phi} \end{aligned} \tag{3}$$

Grupurile de ecuații (1) și (2) sînt verificate la orice moment de timp. Ele formează un sistem algebric de 9 ecuații cu 12 necunoscute : v_{R_1}, v_{R_2}, v_c, v_L, v_e, i_{R_1}, i_{R_2}, i_c, i_e, q, Φ, i_L. Dacă considerăm un spațiu vectorial cu 12 dimensiuni, deci izomorf cu $\mathbf{R}^{12}$, atunci este natural să se poată imagina

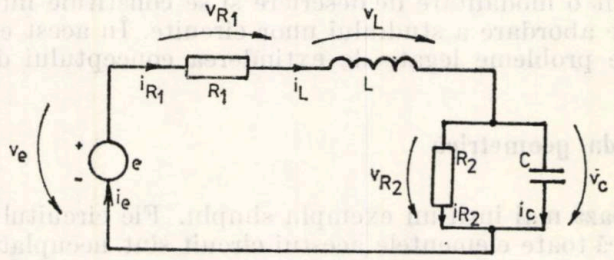


Fig. 1

că ecuațiile (1) și (2) care exprimă niște condiții impuse parametrilor circuitului de natura elementelor din circuit și de topologia circuitului sînt ecuațiile care definesc în $\mathbf{R}^{12}$ o varietate diferențială de dimensiune $12 - 9 = 3$, cu condiția ca sistemul de ecuații format de (1) și (2) să fie compatibil, iar relațiile (1) să fie independente de relațiile (2).

Este evident că relaţiile (3), în care intervine şi timpul, descriu evoluţia circuitului în timp.

În continuare se vor trata cîteva noţiuni teoretice legate de aplicarea metodei geometrice.

Se consideră un circuit alcătuit din r rezistori, c capacitori (cărora li se asociază vectorul coloană q format din sarcinile electrice ale capacitorilor), l inductori (cărora li se asociază vectorul coloană Φ format din fluxurile magnetice din aceşti inductori) şi n surse independente (de curent sau de tensiune). De notat că reţeaua trebuie mai întîi transformată astfel încît să nu conţină surse de curent sau de tensiune comandate, ceea ce este întotdeauna posibil. Nu se impune însă nici o condiţie asupra existenţei elementelor de circuit cuplate. Se notează cu $b = r + c + l + n$ numărul total de elemente din circuit, cu v vectorul coloană al căderilor de tensiune pe toate cele b elemente de circuit şi cu i vectorul coloană al curenţilor prin toate cele b elemente de circuit. Vectorii q, Φ, v, i constituie parametrii circuitului. Fie $X = R^{c+l}$ şi $Y = R^{2b}$.

X apare ca spaţiul de stare al elementelor de memorie ale circuitului (capacitorii şi inductorii) iar (v, i) este un punct din Y.

Fie $K = \{(v, i) \in Y / Bv = 0,\ Qi = 0\}$

unde

$$\begin{cases} Bv = 0 \\ Qi = 0 \end{cases}$$

reprezintă forma matricială a teoremelor lui Kirchhoff pentru acest circuit, B fiind matricea fundamentală a buclelor, iar Q matricea fundamentală a secţiunilor. K este un subspaţiu vectorial al lui Y de dimensiune egală cu b. Parametrii circuitului (q, Φ, v, i) constituie un punct din $X \times Y = R^{2b+c+l}$ Caracteristicile de dispozitiv ale celor r rezistori, c capacitori şi l inductori impun ca acest punct să se afle pe o varietate diferenţiabilă Ω, ale cărei ecuaţii sînt chiar ecuaţiile de dispozitiv. Ω are dimensiunea :

$$\dim \Omega = (2b + c + l) - (r + c + l) = 2b - r$$

În $X \times Y = R^{2b+c+l}$ sînt două varietăţi diferenţiabile : $X \times K$, varietate liniară de dimensiune $c + l + b$ şi Ω de dimensiune $2b - r$. Fie $\Sigma = (X \times K) \cap \Omega$. În legătură cu Σ se fac următoarele două ipoteze, verificate în toate cazurile importante :

1°. Σ este nevidă ;

2°. Există compatibilitate între cele $r + c + l$ ecuaţii care definesc pe Ω şi celelalte ecuaţii rezultate din teoremele lui Kirchhoff (această compatibilitate se poate defini riguros matematic impunînd condiţia ca varietăţile $X \times K$ şi Ω să fie transverse). În cazul în care ipotezele 1° şi 2° sînt verificate Σ este o varietate diferenţiabilă în $X \times Y$ de dimensiune $c + l + n$. Se observă că dimensiunea varietăţii diferenţiabile Σ este exact egală cu numărul elementelor de memorie şi al surselor independente din circuit.

Studiul evoluţiei circuitului în timp revine la studiul variaţiei parametrilor de stare care sînt q, Φ şi vectorul surselor independente din circuit

notat (v_e, i_j), unde v_e este vectorul surselor independente de tensiune, iar i_j este vectorul surselor de curent independente. În acest mod starea rețelei la fiecare moment t, $t \in [t_0, t_f]$ apare ca un punct $\sigma(t) \in \in \Sigma$. Deci Σ apare ca locul geometric al stărilor posibile ale circuitului. Pe scurt Σ este spațiul restrîns al stărilor (spațiul larg este $X \times Y = R^{2b+c+l}$).

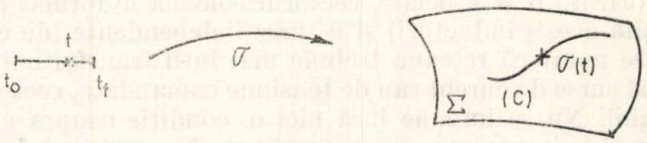


Fig. 2

Evoluția circuitului poate fi precis definită pentru că toate componentele vectorilor q și Φ trebuie să satisfacă ecuațiile lui Maxwell: $v_L = \dot{\Phi}$; $i_c = \dot{q}$, unde v_L este partea din vectorul v care cuprinde tensiunile la bornele inductorilor, iar i_C este partea din vectorul curenților i cuprinzînd curenții prin capacitori. Punctul $\sigma(t)$ parcurge curbele integrale date de ecuațiile lui Maxwell. Pentru o inițializare dată, $\sigma(t)$ descrie o curbă (C) situată pe Σ cînd t parcurge un interval de timp $[t_0, t_f]$ (fig. 2).

2. Aspecte energetice; Circuite neliniare aproape pasive.

Pentru orice $t \in [t_0, t_f]$ notăm $W[\sigma(t)] = -\dot{E}[\sigma(t))]$ unde E este energia stocată în elementele de memorie.

Se reia exemplul dat anterior (fig. 1). În acest caz:

$$r = 2,\ l = 1,\ c = 1,\ n = 1,\ b = r + c + l + n = 5,\ X = \mathbf{R}^2,$$

$$Y = \mathbf{R}^{10},\ X \times Y = \mathbf{R}^{12},\ \Omega = \{(q, \Phi, v, i) \in \mathbf{R}^{12} / q, \Phi, v, i \text{ verifică } (1)\},$$

$$\dim \Omega = 2b - r = 8,\ K = \{(v, i) \in \mathbf{R}^{10} / v, i \text{ verifică } (2)\},$$

$$\dim K = 5,\ \dim X \times K = 7,\ \Sigma = \Omega \cap (X \times K),\ \dim \Sigma = 3$$

Dinamica circuitelor în timp este dată de ecuațiile:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{L} \cdot \Phi - f\left(\frac{q}{C}\right); \quad \dot{\Phi}(t) = -\frac{R_1}{L}\Phi - \frac{1}{C}q + v_e$$

În acest caz $E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}q^2 + \frac{1}{L}\Phi^2\right)$. Deci pentru $t \in [t_0, t_f]$:

$$W[\sigma(t)] = -\dot{E} = -\frac{1}{C}q\dot{q} - \frac{1}{L}\Phi\dot{\Phi}$$

$$W[\sigma(t)] = \frac{q}{C}f\left(\frac{q}{C}\right) + \frac{R_1}{L^2}\Phi^2 - \frac{\Phi}{L}v_e \qquad (4)$$

În general un circuit se numește pasiv dacă pentru orice moment $t \in [t_0, t_f]$ avem $W[\sigma(t)] \geqslant 0$ deci $\dot{E}[\sigma(t)] \leqslant 0$ adică energia stocată în elementele de memorie este o funcție monoton descrescătoare de timp. Circuitele pasive sînt deci consumatoare de energie. Analizată din acest punct de vedere relația (4), se observă că semnul lui W este variabil și deci nu este îndeplinită condiția de pasivitate. Totuși are loc:

PROPOZIȚIA 1: Se presupune că funcția f are proprietatea că $\lim_{|x|\to\infty} xf(x) = +\infty$ și că v_e este funcție mărginită de timp adică $A \leqslant v_e(t) \leqslant B$ $\forall\, t \in [t_0, t_f]$ cu A, B fixate. Atunci, în afara unei mulțimi mărginite $M \subset \Sigma$, avem $W \geqslant 0$.

Demonstrație: se introduc coordonatele polare ρ, θ în planul variabilelor (q, Φ):

$$\frac{q}{v_e C} = \rho \cdot \cos\theta\,; \qquad \frac{\Phi R_1}{L v_e} = \rho \cdot \sin\theta$$

Atunci conform (4) avem:

$$W[\sigma(t)] = \rho v_e \cos\theta \cdot f(\rho v_e \cos\theta) + \frac{v_e^2}{R_1}\rho^2 \sin^2\theta - \frac{v_e^2}{R_1}\rho \cdot \sin\theta$$

$\lim_{\rho\to\infty} W = +\infty$, deci $\exists\, \rho_0 > 0$ astfel încît pentru $\forall\, \rho > \rho_0$ avem $W \geqslant 0$. Considerăm mulțimea:

$$M = \Sigma \cap \left\{ (q, \Phi, v_e) \,\middle/\, \frac{q^2}{C^2 v_e^2} + \frac{R_1^2 \Phi^2}{L^2 v_e^2} \leqslant \rho_0^2\,;\ A \leqslant v_e \leqslant B \right\}$$

Evident $M \subset \Sigma$ și M este o mulțime mărginită. În punctele lui $\Sigma \setminus M$ avem $\rho > \rho_0$ deci $W \geqslant 0$ și propoziția 1 este demonstrată.

Apare astfel justificată următoarea definiție:

Un circuit nu neapărat liniar avînd spațiul stărilor Σ și la fiecare moment t starea $\sigma(t) \in \Sigma$, se numește *aproape pasiv* dacă există o mulțime mărginită $M \subset \Sigma$ (adică $M = \Sigma \cap N$ cu N mulțime mărginită din R^{2b+c+l}) astfel încît pentru orice $t \in [t_0, t_f]$ să rezulte $W[\sigma(t)] \geqslant 0$ ori de cîte ori $\sigma(t) \notin M$.

Deci circuitul din fig. 1 este aproape pasiv (conform propoziției 1). Evident orice circuit pasiv este aproape pasiv ($M = \emptyset$). Circuitele aproape pasive consumă din energia stocată în elementele de memorie cînd parcurg curbele integrale (C) situate pe $\Sigma \setminus M$ (fig. 3), fără a se putea preciza ce se întîmplă în lungul curbelor (C) care traversează M.

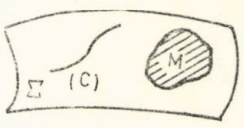


Fig. 3

Se consideră circuitul din fig. 4. Folosind un model dinamic pentru tranzistor circuitul echivalent este cel din fig. 5.

Notînd $B_e = \exp\left[\frac{v_3}{v_T}\right] - 1$; $B_C = \exp\left[\frac{v_4}{v_T}\right] - 1$ se pot scrie ecuațiile de dispozitiv:

$i_3 + \alpha_I i_4 - I_{E0} B_e = 0$; $\alpha_N i_3 + i_4 - I_{C0} B_C = 0$; $v_1 - R_1 i_1 = 0$; $v_2 - R_2 i_2 = 0$; $q_1 = Q_{10} B_e$; $q_2 = Q_{20} B_C$ unde parametrii α_I, α_N, I_{E0}, I_{C0}, Q_{10}, Q_{20} și v_T pot fi considerați constanți și pozitivi pentru un tranzistor dat și

la o anumită temperatură. Introducînd și ecuațiile Kirchhoff și Maxwell și efectîund calculele se obține dinamica circuitului descrisă de ecuațiile :

$$\dot{q}_1 = -\frac{e_1 + v_3}{R_1} - I_{ES}B_e + \alpha_I I_{CS}B_C$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{e_2 + v_4}{R_2} + \alpha_N I_{ES}B_e - I_{CS}B_C$$

unde :

$$I_{ES} = \frac{I_{E0}}{1-\alpha_I\alpha_N}; \quad I_{CS} = \frac{I_{C0}}{1-\alpha_I\alpha_N}$$

Avem : $r = 4$, $c = 2$, $l = 0$, $n = 2$, $b = 8$, $\dim \Omega = 12$, $\dim \Sigma = 4$. $\dot{E} = v_3\dot{q}_1 + v_4\dot{q}_2$.

Prin efectuarea calculelor se obține :

$$W = \frac{v_T^2}{R_1}\left[\ln\left(1+\frac{q_1}{Q_{10}}\right)\right]^2 + \frac{v_T^2}{R_2}\left[\ln\left(1+\frac{q_2}{Q_{20}}\right)\right]^2 + v_T\left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{I_{ES}}{Q_{10}}q_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_I I_{CS}}{Q_{20}}q_2\right)\ln\left(1+\frac{q_1}{Q_{10}}\right) + v_T\left(\frac{e_2}{R_2} + \frac{I_{CS}}{Q_{20}}q_2 - \frac{\alpha_N I_{ES}}{Q_{10}}q_1\right)\ln\left(1+\frac{q_2}{Q_{20}}\right)$$

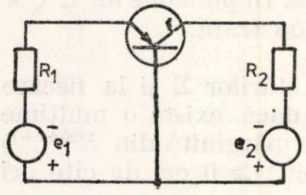


Fig. 4

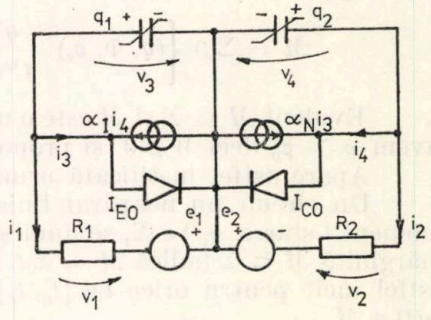


Fig. 5

Se consideră în planul (q_1, q_2) dreptele :

$$(\Delta_1)\ \frac{e_1}{R_1} + \frac{I_{ES}}{Q_{10}}q_1 - \frac{\alpha_I I_{CS}}{Q_{20}}q_2 = 0 \qquad (5)$$

$$(\Delta_2)\ \frac{e_2}{R_2} + \frac{I_{CS}}{Q_{20}}q_2 - \frac{\alpha_N I_{ES}}{Q_{10}}q_1 = 0$$

În regiunea haşurată Σ_1 din fig. 6 membrii întîi ai ecuațiilor (5) sînt pozitivi. Σ_1 poate fi interpretată ca un spațiu restrîns al stărilor circuitului. Din expresia anterioară a lui W rezultă :

$$\lim_{\substack{q_1^2 + q_2^2 \to \infty \\ (q_1, q_2) \in \Sigma_1}} W = +\infty$$

și deci W este pozitivă în afara unei regiuni mărginite, $M \subset \Sigma_1$. Semnul lui W este dificil de studiat într-un spațiu al stărilor care nu este inclus în Σ_1.

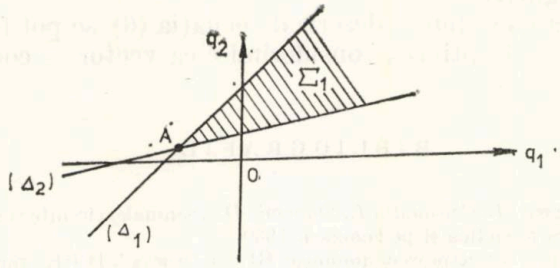


Fig. 6

Pentru un circuit liniar avem în general :

$$\dot{q} = Aq + Be, \tag{6}$$

cu A, B matrice de tip $n \times n$ respectiv $n \times m$, q fiind un vector coloană n — dimensional și e un vector coloană m — dimensional. Se presupune că energia din elementele de memorie ale circuitului liniar considerat este o formă pătratică de tipul produs scalar euclidian :

$E = \langle Cq, q \rangle$, unde C este o matrice pătratică simetrică de ordinul n. Atunci :

$$E = (Cq)^t q = {}^t q^t C q = {}^t q C q$$

$$\dot{E} = {}^t\dot{q} C q + {}^t q C \dot{q} = {}^t q({}^t A C + CA)\, q + {}^t e^t B C q + {}^t q C B e$$

Matricea $D = {}^t A C + CA$ este evident simetrică și printr-o transformare liniară ortogonală $q \to \tilde{q}$ poate fi diagonalizată. Fie $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ valorile proprii ale matricii D (desigur reale).

Deci, în coordonatele $\tilde{q}_1 \ldots \tilde{q}_n$ avem :

$$\dot{E} = \lambda_1 \tilde{q}_1^2 + \ldots + \lambda_n \tilde{q}_n^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i \tilde{q}_i \quad \text{cu } b_i \text{ constante reale.}$$

Din această discuție rezultă următorul rezultat general :

PROPOZIȚIA. 2 Dacă toate valorile proprii $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ale matricii ${}^t A C + CA$ sînt negative, atunci sistemul considerat este aproape pasiv.

Într-adevăr, în acest caz $W = -\lambda_1 \tilde{q}_1^2 - \ldots - \lambda_n \tilde{q}_n^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i \tilde{q}_i$ și notînd $\tilde{q} = (\tilde{q}_1 \ldots \tilde{q}_n) \in \mathbf{R}^n$ se observă că

$$\lim_{\|\tilde{q}\| \to \infty} W = +\infty$$

deci există $M > 0$ astfel încît de îndată ce $\|\tilde{q}\| > M$ avem $W > 0$.

Dacă A, C sînt matrici pătratice și C simetrică, se pune problema indicării unor condiții ca matricea simetrică ${}^tAC + CA$ să aibă toate valorile proprii negative.

În legătură cu sistemul descris de ecuația (6) se pot formula și unele probleme de control optimal, considerînd e ca vector — comandă.

BIBLIOGRAFIE

1. *Cartianu Gh., Săvescu M., Constantin I., Stanomir D.* „Semnale, circuite și sisteme", București, Editura didactică și pedagogică, 1980.
2. *Ch. Desoer, F. Wu,* „Trajectories of nonlinear RLC networks", IEEE Trans. on circuit theory, vol. CT19, $N_0 = 6$, 562–571, 1972.
3. *Mateescu Ad.,* „Analiza și sinteza circuitelor electrice", București, Editura didactică și pedagogică, 1975.
4. *Matsumoto T.,* „On several geometric aspects of nonlinear networks", J. Franklin Institute, vol. 301, $N_0 = 1$, 203–225, 1978.
5. *Stănășilă O.,* „Analiză matematică", București, Editura didactică și pedagogică, 1981.

On Some Geometrical Methods in the Study of Electrical Circuits

This work is based on the idea that the states of an electric circuit can be assimilated to the points of a differentiable manifold. The geometric language is a new method and a new point of view in the study of some circuits. In this context some problems connected with the extension of the notion of passivity can be formulated.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

FIZICĂ

C.Z.: 536.44 · 538.114

ON THE PARAMETERS OF THE CORRELATIONS DESCRIBING THE TEMPERATURE DEPENDENCE OF THE PERMEABILITY OF THE FERRIMAGNETIC MATERIALS IN THE PHASE TRANSITION ZONE

LUMINIȚA DANIELLO, D. IORDACHE, I. M. POPESCU, LILIANA POPA, VL. IANCU, RODICA PAPADOPOL*

This work studies the validity domains and the relations between the parameters of the different correlations which describe the temperature dependence of the susceptibility of the ferrimagnetic materials, in the phase transition zone. The importance of the parabolic correlation $\frac{1}{\chi} = f(T)$ for the estimation of the parameters x_A, x_B, C_m of the Kittel and Néel correlations, and the possibility of the description of the $\frac{1}{\chi} = f(T)$ dependence by a linear combination (with normalized at unity weights) of the expressions given by the Domb-Fisher and Néel correlations, are also evidenced. There is indicated a possible interpretation of this last result, based on the hypothesis of the proportionality of the inverse of the magnetic susceptibility with the undetermination degree corresponding to the statistical collective associated to the orientations of the electronic spins under the action of an external magnetic field.

Introduction

It is well known that the temperature dependence of the ferrimagnetic susceptibility is satisfactorily described by the Néel correlation [1] in the temperature zone above the Curie point, and by the Domb-Fischer correlation [2], [3], in the temperature zone between the Hopkinson and the Curie point. For various portions of the phase transition zone, there are reported also other applicable correlations, like the Curie-Kittel correlation [4] or the Curie-Weiss type (linear) correlation, but we have no knowledge of a detailed analysis of the relationships between the different $\frac{1}{\chi} = f(T)$ correlations.

Manuscript received 1 October 1981

* Lect. Ph. D.; Conf.. Ph. D.; Prof. Ph. D.; Assist.; Assist., Physics Department of the Polytechnic Institute of Bucharest; Autom. Eng., Comput. Center Chem. Ind., Bucharest.

The aim of the present work is to study the relationships between the specified correlations, the accent being put on the relations between their specific parameters.

1. The Néel correlation and some of the its approximate expressions

We denote by ν_{AA}, ν_{BB} the spin interaction parameters for the A and B ferrimagnetic sublattices, respectively. When these parameters are negligible in respect to the spin interaction parameter between the two sublattices $\gamma_{AB}\left(\gamma = |\nu_{AB}|\,;\ \alpha = \frac{1}{\gamma}\cdot\nu_{AA},\ \beta = \frac{1}{\gamma}\cdot\nu_{BB} \ll 1\right)$, the Néel correlation :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T}{C_m} + \frac{1}{\chi_0} - \frac{\sigma}{T-\theta_1}, \tag{1}$$

where :

$$\frac{1}{\chi_0} = \gamma(2x_Ax_B - \alpha x_A^2 - \beta x_B^2), \quad \theta_1 = \gamma C_m x_A x_B(2+\alpha+\beta), \tag{2}$$

$$\sigma = \gamma^2 C_m x_A x_B[x_A(1+\alpha) - x_B(1+\beta)]^2, \tag{3}$$

becomes :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T^2 - \gamma^2 C_A C_B}{C_m T - 2\gamma C_A C_B}. \tag{4}$$

Here the C_A and C_B constants, corresponding to the two sublattices, are determined by the molecular field constant C_m and the fractions of magnetic ions in the two sublattices, x_A and x_B according to the following relations :

$$C_A = C_m \cdot x_A, \quad C_B = C_m \cdot x_B. \tag{5}$$

For the temperature zone $T \in (T_c = \gamma\sqrt{C_A C_B},\ 2T_c(1-\sqrt{x_A x_B}))$, equation (4) can be simplified by a power series development in respect to the subunitary parameter $\frac{T-T_c}{(1-2\sqrt{x_Ax_B})\,T_c}$:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2T_c}{C_m}\left[\frac{T-T_c}{T_c(1-2\sqrt{x_Ax_B})}\right] - \frac{T_c + 2\gamma C_m x_A x_B}{C_m}\left[\frac{T-T_c}{T_c(1-2\sqrt{x_Ax_B})}\right]^2 + \cdots \tag{6}$$

For the temperature zone where T satisfies the condition $T - T_c \ll \ll T_c\,(1-2\sqrt{x_Ax_B})$, equation (6) reduces to a correlation of the Curie-Weiss type :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2(T-T_c)}{C_m(1-2\sqrt{x_Ax_C})}. \tag{7}$$

We found therefore that the molecular field constants C_{mK}, C_{mN} corresponding to the Curie-Kittel correlation and to the Curie-Weiss type (linear) correlation (7), respectively, are connected by the relation:

$$C_{mW} = C_{mK}(0.5 - \sqrt{x_A x_B}). \tag{8}$$

For the temperatures above the Curie point, which satisfy the condition: $(T - T_c)^2 \ll T_c^2(1 - 2\sqrt{x_A x_B})^2$, equation (6) becomes:

$$\frac{1}{\chi} = 2A(T - T_c) - B(T - T_c)^2, \tag{9}$$

where:

$$A = \frac{1}{C_{mK}(1 - 2\sqrt{x_A x_B})} = \frac{1}{2C_{mW}}, \qquad B = \frac{1+2\sqrt{x_A x_B}}{C_{mK} T_c (1 - 2\sqrt{x_A x_B})^2}. \tag{10}$$

The parabolic correlation (9) is the simplest $\frac{1}{\chi} = f(T)$ correlation which allows a evaluation — into a zero-order approximation — of the fractions x_A and x_B of magnetic ions, and of the molecular field constant C_{mK}, using the A, B and T_c parameters which can be derived by fitting from experimental data (for example, by the gradient method [5]):

$$x_{A,B} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{A \cdot B \cdot T_c}}{A + B \cdot T_c}, \qquad C_{mK} = \frac{A + B \cdot T_c}{2A^2}. \tag{11}$$

2. Experimental results concerning some spinelic ferrimagnetic materials of the type Mn—Zn 1000. Interpretation

In order to determine experimentally the temperature dependence of the susceptibility of certain ferrimagnetic materials, we have used the RLC bridge method, as it was described in the papers [6], [7], the ferrimagnetic sample being introduced into a laboratory furnace providing temperatures up to 600°C. The experimental determinations were effected in stabilized thermic regime, the maximum value allowed for the speed of the temperature variation being of about 10^{-2} K.s^{-1}.

We have studied the experimental characteristic $\chi = f(T)$ of a $Fe_{1.062}Mn_{0.328}Zn_{0.141}O_4$ material, starting from that temperature* to which the ferrimagnetic susceptibility attains a maximum value (the Hopkinson effect [8]). It has been found that the plots $\frac{1}{\chi} = f(T)$ present a positive curvature in the proximity of the Hopkinson temperature and a negative

* This temperature will be subsequently referred as the Hopkinson temperature (symbol T_H).

curvature for higher temperatures. Between these two domains, there is a rather wide domain characterized by a practically linear $\frac{1}{\chi} = f(T)$ dependence (fig. 1.).

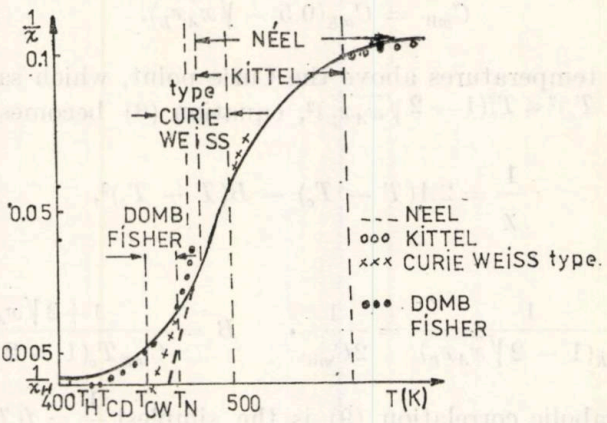


Fig. 1. The validity domains of the main $\frac{1}{\chi} = f(T)$ correlations, in the phase transition zone, for the spinelic ferrimagnetic material $Fe_{1.062}Mn_{0.328}Zn_{0.141}O_4$

Since the curvature of the Néel's correlation (1) is negative, and that of the Domb-Fisher correlation :

$$\frac{1}{\chi} = b(T - T_c)^n \tag{12}$$

(deduced — with values of the exponent n situated between 1.25 and 1.75 — in the hypothesis of the preponderance of the closed neighbour interactions of the electronic spins) is positive, it results that the first part of the experimental curve would be described by the Domb-Fisher correlation, and the second part by the Néel's correlation.

3. Numerical values obtained for the parameters of some polynomial correlations $\frac{1}{\chi} = f(T)$. Possibilities of describing the $\frac{1}{\chi} = f(T)$ dependence in the whole temperature range above the Hopkinson point

Using the regression line method for the linear part of the experimental curve, the Curie -Weiss type correlation parameters have been determined for different samples of the studied Mn—Zn ferrimagnetic material : $T_{cW} = 189 \pm 1°C$, $C_{mW} = 214 \pm 2$ K. Starting from these results, the zero-order approximation values of the parabolic correlation parameters :

$$A^{(0)} = \frac{1}{2C_{mW}}, \quad B^{(0)} = 0, \quad T_{cp}^{(0)} = T_{cW}, \tag{13}$$

have been calculated, then — using the gradient method [5] — the parabolic correlation parameters have been fitted. They are : $A = (2.44 \pm \pm 0.02) \cdot 10^{-3}$ K^{-1}, $B = (5.85 \pm 0.05) \cdot 10^{-5} K^{-2}$, $T_{cp} = 188 \pm 1°C$.

From Eq. (11), the zero-order approximation of the Néel correlation parameters have been found : $x_A^{(0)} = 0.77$, $x_B^{(0)} = 0.23$, $C_{mK}^{(0)} = 2461$ K.

One can notice the difference between the values of the parameters corresponding to the different $\frac{1}{\chi} = gf(T)$ correlations, especially the difference of the magnitude order of the molecular field constants C_{mK}, C_{mW} corresponding to the Kittel, respectively to the Curie-Weiss type correlation (due to their different physical significations). Also, one finds that the Curie temperature, defined as a correlation parameter, has different values ($T_{cp} \cong T_{cW} - 1$ K in the present case).

The temperature ranges in which the accuracy of the susceptibility description by a certain $\frac{1}{\chi} = f(T)$ correlation is better or at least equal with the experimental one (estimated at about 2% for our installation, using the Tesla BM—401 E bridge) have been obtained by an analysis of the experimental data. Due to the difference between the values of the Curie temperature corresponding to the different correlations, we prefer to use the Hopkinson temperature in order to describe these domains. We indicate below the determined values (for different toroidal samples of the studied Mn—Zn material) of the differences ΔT_H between the center of the validity domains of each $\frac{1}{\chi} = f(T)$ correlation and the Hopkinson temperature, and also the amplitudes δT of the same validity domains : the Domb-Fisher correlation ($\Delta T_H = 4 \ldots 5$K; $\delta T = 2.5 \ldots 3.5$ K)*, the Curie-Weiss type (linear) correlation ($\Delta T_H = 11 \ldots 13$K; $\delta T = 9 \ldots \ldots 14$ K), parabolic correlation ($\Delta T_H = 19 \ldots 25$ K; $\delta T = 11 \ldots 16$ K), Kittel correlation ($\Delta T_H = 24 \ldots 34$ K; $\delta T = 20 \ldots 41$ K), Néel correlation ($T - T_H > 10 \ldots 15$ K).

The effected analysis have shown that the functional expression describing the $\chi = f(T)$ dependence in the whole domain of the temperatures above the Hopkinson point is :

$$\frac{1}{\chi(T)} = \frac{1}{\chi_H} + p(T) \cdot a(T - T_H)^b + q(T) \left(\frac{1}{\chi_0} + \frac{T}{C_m} - \frac{\sigma}{T - \theta_1} \right), \quad (14)$$

where :

$$p(T) + q(T) = 1, \quad \lim_{T \to T_H} p(T) = 1, \quad p\left(T : \frac{T - T_H}{\delta T_{DF}} \gg 1 \right) = 0, \quad (15)$$

δT_{DF} being the amplitude of the validity domain corresponding to the Domb-Fisher correlation.

* In order to join the correlations of Domb-Fisher and Curie-Weiss type, the corresponding parameters must satisfy the inequality :

$$b.n. \left(\frac{\Delta T_H + \delta T}{2} \right)^{n-1} < \frac{1}{C_{mW}}.$$

The Eq. (14), (15) can be theoretically justified in the hypotheses:

a) The magnetic susceptibility is inverse proportional with the undetermination degree corresponding to the statistical collective C, whose events consist of the parallel orientation (in relation to a certain applied magnetic field $\overline{H}$) of i spins from the total number N of spins, implying [10], [5]:

$$\frac{1}{\chi} \sim H(C, C') = H(C') + \sum_{j=1}^{2} p'_j \cdot H(C) | E'_j), \tag{16}$$

where $p'_j (j = 1, 2)$ are the probabilities of the achievement of the short distance coupling (Ising-Heisenberg), respectively of the long distance coupling between electronic spins (events grouped in the statistical collective C'),

b) The probabilities p'_1, p'_2 of the achievement of these two coupling types are dependent on temperature.

Supposing that the variation dp'_1 of the probability of the short distance coupling (therefore, of the corresponding weight $p(T)$, too) associated to the variation dT of the work temperature, is proportional with the difference $1 - p^n$, and with the variation of the inverse of the difference between the work temperature and the Hopkinson temperature:

$$dp = A(1 - p^n)\, d\left(\frac{1}{T - T_H}\right), \tag{17}$$

one can find for $n = 1$, respectively for $n = 2$, the following expressions for the weight $p(T)$:

$$p(T) = 1 - \exp\left(-\frac{A}{T - T_H}\right),$$

$$\text{respectively } p(T) = th\left(\frac{A}{T - T_H}\right). \tag{18}$$

The comparison of the values of the ferrimagnetic susceptibility calculated using the experimental results has lead to the conclusion that these relation types can satisfactorily describe the dependence $\frac{1}{\chi} = f(T)$ in limits considerably more wide than the classical correlations before quoted.

Conclusions

The accomplished study has evidenced the following conclusions:

1) The classical correlations $\frac{1}{\chi} = f(T)$ (Domb-Fisher, Néel, Kittel, of the Curie-Weiss (linear) type, etc.) have proper validity domains

and different values of the common parameters (the Curie temperature *, the molecular field constant, etc.); for these reasons, the knowledge of the proper validity domains and of the relations between the parameters of of the different $\frac{1}{\chi} = f(T)$ correlations, present a great interest;

2) The parabolic correlation $\frac{1}{\chi} = f(T)$ obtained by the series development of the Kittel correlation, presents a particular interest, because it is the simplest correlation which permits the correct estimation of the Kittel and Néel molecular field constants, and of the parameters x_A, x_B, which are involved in these correlations. In order to verify the signification attributed to these parameters (fractions of magnetic ions in the two ferrimagnetic sublattices), some corroborated studies of this type with the experimental results of the X-ray, electronic or neutron diffraction are necessary;

3) By means of a combination, with normalized at unity weights (unity normalized weights), of the expressions of the correlations of the Domb-Fisher and Néel types, the obtainment of some $\frac{1}{\chi} = f(T)$ expressions, which describe satisfactorily the experimental results in a temperature domain considerably more wide (above the Hopkinson point) than that of the classical correlations, is possible. The expressions of this type can be theoretically justified in the hypothesis of the proportionality of the inverse of the magnetic susceptibility with the undetermination degree associated to the statistical collective corresponding to the different orientations — in magnetic field — of the electronic spins.

Since some experimental dependences $\frac{1}{\chi} = f(tT)$ of the type of those established in this work for the studied Mn—Zn 1000 ferrimagnetic material (fig. 1), have been reported [11], [12] for various substances of different nature, it seems that the validity of the conclusions of this work is considerably more wide (than for the spinelic ferrimagnetic materials, only).

REFERENCES

1. *L. Néel*, Ann. de Phys., 3, 137 (1948).
2. a) *C. Domb, M. F. Sykes*, Proc. Roy. Soc., A, 240, 214 (1957); b) ibid., J. Math. Phys., 2, 63 (1961); c) ibid., Phys. Rev., 128, 168 (1962).
3. *M. E. Fisher*, Physica, 25, 521 (1959).
4. *Ch. Kittel* „Introduction to Solid State Physics", J. Wiley&Sons, New York, 1971, chap. 16.
5. *D. Iordache* „Noțiuni și metode generale ale fizicii", Polytechn. Inst. Bucharest, 1980.
6. D. *Iordache, L. Daniello, M. Stan, I. Belciu*, Bull. Pol. Inst. Bucharest, 39, 33 (1977).
7. *L. Daniello, D. Iordache, I. M. Popescu, I. Socol, D. Popescu*, Rev. Roum., Phys,. 25, 193 (1980).
8. a) *W. Döring*, Zs. Phys., 124, 501 (1947); b). M. Kersten, Zs. angew. Phys., 8, 382 (1956).
9. *L. Daniello, Ph. D. Thesis*, I.F.T.A.R. — Bucharest, 1980.

* In fact, this is a true correlation parameter.

10. a) *C. E. Shannon*, Bell System Techn. Journ., 27, 379, 623 (1948); b) ibid., 30, 50 (1951); c) *A. I. Hintchin*, Roum. Sow. Ann., Math. Phys. S., 7, 23 (1954); d) ibid., techn. s., nr. 69—70, 440 (1959).
11. *M. Fallot, F. Maroni*, Journ. Phys. Rad., 12, 256 (1951).
12. *I. Pop, I. Cosma*, Zs. angew. Physik, 32, 250 (1971).

Asupra parametrilor corelațiilor care descriu dependența de temperatură a permeabilității materialelor ferimagnetice în zona tranziției de fază

Lucrarea de față studiază domeniile de valabilitate și raporturile dintre parametrii diferitelor corelații care descriu dependența de temperatură a susceptivității materialelor ferimagnetice. Se evidențiază de asemenea însemnătatea corelației parabolice $1/\chi=f(T)$ pentru evaluarea parametrilor x_A, x_B, C_m ai corelațiilor Kittel și Néel, precum și posibilitatea descrierii dependenței $1/\chi=f(T)$ printr-o combinație liniară (cu ponderi normate la unitate) a expresiilor date de corelațiile Domb-Fisher și Néel. Se constată posibilitatea interpretării acestui ultim rezultat, pe baza ipotezei proporționalității inversului susceptivității magnetice cu gradul de nedeterminare corespunzînd colectivului statistic asociat orientărilor spinilor electronici sub acțiunea unui cîmp magnetic extern.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

ELECTROTEHNICĂ

C.Z. : 621.3.043
538.3./5

INFLUENȚA NEUNIFORMITĂȚII ÎNTREFIERULUI ASUPRA DETERMINĂRII INDUCȚIEI MAGNETICE REZULTANTE, LA UN CUPLAJ CU CURENȚI TURBIONARI ÎN CONSTRUCȚIA CU POLI APARENȚI

Partea I

GABRIELA SPINEANU*

Se determină inducția magnetică rezultantă în indusul unui cuplaj cu curenți turbionari, în construcția cu poli aparenți, ținîndu-se seama de neuniformitatea întrefierului.

Se calculează densitatea curenților turbionari din indus.

Se pune în evidență influența întrefierului, prin influența permeanței acestuia asupra armonicii de ordinul „n" a componentei inducției magnetice datorită curenților turbionari.

Introducere

Cuplajele cu curenți turbionari, reprezentate schematic în fig. 1, prezintă două părți constructive principale :

— inductorul care este prevăzut cu poli pe care se află dispusă o înfășurare de excitație sau care este un magnet permanent ;

— indusul în care circulă curenți turbionari provenind din mișcarea relativă a acestuia în raport cu inductorul.

Interacțiunea dintre curenții turbionari și cîmpul de inducție, produce un cuplu mecanic transmis la arborele de ieșire al cuplajului.

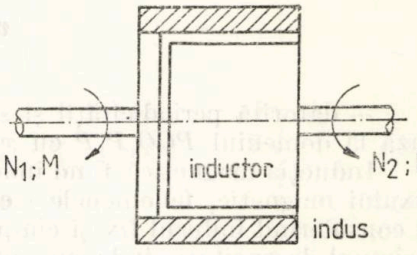


Fig. 1 — Schema de principiu a unui cuplaj cu curenți turbionari.

2. Formularea problemei

Se consideră un model bidimensional în planul xOz ; lățimea sistemului în direcția axei Oy se consideră infinită [5].

Cîmpul inducției magnetice rezultante în indus se determină ținînd cont de următoarele ipoteze simplificatoare :

Manuscris primit la data de 24 octombrie 1981
* Asistent ing. Catedra Electrotehnică I

— materialul indusului este izotrop și omogen, avînd caracteristica de magnetizare $\bar{B} = \bar{B}(\bar{H})$ și rezistivitatea electrică ρ constantă:

— permeabilitatea magnetică se consideră constantă și se denumește „permeabilitate magnetică de calcul" μ_c.

— se neglijează fenomenul de histerezis;

— inducția magnetică de excitație la suprafața indusului este cea determinată în [5], pentru $\mu = \infty$.

— grosimea indusului este suficient de mare pentru ca la $z > h$, cîmpul inducției magnetice să fie nul.

— fenomenele ce iau naștere în indus sînt dependente de viteza relativă $v = v_2 - v_1$, v_2 fiind viteza undei învîrtitoare de cîmp magnetic produsă de inductor.

— se raportează față de pasul polar τ considerat ca mărime de referință, următoarele mărimi:

coordonatele unui punct din indus

$$x' = x/\tau; \quad z' = z/\tau$$

coordonatele unui punct de pe inductor

$$x'_0 = x_0/\tau; \quad z'_0 = z_0/\tau$$

lățimea relativă a polului

$$g_1 = \frac{2a}{\tau}$$

grosimea relativă a indusului

$$g_3 = \frac{h}{\tau}$$

viteza relativă dintre inductor și indus

$$v' = \frac{v}{\tau}$$

— datorită periodicității și simetriei domeniului de studiu se limitează la domeniul PQQ_1P_1P cu $x \in [-\tau/2, \tau/2]$, (fig. 2).

Inducția magnetică fiind independentă de cauzele ce produc variația fluxului magnetic, fenomenele electromagnetice în indus pot fi studiate fie considerînd indusul fix și cîmpul de excitație mobil, fie indusul mobil și cîmpul de excitație independent de timp.

Se consideră axele de coordonate solidare cu indusul.

Ecuațiile de prim ordin ale cîmpului electromagnetic cuasistaționar în indus sînt:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} \tag{2}$$

Ecuația de ordinul doi pe care o satisface inducția magnetică va fi:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\bar{B}}{\mu}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}=0 \tag{3}$$

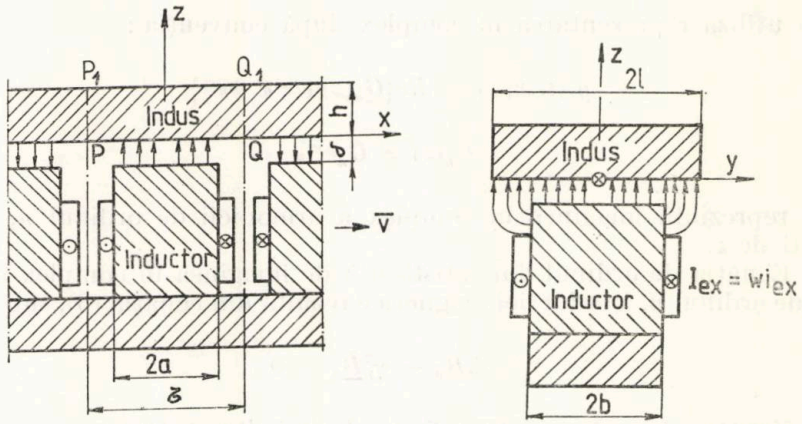


Fig. 2 — Sistemul fizic considerat în studiu.

Dacă sistemul de coordonate este solidar cu inductorul, indusul mișcîndu-se cu viteza $\bar{v}^* = -\bar{v}$, urmînd aceeași cale se obține:

$$\operatorname{rot}\bar{E}=\operatorname{rot}(\bar{v}^*\times\bar{B}) \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\bar{H}=\bar{J} \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\bar{B}}{\mu}=-\frac{1}{\rho}(\bar{v}^*\,\nabla)\,\bar{B} \tag{6}$$

Presupunînd că $\bar{J}_1=\bar{j}J$, se găsește:

$$\operatorname{rot}\bar{J}=\frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(\bar{v}^*\times\bar{B}) \tag{7}$$

$$\operatorname{rot}\frac{\bar{B}}{\mu}=\bar{j}\frac{\bar{v}}{\rho}B_z \tag{8}$$

Deoarece inducția magnetică de excitație la suprafața indusului, determinată în [5], este nesinusoidală:

$$B_{0z}=B_0\sum_n C_{0n}\cos(\omega_n t-\alpha_n x) \tag{9}$$

$$\text{cu}\quad \alpha_n=n\alpha;\quad \alpha=\frac{\pi}{\tau};\quad \omega_n=n\omega;\quad \omega=\alpha v,$$

se vor căuta numai soluții dezvoltate în serie Fourier.

Componentele scalare ale vectorilor cîmp fiind de forma :

$$g(t, x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t, x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, G_n(z) \cos(\omega_n t - \alpha_n x) \tag{10}$$

se va utiliza reprezentarea în complex după convenţia :

$$g_n(t, x, z) = Re\{\underline{G}_n(z)\, e^{j(\omega_n t - \alpha_n x)}\} \tag{11}$$

$$G_n(z) = G_n e^{j\varphi_n}$$

$\underline{G}_n(z)$ reprezintă imaginea în complex a armonicii de ordinul n, funcţie numai de z.

Ecuaţia de ordinul doi satisfăcută de imaginea în complex a armonicii de ordinul n, a inducţiei magnetice rezultă din ecuaţia (3), sub forma :

$$\Delta \underline{\bar{B}}_n - \gamma_n^2 \underline{\bar{B}}_n = 0 \tag{12}$$

Ecuaţia (12) este o ecuaţie de tip Helmholtz, în care :

$$\Delta \underline{\bar{B}}_n = \frac{d^2 \underline{\bar{B}}_n}{dz^2}$$

$$\underline{\bar{B}}_n = \bar{i} \underline{B}_{xn} + \bar{k} \underline{B}_{zn}$$

$$\gamma_n^2 = \alpha_n^2 + j\lambda_n^2 ; \quad \lambda_n^2 = n\omega \frac{\mu_c}{\rho} ; \quad \alpha_n^2 = (n\alpha)^2 ;$$

Modelul matematic pentru armonica de ordinul „n" a componentei $\underline{B}_z$ este dat de relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \underline{B}_{zn}}{dz^2} - \gamma_n^2 \underline{B}_{zn} = 0 \\ &\underline{B}_{zn} = \underline{C}_n = C_n e^{-j\varphi_n} \quad \text{pentru } z = 0 \\ &\underline{B}_{zn} = 0 \quad \text{pentru } z = h \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Armonica de ordinul „n" a componentei B_x rezultă din rezolvarea ecuaţiilor :

$$\operatorname{div} \underline{\bar{B}}_n = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial b_{zn}}{\partial z} + \frac{\partial b_{xn}}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

$$\underline{B}_{xn} = \frac{1}{j\alpha_n} \cdot \frac{d\underline{B}_{zn}}{dz} \tag{16}$$

3. Determinarea inducției magnetice rezultate în indus

Soluția generală a ecuației (13) este :

$$\underline{B}_{zn}(z) = \underline{C}_{1n}\mathrm{sh}\gamma_n(h - z) + \underline{C}_{2n}\mathrm{ch}\gamma_n(h - z) \tag{17}$$

Utilizînd mărimile raportate :

$$\lambda_n'^2 = \frac{\lambda_n^2}{\alpha_n^2} = \frac{\mu_c V \tau}{\pi n \rho} \tag{18}$$

$$\gamma_n' = \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = q_n + j\xi_n = |\gamma_n'|e^{j\psi_n} = \sqrt{1 + j\lambda_n'^2}, \tag{19}$$

se deduce :

$$q_n = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \lambda_n'^4}}{2}}; \qquad \xi_n = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda_n'^4}}{2}} \tag{20}$$

Se vede că $\lambda_n'^2$ scade odată cu creșterea ordinului armonicii :.
Folosind condițiile date de (13), soluția descrisă de (17), capătă forma :

$$\underline{B}_{zn} = \underline{C}_n \frac{\mathrm{sh}\pi n\gamma_n'(g_3 - z')}{\mathrm{sh}\,\pi n\gamma_n' g_3} \tag{21}$$

În conformitate cu (11), partea reală a relației (21) este

$$B_{zn}(t, x', z') = C_n Z_{zn}(z') \cos[\pi n(v't - x') - \varphi_n - \Theta_{zn}] \tag{22}$$

În raport cu sistemul de axe solidar cu inductorul :

$$B_{zn}(x' z') = C_n Z_{zn}(z') \cos(\pi n x_0' + \varphi_n + \Theta_{zn}) \tag{23}$$

$$\Theta_{zn} = \Theta_{zn}'' - \Theta_{zn}'; \quad \mathrm{tg}\,\Theta_{zn}' = \frac{\mathrm{tg}\,\pi n \xi_n(g_3 - z')}{\mathrm{th}\,\pi n q_n(g_3 - z')} \tag{24}$$

$$\mathrm{tg}\,\Theta_{zn}'' = \frac{\mathrm{tg}\,\pi n \xi_n g_3}{\mathrm{th}\,\pi n q_n g_3} \tag{25}$$

Dacă $q_n g_3 \gg 1$, relațiile precedente se simplifică :

$$\Theta_{zn}(z') = \pi n \xi_n z' \tag{26}$$

Armonica de ordinul n a componentei B_{xn} se obține cu ajutorul relației (16) :

$$\underline{B}_{xn} = j\underline{C}_n\gamma_n' \frac{\mathrm{ch}\,\pi n\gamma_n'(g_3 - z')}{\mathrm{sh}\,\pi n\gamma_n' g_3} \tag{27}$$

Partea reală este :

$$B_{xn}(t, x', z') = -C_n|\underline{\gamma}'_n|Z_{zn}(z')\sin[\pi n(v't - x') - \varphi_n + \psi_n - \Theta_{xn}] \quad (28)$$

În rapot cu sistemul de axe solidar cu inductorul :

$$B_{xn}(x', z') = C_n|\underline{\gamma}'_n|Z_{zn}(z')\sin[\pi n x' + \varphi_n - \psi_n + \Theta_{xn}] \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_{xn} = \Theta''_{xn} - \Theta'_{xn}\,; \quad \Theta''_{xn} = \Theta''_{zn}\,; \\ &\operatorname{tg}\Theta'_{xn} = \operatorname{th}\pi n q_n(g_3 - z')\operatorname{tg}\pi n\xi_n(g_3 - z') \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Valoarea relativă a densităţii de curent J' va fi :

$$J'(x, z') = \tau J(x', z') = \frac{\pi n \lambda'^2_n}{\mu_c} B_z(x', z') \quad (31)$$

Soluţia cîmpului stabilită anterior va fi complet determinată prin găsirea constantelor complexe $\underline{C}_n$.

4. Luarea în considerare a neuniformităţii întrefierului

Determinarea inducţiei magnetice rezultate în indus, se va face ţinînd cont de întrefierul neuniform al cuplajului.

Datorită linearizării de studiat, inducţia magnetică la suprafaţa indusului poate fi considerată ca superpoziţia inducţiei B_{0z} şi a celei datorată curenţilor turbionari :

$$B_z(x', 0) = B_{0z}(x', 0) + B_{tz}(x', 0) \quad (32)$$

Se consideră $I_s(x')$ densitatea pînzei curenţilor turbionari la suprafaţa indusului şi $\Lambda'(x')$ permeanţa relativă a întrefierului :

$$\Lambda'(x') = \frac{\Lambda(x')}{\Lambda(0)}; \qquad \Lambda(0) = \Lambda_0 = \frac{\mu_0}{2\delta} \quad (33)$$

Atunci, inducţia B_{tz} are ca expresie :

$$B_{tz}(x', 0) = I_s(x')\,\Lambda'(x')\,\Lambda_0 \quad (34)$$

$I_s(x')$ poate fi descompusă în serie Fourier, fie aceasta :

$$I_s(x') = \sum_n (I_{dn}\cos\pi n x' + I_{tn}\sin\pi n x'), \quad (35)$$

I_{dn} şi I_{tn} sînt componente longitudinale şi transversale ale lui I_n.

Permeanța $\Lambda'(x')$ pentru întrefierul cazului tratat, figura 3, este :

$$\Lambda'(x') = \begin{cases} 1 \text{ pentru} & -0{,}5\, g_1 \leqslant x' \leqslant 0{,}5\, g_1 \\ 0 \text{ pentru} & 0{,}5\, g_1 < |x'| \leqslant 0{,}5 \end{cases} \tag{36}$$

are dezvoltată în seria Fourier devine :

$$\Lambda'(x') = g_1 + \sum_{m=2,4,\ldots} \frac{4}{\pi m} \sin \frac{\pi m g_1}{2} \cos \pi n x' \tag{37}$$

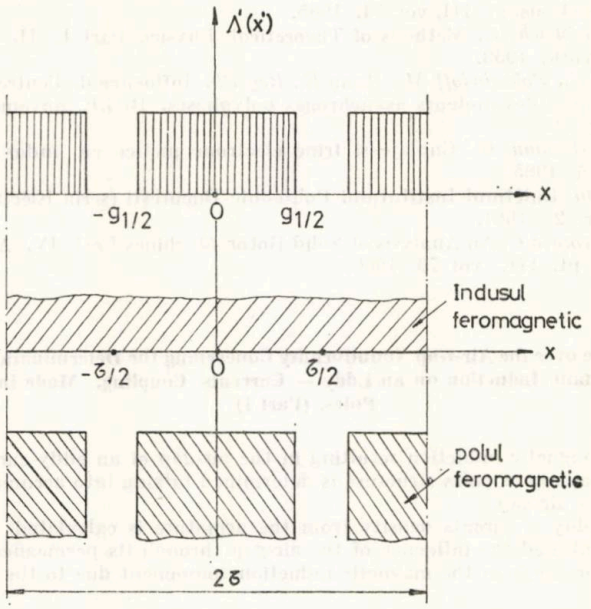


Fig. 3 — Permeanța întrefierului.

Influența permeanței $\Lambda'(x')$ asupra armonicei de ordinul „n" a lui B_{tz}(34), este pusă în evidență prin coeficienții K_{an} și K_{tn} corespunzînd lui I_{an} și I_{tn}.

Rezultă deci :

$$B_{tz} = \Lambda_0(K_{an} I_{an} \cos \pi n x' + K_{tn} I_{tn} \sin \pi n x') =$$
$$= \Lambda'(x')\, \Lambda_0(I_{an} \cos \pi n x' + I_{tn} \sin \pi n x') \tag{38}$$

S-au notat cu K_a și K_t coeficienții de reacție longitudinală și transversală.

Valorile acestora vor fi determinate ulterior.

Concluzii

Determinarea inducției magnetice rezultante în indusul cuplajului cu curenți turbionari, în construcția cu poli aparenți s-a făcut ținîndu-se seama de permeanța întrefierului.

Valorile acesteia, date de relația (36), se referă la un tip de cuplaj dat. După determinarea coeficienților de reacția longitudinală și transversală, ce intervin în (38), se va trece la stabilirea constantelor de integrare $\underline{C}_n$ și astfel soluția cîmpului, stabilită prin relațiile (23), (29), va fi complet determinată.

BIBLIOGRAFIE

1. *Connel Mc. H.M., Sverdrup E.F.*, The Induction Machine with Solid Iron Rotor, A.I.E.E, Transactions, pt. III, vol. 74, 1965.
2. *Morse P. M., Feshbach H.*, Methods of Theoretical Physics -Part I, II, Mc. Graw, Hill, New York, 1953.
3. *Pelenc Y., Pillet E., Poloujadoff M., Remy E., Rey Ph.* Influence de l'entrefer sur les caractéristiques des moteurs asynchrones polyphasés, R.G.E. novembre 1966, tome 75, nr. 11.
4. *Pozdeev A. D., Rozman B.*, Cuplaje și frine electromagnetice cu indus masiv, Editura tehnică, 1965.
5. *Spineanu Gabriela*, Buletinul Institutului Politehnic București (seria Electrotehnică), tomul 43, nr. 2, 1981.
6. *Wood A. J., Concordia C.* An Analysis of Solid Rotor Machines Part IV, A.I.E.E. Transactions, pt. III., vol 79, 1960.

The Influence over the Air-Gap Nouniformity Concerning the Determination of Magnetical Resultant Induction on an Eddy — Currents Coupling, Made in Apparent Poles. (Part I)

The magnetic induction resulting in the air-gap of an eddy-currents coupling for an apparent poles structure is determined talking into account the uneveness of the air-gap.

The eddy — curents density from the armature is calculated.

It's outlined the influence of the air-gap through its permeance over the „n" order harmonyc of the magnetic induction component due to the eddy-currents.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z.: 627.316.91

CRITERII PRIVIND ALEGEREA SCHEMELOR DE PROTECȚIE ÎMPOTRIVA SUPRATENSIUNILOR ÎN STAȚIILE CONSTRUITE CU ECHIPAMENT CAPSULAT, IZOLAT CU SF_6

FL. IONESCU*

Lucrarea se ocupă la început de avantajele pe care le au stațiile construite cu echipament capsulat, izolat cu SF_6, prezentînd apoi problemele specifice și complexe legate de protecția lor împotriva supratensiunilor atmosferice. S-a elaborat pe baza metodei Bergeron un program de calcul scris în FORTRAN, care permite obținerea supratensiunilor maxime care apar în postul de transformare capsulat.

Cu ajutorul programului de calcul se verifică în ce condiții un post de transformare de 123 kV construit cu celule capsulate izolate cu SF_6, de fabricație românească poate fi protejat împotriva supratensiunilor atmosferice cu ajutorul descărcătoarelor convenționale DRVM—102.

În ultimii cinci ani, pe plan mondial, numărul stațiilor construite cu echipament capsulat izolat cu SF_6 a crescut considerabil. Dezvoltarea vertiginoasă a acestei tehnici se explică prin calitățile deosebite ale hexafluorurii de sulf: de mediu izolant și mediu bun de stingere a arcului electric. Chiar la presiunea atmosferică datorită electronegativității sale puternice are o rigiditate dielectrică de 2—3 ori mai mare decît a aerului, aceasta crescînd substanțial cu creșterea presiunii. Temperatura de disociere redusă și energia de legătură de mică valoare fac ca arcul electric care arde în SF_6 să posede o constantă de timp mai mică cu aproximativ două ordine de mărime decît a celui care arde în aer [1].

Stațiile construite cu echipament capsulat, ca urmare a proprietăților hexafluorurii de sulf, au numeroase avantaje față de cele clasice în aer, devenind cu atît mai economice cu cît tensiunea nominală este mai ridicată. Dintre acestea principalele sînt: spațiul redus ocupat, nivel scăzut al descărcărilor parțiale și ecranare electrică, protecție sigură oferită personalului, fiabilitate ridicată, timp scurt de montaj, întreținere ușoară, revizie rapidă și piese de schimb necesare puține [2, 4, 5]

1. Problema protecției stațiilor capsulate

Dacă în stațiile clasice în aer măsurile de protecție împotriva supratensiunilor atmosferice sînt concentrate asupra transformatoarelor de putere, descărcătoarele fiind montate în imediata lor apropiere, în cazul

Manuscris primit la data de 2 iunie 1978
* Șef lucrări dr. ing., Catedra Măsuri și aparate electrice

staţiilor cu echipament capsulat, problema protecţiei se modifică, în acest caz obiectele de protejat fiind nu numai transformatoarele ci şi echipamentul capsulat izolat cu SF_6, trebuind ca la nici unul dintre ele supratensiunile să nu depăşească nivelul de izolaţie.

Protecţia împotriva supratensiunilor atmosferice şi de comutaţie în staţiile construite cu celule izolate cu SF_6 se realizează cu ajutorul descărcătoarelor care pot fi convenţionale în aer sau înglobate (sub anvelopă metalică) în SF_6 [1, 2, 4, 5,].

Descărcătoarele convenţionale se conectează pe intrările din sau plecările în linia aeriană ale instalaţiei capsulate. Dacă legătura spre transformator se face în cablu (cu SF_6 sau cu ulei), descărcătoarele nu mai pot fi montate în imediata apropiere a transformatorului. Totuşi, datorită impedanţei caracteristice scăzute a echipamentului izolat cu SF_6 domeniul de protecţie al descărcătorului convenţional montat la intrarea în staţia capsulată este mai mare comparativ cu staţia clasică. Notînd cu Z_1 impedanţa liniei aeriene, cu Z_2 impedanţa echipamentului capsulat şi cu u_i unda incidentă de supratensiune (fig. 1), se obţine pentru unda refractată :

$$u_{r_2} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} u_i \tag{1a}$$

iar pentru unda reflectată :

$$u_{r_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} u_i \tag{1b}$$

De exemplu, cu $Z_1 = 450\Omega$ şi $Z_2 = 60\Omega$, $u_{r_2} = 0{,}2352\ u_i$, deci numai 23,52 % din semnalul incident pătrunde în staţie.

Avînd în vedere acest fapt, staţiile capsulate pot fi protejate pînă la o anumită lungime critică, rezultată din calcul, montînd în linia aeriană pe fiecare intrare în staţie, cîte un descărcător convenţional [2, 5].

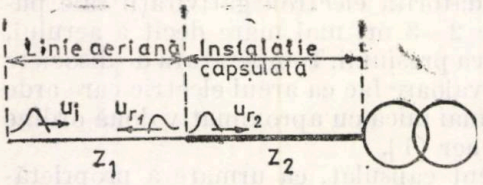


Fig. 1. Divizarea undei incidente u_i

Descărcătoarele înglobate se pot conecta în orice punct al staţiei : pe intrare, pe barele colectoare, pe plecarea spre transformator sau chiar la bornele lui, dacă legătura spre acesta s-a făcut în cablu cu SF_6. Datorită construcţiei compacte şi independenţei faţă de condiţiile atmosferice, descărcătoarele înglobate au performanţe superioare celor convenţionale, deci un domeniu de protecţie mai mare comparativ cu acestea. Totuşi realizarea unui descărcător înglobat pune probleme deosebit de dificile din punct de vedere tehnologic şi prin urmare preţul lui este mult mai mare decît al celui convenţional, fiind de acelaşi ordin de mărime cu al întreruptorului de putere.

Configuraţiile capsulate cu o mare lungime (staţii capsulate alimentate prin cablu sau cu plecări în cablu), nu mai pot fi protejate cu cîte un singur descărcător montat pe fiecare intrare şi apare necesitatea utilizării unei protecţii complementare. Protecţia complementară poate fi asigurată cu descărcătoare convenţionale sau înglobate. Dacă plecările spre

transformator sînt în linie aeriană, protecţia complementară se poate realiza montînd cîte un descărcător convenţional pe fiecare fază, în imediata apropiere a transformatorului. În cazul în care se utilizează drept protecţie complementară descărcătorul înglobat, acesta se montează într-un punct strategic pe barele colectoare, punct ales astfel încît supratensiunile maxime ce apar în staţie sau la transformator să fie minime.

2. Modelul matematic pentru calculul comportării schemei de protecţie a postului de transformare

Postul de transformare construit cu echipament capsulat, izolat cu SF_6 este configuraţia cea mai simplă şi totodată cea mai frecvent întîlnită în practică pentru care se pune problema protecţiei împotriva supratensiunilor.

Modelul matematic care a fost elaborat în vederea calculului comportării schemei de protecţie a postului de transformare are la bază metoda Bergeron [2, 3, 4, 5, 7]. Postul de transfromare poate fi considerat drept un circuit neramificat. În vederea simulării comportării protecţiei s-au stabilit relaţii de calcul pentru tensiuni şi curenţi în nodurile schemei şi s-a modelat matematic comportarea descărcătorului.

2.1. Calculul stării nodurilor neramificate.

În figura 2 este prezentat un circuit format din n laturi şi $n + 1$ noduri pentru care se cunosc : impedanţele caracteristice ale laturilor $Z(j)$, viteza de propagare a undelor pe ele v, lungimile liniilor $l(j)$ şi starea no-

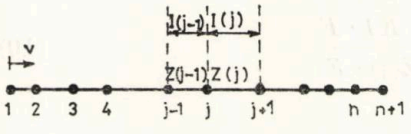


Fig. 2. Circuit neramificat

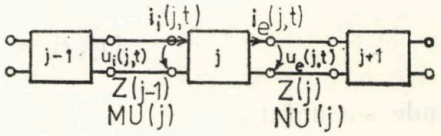


Fig. 3. Reprezentarea nodurilor neramificate

durilor (curenţi şi tensiuni) la momentul t_0 şi toate momentele anterioare lui.

Pentru calculul stării circuitului (curenţi şi tensiuni) la moment $t = t_0 + \Delta t$ este necesară exprimarea cu ajutorul metodei Bergeron a stării nodurilor, trei dintre ele $j - 1$, j şi $j + 1$ reprezentate prin cuadripoli fiind arătate în figura 3.

Distanţele între cuadripoli (noduri) sînt :

$$1(j-1) = v \cdot MU(j) \cdot \Delta t;\ 1(j) = v \cdot NU(j) \cdot \Delta t \qquad (2)$$

cu $MU(j)$ şi $NU(j)$ numere întregi.

Pentru calculul stării cuadripolului j se pot scrie : — ecuaţia dreptei Bergeron corespunzătoare undei directe la intrare :

$$u_i(j, t) + Z(j-1) \cdot i_i(j, t) = KD \qquad (3)$$

în care constanta KD :

$$KD = u_e(j-1, t - MU(j) \cdot \Delta t) + Z(j-1) \cdot i_e(j-1, t - MU(j) \cdot \Delta t)$$

s-a determinat din starea cuadripolului $j-1$ la un moment trecut.
— ecuația dreptei Bergeron corespunzătoare undei inverse la ieșire :

$$u_e(j,t) - Z(j)\cdot i_e(j,t) = KI \tag{4}$$

în care constanta KI :

$$KI = u_i(j+1, t - NU(j)\cdot\Delta t) - Z(j)\cdot i_i(j+1, t - NU(j)\cdot\Delta t)$$

s-a determinat din starea cuadripolului $j+1$ la un moment trecut.
— ecuațiile generale ale cuadripolului :

$$u_i(j,t) = A_{11}\cdot u_e(j,t) + A_{12}\cdot i_e(j,t) \tag{5}$$

$$i_i(j,t) = A_{21}\cdot u_e(j,t) + A_{22}\cdot i_e(j,t) \tag{6}$$

în care : A_{11}, A_{12} și A_{22}, A_{21} sînt parametri fundamentali ai cuadripolului.
Ecuațiile (3), (4), (5) și (6) formează un sistem cu necunscutele $u_i(j,t)$, $i_i(j,t)$, $u_e(j,t)$ și $i_e(j,t)$ care definesc starea cuadripolului (nodului) j la momentul t. Prin rezolvarea lui rezultă :

$$u_i(j,t) = \frac{KD\cdot(Z(j)\cdot A_{11} + A_{12}) + KI\cdot(A_{11}\cdot E - A_{12}\cdot F)}{E + Z(j)\cdot F} \tag{7}$$

$$i_i(j,t) = \frac{KD\cdot(Z(j)\cdot A_{21} + A_{22}) + KI\cdot(A_{21}\cdot E - A_{22}\cdot F)}{E + Z(j)\cdot F} \tag{8}$$

$$u_e(j,t) = \frac{KI\cdot E + Z(j)\cdot KD}{E + Z(j)\cdot F} \tag{9}$$

$$i_e(j,t) = \frac{KD - KI\cdot F}{E + Z(j)\cdot F} \tag{10}$$

unde s-a notat :

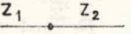
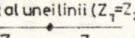
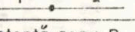
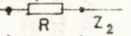
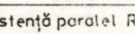
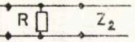
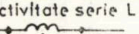
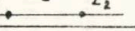
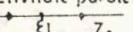
$$\begin{aligned} E &= A_{12} + Z(j-1)\cdot A_{22} \\ F &= A_{11} + Z(j-1)\cdot A_{21} \end{aligned} \tag{11}$$

Parametrii fundamentali A_{11}, A_{12}, A_{21} și A_{22} din relațiile (7) ÷ (10), iau valori concrete în funcție de natura cuadripolului (nodului) j. Valorile acestor parametri sînt date în tabelul 1.
Calculul stării nodului $n+1$ de sfîrșit al circuitului (fig. 2) se obține tot cu relațiile generale (7) ÷ (10), punîndu-se suplimentar condițiile existente la limită. De exemplu dacă :
— sfîrșitul este în gol : $Z(j) \to \infty$: $i_e(j,t) = 0$
— sfîrșitul este în scurtcircuit $Z(j) \to 0$; $u_e(j,t) = 0 \to KI = 0$

2.2. Modelarea funcționării descărcătorului cu rezistență variabilă.

Modelarea matematică a comportării descărcătorului s-a făcut tot cu ajutorul metodei Bergeron, avînd în vedere că în funcționarea sa se disting 3 etape :
a) tensiunea pe linie este mai mică decît tensiunea de amorsare a descărcătorului, deci acesta poate fi considerat practic deconectat ;

TABELUL 1

TIPUL CUADRIPOLULUI	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	$UL(t_o)$ sau $IL(t_o)$	KD_m	Mărimi de stare calculate cu relațiile: (7)÷(10) și $KD = KD_m$	Mărimi de stare recalculate
a) De trecere ($Z_1 \neq Z_2$) 	1	0	0	1	—	$KD_m = KD$	$u_e; i_e; u_i; i_i$.	—
b) Punct al unei linii ($Z_1 = Z_2$) 	1	0	0	1	—	$KD_m = KD$	$u_e; i_e; u_i; i_i$.	—
c) Rezistență serie R 	1	R	0	1	—	$KD_m = KD$	$u_e; i_e; u_i; i_i$.	—
d) Rezistență paralel R 	1	0	$\frac{1}{R}$	1	—	$KD_m = KD$	$u_e; i_e; u_i; i_i$.	—
e) Inductivitate serie L 	1	$\frac{2L}{\Delta t}$	0	1	$UL(t_o) = u_e(j,t_o) - u_i(j,t_o) - \frac{2L}{\Delta t} i_i(j,t_o)$	$KD_m = KD - UL(t_o)$	$u_e; i_e; u_i^*; i_i$.	$u_i(j,t) = u_i^*(j,t) + UL(t_o)$
f) Inductivitate paralel L 	1	0	$\frac{\Delta t}{2L}$	1	$IL(t_o) = \frac{\Delta t}{2L} u_i(j,t_o) + i_i(j,t_o) - i_e(j,t_o)$	$KD_m = KD - Z_i \cdot IL(t_o)$	$u_e; i_e; u_i; i_i^*$.	$i_i(j,t) = i_i^*(j,t) + IL(t_o)$
g) Capacitate serie C 	1	$\frac{\Delta t}{2C}$	0	1	$UL(t_o) = \frac{\Delta t}{2C} i_i(j,t_o) + u_i(j,t_o) - u_e(j,t_o)$	$KD_m = KD - UL(t_o)$	$u_e; i_e; u_i^*; i_i$.	$u_i(j,t) = u_i^*(j,t) + UL(t_o)$
h) Capacitate paralel C 	1	0	$\frac{2C}{\Delta t}$	1	$IL(t_o) = i_e(j,t_o) - i_i(j,t_o) - \frac{2C}{\Delta t} u_i(j,t_o)$	$KD_m = KD - Z_i \cdot IL(t_o)$	$u_e; i_e; u_i; i_i^*$.	$i_i(j,t) = i_i^*(j,t) + IL(t_o)$
i) Rezistență și capacitate paralel RC (transformator) 	1	0	$\frac{1}{R} + \frac{2C}{\Delta t}$	1	$IL(t_o) = i_e(j,t_o) - i_i(j,t_o) + u_i(j,t_o)\left(\frac{1}{R} - \frac{2C}{\Delta t}\right)$	$KD_m = KD - Z_i \cdot IL(t_o)$	$u_e; i_e; u_i; i_i^*$.	$i_i(j,t) = i_i^*(j,t) + IL(t_o)$

Tabelul 1. Valorile parametrilor fundamentali.

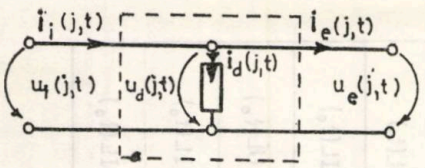


Fig. 4. Reprezentarea descărcătorului

b) pe linie apare o supratensiune mai mare decît tensiunea de amorsare u_a a descărcătorului, acesta funcţionează eliminînd supratensiunea, prin el trece curentul de descărcare i_d şi între bornele lui apare tensiunea u_d;

c) supratensiunea a fost eliminată. La bornele descărcătorului este aplicată tensiunea de frecvenţă industrială u, iar prin descărcător trece curentul de însoţire i_i care va fi stins. După aceasta descărcătorul se găseşte din nou în etapa a).

În etapa a) modul în care este conectat descărcătorul poate fi privit ca un cuadripol de trecere.

Descărcătorul trece în etapa b), adică se consideră amorsat în momentul cînd tensiunea la intrare $u_i(j, t) \geqslant u_a(t)$ (curba supratensiunii incidente intersectează curba tensiune — timp de amorsare $u_a = f_1(t)$). Comportarea descărcătorului în etapele b şi c este determinată de caracteristica volt-amper a descărcătorului $u_d = f(i_d)$. Pentru deducerea relaţiilor de calcul care definesc comportarea descărcătorului, asimilat cu un cuadripol (fig. 4), s-au scris ecuaţiile dreptelor Bergeron corespunzătoare undelor : directă la intrare, respectiv inversă la ieşire şi teoremele lui Kirchhoff, ţinîndu-se seama de faptul că mărimile u_d şi i_d sînt legate prin relaţia $u_d = f(i_d)$.

S-au obţinut :

$$u_i(j, t) = u_e(j, t) = u_d(j, t) = \tag{12}$$

$$= \frac{m_p(KD \cdot Z(j) + KI \cdot Z(j-1)) + n_p \cdot Z(j-1) \cdot Z(j)}{m_p(Z(j) + Z(j-1)) + Z(j-1) \cdot Z(j)}$$

$$i_i(j, t) = \frac{m_p \cdot (KD - KI) + Z(j) \cdot (KD - n_p)}{m_p \cdot (Z(j) + Z(j-1)) + Z(j-1) \cdot Z(j)} \tag{13}$$

$$i_e(j, t) = \frac{m_p(KD - KI) + Z(j-1) \cdot (n_P - KI)}{m_p \cdot (Z(j) + Z(j-1)) + Z(j-1) \cdot Z(j)} \tag{14}$$

$$i_d(j, t) = \frac{KD \cdot Z(j) + KI \cdot Z(j-1) - n_p(Z(j) + Z(j-1))}{m_p(Z(j) + Z(j-1)) + Z(j-1) \cdot Z(j)} \tag{15}$$

Semnificaţia notaţiilor este cea cunoscută, în plus m_p sînt pantele, iar n_p ordonatele la origine ale segmentelor de dreaptă care aproximează caracteristica neliniară volt-amper a descărcătorului.

În etapa c) prin descărcător trece curentul de însoţire i_i. Se consideră că acesta a fost întrerupt dacă scade sub o valoare dată $\hat{i}_{i_1}$ adică :

$$i_d(j, t) \leqslant i_{i_1} \tag{16}$$

şi descărcătorul trece din nou în etapa a) de funcţionare).

2.3. *Programul de calcul*

Programul de calcul scris în FORTRAN are la bază relaţiile generale de calcul prezentate anterior. El permite calculul variaţiei în timp a tensiunilor şi curenţilor în orice punct al unui post de transformare construit, cu echipament capsulat, izolat cu SF_6. De fapt programul este universal el permiţînd calculul regimului tranzitoriu în orice circuit neramificat. Nu se impun restricţii asupra mărimii pasului de calcul PAS = Δt, ceea ce permite alegerea acestuia în concordanţă cu configuraţia reală ce trebuie calculată, ţinînd seama atît de lungimea celor mai mici conductoare de legătură care intervin în schemă, cît şi de precizia de calcul care se doreşte a fi obţinută. Numărul de elemente ale circuitului (cu parametrii distribuiţi sau concentraţi, transformatoare, descărcătoare) nu este limitat de structura programului, ci este dat prin declaraţii de tablou la începutul lui, ceea ce îi conferă o mare flexibilitate.

Programul permite reprezentarea cu ajutorul graf-ploterului a variaţiei în timp a tensiunilor în două noduri ale circuitului unul impus prin datele iniţiale, iar celălalt este ultimul nod al circuitului.

3. Protecţia postului de transformare capsulat, izolat cu SF_6, de 123 kV

Pentru tensiunea de 123 kV rezultă ca fiind economică protecţia cu descărcătoare convenţionale [2, 4, 5]. S-a cercetat dacă un post de transformare capsulat de 123 kV construit cu echipamentul izolat cu SF_6 ce a fost proiectat la I.C.P.E. poate fi protejat eficient împotriva supratensiunilor atmosferice, montînd pe fiecare fază în apropierea intrării în celula de linie cîte un descărcător convenţional D.R.V.M. — 102. Ieşirea spre transformatorul de putere se face în linie aeriană, iar echipamentul izolat cu SF_6 are o capsulare monofazată ($Z_2 = 65\ \Omega$).

Locul de defect (conturnare inversă) s-a considerat situat la 240 m de staţie. Calculul valorilor maxime ale supratensiunilor la transformator şi în instalaţia capsulată s-a făcut cu ajutorul programului de calcul despre care s-a arătat anterior.

Ca urmare a analizei diferitelor variante de montaj ale descărcătorului şi transformatorului, a rezultat că protecţia optimă este asigurată montînd cîte un descărcător convenţional pe fiecare fază direct în linia aeriană, la 1,5 m de intrarea în celula de linie, transformatorul fiind plasat la 1,5 m de ieşirea din celula de racord. Variaţia în timp a supratensiunilor şi valorile lor maxime la transformator şi la capătul celulei de racord în această situaţie şi în aceea cînd transformatorul este plasat la 3 m de capătul celulei de racord este dată în figura 5 a, respectiv b.

Se observă că în cel de-al doilea caz (fig. 5b) supratensiunea maximă la transformator ($\hat{u}_6$) depăşeşte supratensiunea maximă admisibilă 375 kV, calculată cu luarea în consideraţie a coeficientului de siguranţă 1, 2 din tensiunea nominală de ţinere la impuls 1,2/50 a transformatorului de putere (450 kV), deci descărcătoarele montate la 1,5 m de intrările în celulele de linie nu mai asigură o protecţie eficientă.

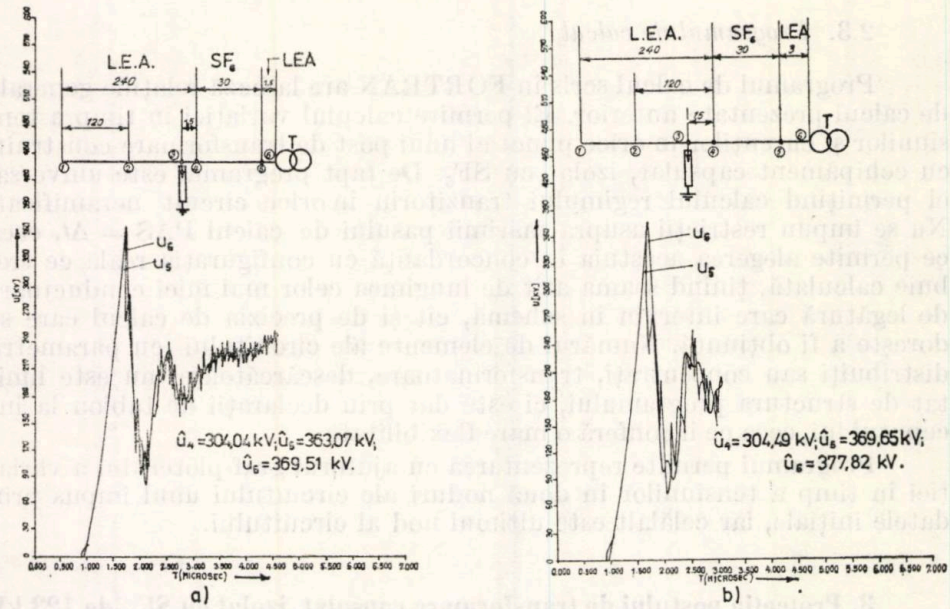


Fig. 5. Variația în timp a supratensiunilor

Concluzii

Eficiența unei scheme de protecție se verifică calculînd supratensiunile maxime care apar în instalația capsulată și la transformator și comparîndu-le cu supratensiunile maxime admisibile.

Postul de transformare de 123 kV, construit cu echipamentul capsulat, ce se va produce în țară, poate fi protejat în mod sigur cu descărcătoare convenționale D.R.V.M. — 102, montate așa cum s-a indicat anterior.

BIBLIOGRAFIE

1. *Hortopan, G.* Aparate electrice Ed. did. și pedag. Buc. 1980.
2. *Ionescu, F.* Soluții pentru protecția împotriva supratensiunilor în instalațiile cu SF_6. Teză de doctorat. I.P.B. 1978.
3. *Drăgan, G., Miclescu T., Cristovici, A., Popa, B., Golovanov, N,* Supratensiuni interne în sistemele electroenergetice. Ed. tehnică, Buc. 1975.
4. *Brauner, G.* Das Verhalten von metallgekapselten und Freiluft Schaltanlagen bei Naheinschlägen E.T.Z. — A 97 (1976), pag. 748—752.
5. *Burger, U,* Overvoltage Protection for Totally Enclosed SF_6 Switchgear and CGI Cables-Brown Boveri Rev. 61 (1974), pag. 179—186.

Kriterien zur Wahl des Schutzes gegen Blitzüberspannungen in Endstationen mit SF_6 gekapselten Schaltanlagen.

Die Arbeit beschäftigt sich, am Anfang, mit den Vorteilen der Stationen mit SF_6 gekapselten Schaltanlagen, dann werden die Speziellen und komplexen Aufgaben für Schutz gegen Blitzüberspannungen gezeigt.

Auf Grund der Bergeron Methode wurde in FORTRAN ein Rechennprogramm entworfen, welches die Größe der Überspannungen in Endstation analysiert.

Mit dem Rechenprogramm werden din Bedingungen geprüft, unter welchen ein rumänische 123 kV Endstation mit SF_6 gekapselte Schaltanlagen gegen Blitzüberspannungen mit konventionnellen DRVM—102 Ableitern geschützt werden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z.: 621.396.6

ÜBER DAS KRITERIUM DER STABILITÄT EINES SYSTEMS IN DER NÄHE DER GRENZBEDINGUNGEN

G. CARTIANU*

Gegenstand der Abhandlung ist die Analyse des erwähnten Stabilitätskriteriums der linearen von einem Parameter n abhängigen Systeme in der Umgebung eines Wertes $n = n_0$ und der orbitalen Stabilität einer quasiharmonischen Schwingung mit der Amplitude a_0 bei einem nichtlinearen System.

Das Stabilitätskriterium soll für lineare von einem Parameter n abhängige Systeme und für nichtlineare Systeme bezüglich der orbitalen Stabilität analysiert werden. Der zweite Fall kann auf den ersten zurückgeführt werden, wobei die Amplitude einer quasiharmonischen vom System erzeugten Schwingung als Parameter betrachtet wird.

Im ersten Fall findet eigentlich ein Bifurkationsphänomen statt, also eine qualitative Veränderung der Bahnen bei dem Durchgang des Parameters n durch einen Wert n_0.

Das hier analysierte Kriterium wurde von G. Cartianu in [1], [2], [3] angegeben und nachträglich in mehreren Abhandlungen von Ed. Nicolau [4], [6], T. Tănăsescu [5], [8], M. Drăgănescu [9], A. T. Murgan [11] entwickelt. Zahlreiche andere Studien behandelten dieses Kriterium [12], [13], [14] [15], im allgemeinen, ohne sich auf die vorangehenden Arbeiten in unserem Lande zu beziehen. In der vorliegenden Arbeit werden die Hauptbeiträge erwähnt und gleichzeitig Festlegungen hinsichtlich der Gültigkeitsbedingungen des Kriteriums gebracht.

1. Der Fall linearer von einem Parameter n abhängigen Systeme

1.1. Netzwerke mit negativem Widerstand. Wird die Eingangsadmittanz eines von einem Parameter n anbhängigen elektrischen Netzwerks mit $1/Z(s, n)$ bezeichnet, so sind die Wurzeln der charakteristischen Glei-

Eingangs datum 9 Juli 1981

* Prof. Dr. Korrespondierendes Mitglied der Akademie der Sozialistischen Republik Rumänien

chung des Systems Nullstellen der Funktion $Z(s, n)$. Sie charakterisieren den Stabilitätszustand (Null-Zustand) des Systems und sind durch

$$Z(s, n) = 0, \; s = \alpha + j\omega \tag{1}$$

gegeben, oder

$$Z(s, n) = R(\omega, \alpha, n) + jX(\omega, \alpha, n) = 0.$$

Es wird angenommen, daß die Wurzeln einfach sind; sie bilden konjugierte Paare.

Bei der Stabilitätsgrenze, für $n = n_0$, hat eine Wurzel der charakteristischen Gleichung des Systems, die gleichzeitig Nullstelle der Funktion $Z(s, n_0)$ ist, die Form

$$Z(\alpha_0, \omega_0, n_0) = 0 \tag{2}$$

Es werden die Stabilitätsbedingungen für $n = n_0 + \Delta n$, in der Nähe von n_0 gesucht. Dafür wird die dem Wert $(n_0 + \Delta n)$ des Parameters n entsprechende Nullstelle $s' = \alpha' + j\omega'$ in der Nähe von s_0 gesucht. So kann man schreiben

$$Z(\alpha', \omega', n) = 0$$

Nehmen wir an, daß die Funktion $Z(s, n)$ in der Umgebung des Punktes s_0 analytisch ist und daß die Bedingung

$$\frac{\partial Z(s, n)}{\partial s} \neq 0, \; s \simeq s_0, \; n \neq n_0$$

erfüllt ist.

Um $s' = \alpha' + j\omega'$ zu finden, wird $Z(s, n)$ in Taylor-Reihe in der Nähe eines Punktes $s_1 = \alpha_1 + j\omega_1 = 0 + j\omega_1$ aus der Umgebung des Punktes s_0 [2], [3], [7] entwickelt. Es folgt (weil $s' \simeq s_0$, $s_1 \simeq s_0$):

$$s' = \alpha' + j\omega' = s_1 - \frac{Z(s_1, n)}{\dfrac{\partial Z(s_1, n)}{\partial s}} \tag{3}$$

und

$$\alpha' = -\frac{R(\omega_1, n)\dfrac{\partial X(\omega_1, n)}{\partial \omega} + X(\omega_1, n)\dfrac{\partial R(\omega_1, n)}{\partial \omega}}{\left[\dfrac{\partial R(\omega_1, n)}{\partial \omega}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial X(\omega_1, n)}{\omega \partial}\right]^2}. \tag{4}$$

Das System ist stabil oder instabil, für $n = n_0 + \Delta n$ je nachdem ob $\alpha_1 < 0$ oder $\alpha_1 > 0$.

Es sei $\omega_1 = \omega_r$ die Frequenz, bei der $X(\omega_r, n) = X(\omega_1, n) = 0$. Es ergeben sich die Bedingungen

$$R(\omega_r, n) \frac{\partial X(\omega_0, n_0)}{\partial \omega} > 0, \text{ Stabilität,} \tag{5a}$$

und

$$R(\omega_r, n) \frac{\partial X(\omega_0, n_0)}{\partial \omega} < 0, \text{ Instabilität.} \tag{5b}$$

Es sei bemerkt, dass sich das Vorzeichen des Ausdrucks nicht ändert, wenn man $n = n_0$ und $\omega_r = \omega_0$ in den obigen Ableitungen ersetzt.

Ed. Nicolau [4], [5] führt den Ersetzung $R(\omega_1, n) = \frac{\partial R(\omega_0, n_0)}{\partial \omega} \Delta n$ in (3), (4) ein, wenn man $\omega_1 = \omega_r$ und wenn $\omega_r = \omega_0$ nimmt. Er leitet auch die Variation der Frequenz mit der Änderung des Parameters n ab.

Das Stabilitätskriterium wird folgenderweise ausgedrückt:

Das System ist stabil (im Sinne von Liapunov) in der Umgebung des Null-Zustandes, wenn das Produkt

$$\text{Re}\,[Z(\omega_r, n)] \times \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Im}[Z(\omega_0, n_0)] \tag{6}$$

zwischen dem Realteil für $n \neq n_0$ und der Ableitung des Imaginärteils der Funktion $Z(\omega, n)$ positiv ist (unter diesen Bedingungen wird die Schwingung allmählig gedämpft).

Das System ist instabil, wenn dieses Produkt negativ ist (in diesem Fall ist die erzeugte Schwingung allmälig wachsend).

Eine analoge Bedingung wird für die Admittanzfunktion gefunden.

Das Zeichen der Ableitung des Imaginärteils für $\omega = \omega_r$ und $n = n_0$ ist für die Art der Resonanz des Kreises ausschlaggebend; Plus entspricht der Reihenkreisresonanz und Minus der Parallelkreisresonanz.

Eine wichtige Anwendbarkeit hat der Fall, wenn die Impedanzfunktion $Z(\omega, n)$ in zwei, Teilen *trennbar* ist: ein realer Teil $R_N(n)$, der von n abhängig und von ω unabhängign ist und ein Teil $Z_L(\omega)$, der von ω abhängig und von n unabhängig ist (Abb. 1). Der Parameter n kann mit einem negativen Widerstand assoziiert werden. Dies würde einem physikalisch reellen Fall entsprechen, in dem R_N den negativen differentiellen Widerstand eines nichtlinearen elektronischen Schaltungselements darstellt, wie zum Beispiel die Tunnel — oder Gunn-Dioden oder die Gasentladungsröhren.

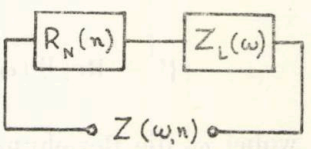


Fig. 1. Eingangsimpedanz mit Trennung von $R_N(n)$ und $Z_L(\omega)$.

In diesem Fall lauten die, Stabilitätsbedingungen

$$[R_N(n) + R_L(\omega_0)] \frac{\partial X(\omega_0)}{\partial \omega} > 0, \text{ Stabilität,} \tag{7a}$$

$$[R_N(n) + R_L(\omega_0)] \frac{\partial X(\omega_0)}{\partial \omega} < 0, \text{ Instabilität} \tag{7b}$$

oder, mit der von Ed. Nicolau gegebenen Formulierung

$$\frac{\partial R_N(n)}{\partial n} \frac{\partial X(\omega_0)}{\partial \omega} \Delta n > 0, \text{ Stabilität} \tag{8a}$$

$$\frac{\partial R_N(n)}{\partial n} \frac{\partial X(\omega_0)}{\partial \omega} \Delta n < 0, \text{ Instabilität.} \tag{8b}$$

In [2] wurde gezeigt, daß physikalisch realisierbare Impedanzen $Z_L(s)$ aufgestellt werden können, die für gewisse Werte ω_r Reihenresonanzen und in anderen Punkten Parallelresonanzen aufweisen, wobei $\frac{\partial X(\omega_r)}{\partial \omega} > 0$, beziehungsweise $\frac{\partial X(\omega_r)}{\partial \omega} < 0$ ist, was von dem Hodograph der Funktion hervorgehoben wird. Diesen verschiedenen Resonanzpunkten entsprechen verschiedenartige Stabilitätsverhältnisse, im Falle eins und desselben elektrischen Kreises.

1.2. *Rückgekoppelte Systeme.* Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Systems werden erhalten, wenn der Rückkopplungsfaktor $1 + W(s, n)$ des rückgekoppelten Systems gleich Null gestellt wird. Bezüglich des Systems in Abbildung 2 gilt $W(s, n) = K(s, n)\, B(s, n)$

Ähnlich wie im Falle von Abschnitt 1.1., gilt bei der Stabilitätsgrenze, für $n = n_0$

$$1 + \mathrm{Re}[W(\omega_0, n_0)] = 0 \tag{9a}$$

$$\mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)] = 0. \tag{9b}$$

Die Stabilitätsbedingungen (5 a, b) verändern sich zu

$$\{1 + \mathrm{Re}[W(\omega_r, n)]\} \frac{\partial}{\partial \omega} \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)] > 0, \text{ Stabilität} \tag{10a}$$

$$\{1 + \mathrm{Re}[W(\omega_r, n)]\} \frac{\partial}{\partial \omega} \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0) < 0, \text{ Instabilität} \tag{10b}$$

wobei ω_r die Beziehung $\mathrm{Im}\,[W(\omega_r, n)] = 0$ erfüllt.

Dieses Stabilitätskriterium ist besonders wichtig hinsichtlich seiner Anwendbarkeit, wenn die Funktion $W(\omega, n)$ die Eigenschaft der *Trennbarkeit* in zwei Faktoren $K(n)$ und $D(\omega)$ in der Umgebung von $n = n_0$ und $\omega = \omega_0$ besitzt, wobei der erste Faktor von n anhängig und von ω unabhängig ist und der zweite von ω abhängig und von n unabhängig ist. Dies entspricht den reellen Betriebsbedingungen der automatischen Regel-

systeme. $K(n)$ stellt den Übertragungsfaktor des reellen aktiven oder linearisierten Systems dar, zum Beispiel den eines elektronischen Verstärkers, und $D(\omega)$ den Übertragungsfaktor des Rückkopplungsnetzwerks (Abb. 3). Es folgt

$$W(\omega, n) = K(n)D(\omega),$$

$$\mathrm{Im}[W(\omega, n)] = k(n)\,\mathrm{Im}[D(\omega)],\ \forall n;\ \omega_r = \omega_0$$

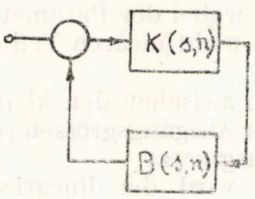


Fig. 2. Rückgekoppeltes System.

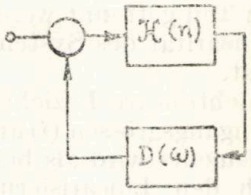


Fig. 3. Rückgekoppeltes System mit Trennung der Teile $K(n)$ und $D(\omega)$.

und die Bedingungen (10 a, b) können wie folgt geschrieben werden

$$\{1 + \mathrm{Re}[W(\omega_0 n)]\}\frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)]}{\partial \omega} > 0,\ \text{Stabilität} \tag{11a}$$

$$\{1 + \mathrm{Re}[W(\omega_0, n)]\}\frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)]}{\partial \omega} < 0,\ \text{Instabilität} \tag{11b}$$

oder

$$\frac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0, n_0)]}{\partial n}\frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)]}{\partial \omega}\cdot \Delta n > 0,\ \text{Stabilität} \tag{12a}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0, n_0)]}{\partial n}\frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)]}{\partial \omega}\cdot \Delta n < 0,\ \text{Instabilität} \tag{12b}$$

Wie auch im Falle der Netzwerke mit negativem Widerstand kann bei rückgekoppelten Systemen $\dfrac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, n_0)}{\partial \omega} < 0$ oder > 0 sein. Diese Tatsache wird auch von der Darstellung des Hodographs der Funktion $W(\omega, n)$ im Falle der rückgekoppelten Systeme mit bedingten Stabilität hervorgehoben.

Für die Verallgemeinerung der Formulierung des analysierten Stabilitätskriteriums wird $Z(\omega, n)$ oder $X(\omega, n)$ oder $1 + W(\omega, n)$ durch eine Funktion $T(\omega, n)$ ersetzt, so daß

$$Z(s, n) \cup Y(s, n) \cup [1 + W(s, n)] = T(s, n) \tag{13}$$

2. Die orbitale Stabilität der nichtlinearen Systeme in der Nähe der Schwinggrenzbedingungen.

Wir beziehen uns auf den Fall eines Netzwerks mit negativem Widerstand als auch auf den Fall eines rückgekoppelten Systems und analysieren die Stabilität der quasiharmonischen Schwingungen, die in diesen Systemen auftreten können, auf grund der in den vorangehenden Abschnitten gegebenen Methoden.

Nehmen wir an, daß eine quasiharmonische Schwingung von der Form

$$y = a\sin(\omega t + \varphi) \tag{14}$$

erzeugt wird, wobei a und φ langsam veränderliche Grossen sind. Es soll angenommen werden, da die Funktionen $Z(\omega, n)$ und $W(\omega, n)$ wie vorhin gezeigt in einem von ω abhängigen Teil und einem von dem Parameter n abhängigen Teil getrennt werden können, wobei der Parameter n hier mit der Nichtlinearität des Systems (mit dem nichtlinearen Teil des Systems) assoziiert ist.

Die nichtlineare Beziehung $u = F(i)$ zwischen den kleinen Variationen der Eingangsgrössen (i) und denen der Ausgangsgrössen (u) des nichtlineären Elements wird als bekannt vorausgesetzt.

Durch den Linearisierungsvorgang wird der linearisierte Widerstand $R_N(a)$ oder der linearisierte Faktor $K(a)$ abgeleitet, welche beide von der Amplitude a abhängig sind.

Die Amplitude a ist dem im Abschnitt behandelten Parameter n äquivalent. Man kann also schreiben

$$n = a\,;\ n_0 = a_0\,;\ \Delta n = \Delta a.$$

Die Funktion $T(s, n)$ in (12) erhält den Ausdruck

$$T(s, n) = T(s, a). \tag{15}$$

Wir nehmen an, dass die Funktion (15) eine Nullstelle von der Form $\alpha' + j\omega'$ hat. In diesem Fall ergibt sich die Beziehung

$$y = a_0 e^{\alpha' t}\sin(\omega' t + \varphi) \tag{16}$$

Unter der Voraussetzung, dass ein stationärer Zustand der Amplitude a_0 eingesetzt werden kann, hat die Funktion (15) eine Nullstelle von der Form $0 + j\omega_0$, also $\alpha' = 0$ und weil ω' hängt nicht von a ab, $\omega' = \omega_0$; folglich sind die Beziehungen, die die Werte von ω_0 und a_0 definieren

$$\mathrm{Re}[T(\omega_0, a_0)] = 0 \tag{17 a}$$

$$\mathrm{Im}[T(\omega_0, a_0)] = 0 \tag{17 b}$$

erfüllt.

Erfährt die Amplitude eine Veränderung und wird $a_0 + \Delta a$, so hat die Funktion $T(s, a)$ eine von $j\omega_0$ verschiedene Nullstelle $\alpha' + j\omega_0$. Um nun α' zu erhalten, wird die Beziehung (4) verwendet, die sowohl für die Funktion $Z(s, a)$ als auch für $1 + W(s, a)$ gültig ist.

Wenn wir uns auf die Funktion $1 + (W(s, a)$ beziehen und das Prinzip der *Trennbarkeit* voraussetzen, so können wir schreiben

$$\alpha' = -\frac{\{1 + \mathrm{Re}[W(\omega_0, a)]\}\dfrac{\partial \mathrm{Im}}{\partial \omega}[W(\omega_0, a_0)]}{\left[\dfrac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0,\ a_0)]}{\partial \omega}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0,\ a_0)]}{\partial a}\right]^2} \tag{18}$$

und

$$\frac{\alpha'}{\Delta a} \simeq -\frac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial a} \frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial \omega} / M \tag{19}$$

wobei M konstant und positiv ist.

Damit die Amplitude a auf den Wert a_0 zurückkommt, ist es notwendig und hinreichend, dass im Falle $\Delta a > 0$, α' negativ und im Falle $\Delta a < 0$, α' positiv sei, also dass

$$\frac{\alpha'}{\Delta a} = \frac{\Delta \alpha'}{\Delta a} < 0 \tag{20}.$$

Unter diesen Bedingungen $a \to a_0$ und das System ist orbital stabil.

Folgende Beziehung der orbitalen Stabilitat ergibt sich

$$\frac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial a} \frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial \omega} > 0 \tag{21 a}$$

Diese Bedingung ist auch für $T(s, a)$ gültig. Das System ist orbital instabil für $\omega = \omega_0$ und $a = a_0$ wenn

$$\frac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial a} \frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial \omega} < 0 \tag{21 b}$$

Die Bedingungen (21 a, b) stellen das Stabilitätskriterium der Schwingungen in der Nähe der Grenzbedingungen ; das Kriterium hat einen besonderen Anwendungswert in zahlreichen Fällen sowohl in der Elektrotechnik als auch in den verwandten Bereichen.

Die Beziehungen (21 a, b) wurden eingehend von T. Tănăsescu in [5] und [8] analysiert.

Eine eigene Formulierung wurde diesem Kriterium von S. Löb [12] im Jahre 1951 gegeben, der aber einen in mancher Hinsicht mangelhaften mathematischen Formalismus benuzt.

S. Willems bringt in [15] einige neue Beiträge, wobei er versucht, eine Äquivalenz zwischen der Methode der ersten Variation (of first variation) und der Methode der Linearisierung zu finden.

In derselben Richtung sind auch die Arbeiten [10] und [11] verfasst.

Das analysierte Kriterium erweist sich als wertvoll sowohl hinsichtlich der theoretischen als auch der applikativen Aspekte.

Es wird hervorgehoben, dass bei seiner Anwendung folgende mögliche Fälle berücksichtigt werden müssen :

$$\frac{\partial \mathrm{Re}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial a} \lesseqgtr 0,$$

welcher von der Art der Nichtlinearität abhängt, und

$$\frac{\partial \mathrm{Im}[W(\omega_0, a_0)]}{\partial \omega} \lessgtr 0,$$

welcher von der Art des linearen Teils des Systems abgängt.

1. *G. Cartianu*, La correspondance entre les caractéristiques statiques et les paramètres dynamiques des organes électriques à résistance négative, L'onde électrique, Janvier 1949, S. 44—50.
2. *G. Cartianu*, Circuitele electrice la limita de stabilitate, Buletinul ştiinţific, 1949, Tom. I, Nr., 3, Academia RPR.
3. *G. Cartianu*, Stabilitatea unui circuit electric oarecare cu rezistenţă negativă în sistemele lineare şi nelineare, Bulteinul ştiinţific. Matematica şi fizica, 1951, Tom.III, Nr. 2, S. 261—292.
4. *E. Nicolau*, Stabilitatea oscilatorilor electronici, Buletinul ştiinţific, Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice. 1954, Tom. VI, Nr. 3, S. 691—697.
5. *T. Tănăsescu*, Asupra stabilităţii regimului oscilant staţionar al sistemelor neliniare, Comunicările Academiei RPR. 1955, Tom. V, Nr. 9, S. 1301—1309.
6. *E. Nicolau*, Regimul permanent şi stabilitatea oscilatorilor electronici, Studii şi Cercetări de Energetică şi Electrotehnică, 1972, Tom. 22, Nr. 4, S. 979—992.
7. *G. Cartianu*, Über das Stabilitätsproblem der linearen und nichtlinearen elektrischen Kreise, Wiss. Z. Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau, 1957, 3, 2, S. 105—106.
8. *T. Tănăsescu*, Manual de tuburi electronice, vol. III, Editura Academiei RPR, 1957, paragraful 44.9.
9. *M. Drăgănescu*, Stabilitatea statică a circuitelor electrice neliniare Automatica şi Electronica, 1958, 2, 2, S. 78—85
10. *G. Cartianu, A. T. Murgan*, Equivalent Necessary and Sufficient Conditions for Orbital Stability, Revues Roumaine des Sciences Techniques, Electrotechnique et Energétique, 1973, Tome 18, 3, S. 491—498.
11. *A. T. Murgan*, A general stability criterion of the oscillations in nonlinear systems, Proceedings of the IEEE, 1971, 1.
12. *S. Loeb*, Phénomènes hérédiaires dans les servomécanismes. Un critère général de stabilité, Annales des Télécommunications, 1951, 6, 12, S. 346—352.
13. О. Попов, Приблашенный Методопределеник автоколеваний и вюнутденных-колевани-сынутденних лолеваний/нелинев х систем. Известива Академии технических Наук, 1954, Nr. 5, S. 3—38
14. *T. E. Stern*, Theory of Nonlinear Networks and Systems, Addison-Werley, 1965, S 11—14.
15. *S. L. Willems*, The stability of oscillations in Networks, I.E.E. Trans, 1968, CT. 15, S. 284—286.

Asupra criteriului de stabilitate a unui sistem în vecinătatea condiţiilor limită

Se analizează condiţiile de stabilitate a unui sistem liniar depinzînd de un parametru n în vecinătatea unei valori $n = n_0$ şi de stabilitate orbitală a unui sistem neliniar pentru o oscilaţie de amplitudine a_0.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z. · 621.396

TWO PORT SYMMETRICAL JUNCTION PARAMETRES MEASUREMENT CONTROL

G. CR. RULEA

Necessary relations between the measured values of two port symmetrical junction parameters are given.

These relations, the result of the measuring method redundant character, represent control criteria of the measured parameter values accuracy.

Introduction

The classical minimum displacement method, applied for the lossless or lossy two port junctions gives the possibility to determine the three or six parameters that describe the properties of the equivalent quadripole.

The two port lossless junction is caracterized, in a graphical interpretation, by x_0, y_0 the inflexion point coordinates of the S curve and N the slope in the same point.

In the equivalent quadripole circuit x_0, y_0 are the lengths of the two transmission lines, connected at an N ratio ideal transformer [1]. For the lossy two port junction the scattering matrix terms are graphically determinated using the circular chart [2 — 4].

The S matrix is generally available for multiport junctions. Theoretical contributions [5] and experimental measurement methods [6] led to the development of the application domain and the efficiency of the two port junction equivalent quadripole.

When the junction is symmetrical, or symmetrical and very thin, the necessary parameter number is reduced , but the measured parameter number remains the same. In this way the redundant character of the measurement method is pointed out. If the junction is symmetrical, the necessary number of the parameters is only two for a lossless junction, and, respectively, four, for a loss junction. The measured values are three, x_0, y_0, N, for a lossless junction and six S_{11}, S_{22} and S_{12}, modules and argu-

Manuscript received 21 May 1981
* Prof. dr. eng., Microwave Laboratory

ments, for a lossy junction. Between these values there are necessary relations, one for the lossless case and two for the lossy case.

When the junction is symmetrical and very thin, the necessary number of parameters is only one, for a lossless junction, and two, for a lossy junction. There result two control relations, for the first, and four, for the second case.

Control relations

The condition of symmetry $X_{11} = X_{22}$ has, for the tangents method, the form :

$$\frac{AB - N^2}{N^2A + B} = \frac{ABN^2 - 1}{N^2A + B} \tag{1}$$

where $A = \text{tg}\beta y_0$ and $B = \text{tg}\beta x_0$.
The condition $AB = -1$, or

$$|x_0 - y_0| = (2n + 1)\frac{\lambda g}{4} \tag{2}$$

results from (1).

The algebraic sum of the S curve inflexion point intrinsic coordinates, for a symmetrical lossless junction, is a quarter of the wavelength in the waveguide or an odd multiple of this.

For a thin discontinuity, when $X_{11} = X_{22} = X_{12}$, the input impedance, with unity relative load, is given by the expression :

$$Z_i = \frac{N^2 + jA}{1 + jN^2A} = \frac{jX_{12}}{1 + jX_{12}} \tag{3}$$

From (3), $$N = A = \text{tg}\beta y_0 \tag{4a}$$

or :

$$N^2 = \left|\frac{\text{tg}\beta y_0}{\text{tg}\beta x_0}\right| \tag{4b}$$

For the symmetrical thin discontinuity, the transformer coefficient, N, is the square root of the absolute value of the ratio $\frac{\text{tg}\beta y_0}{\text{tg}\beta x_0}$. The symmetry condition, for lossy junction is $S_{11} = S_{22}$. The modules equality on the circle diagram gives, Fig. 1 :

$$\frac{OO'}{R_1} = \frac{O'C}{R_2} \tag{5}$$

or :

$$\frac{OO'}{O'A} = \frac{O'C}{O'A'} \tag{6}$$

because $O'A = R_1 - O'O$ and $O'A' = R_2 - O'C$.

In conclusion, the modules equality $|S_{11}| = |S_{22}|$ is graphically expressed by :

$$AA' \| OC \tag{7}$$

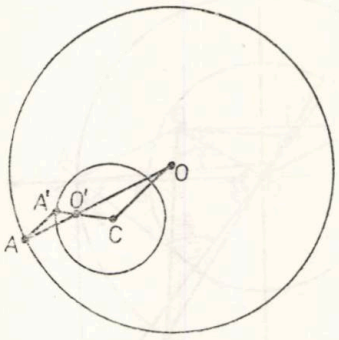


Fig. 1. The graphical condition for modules equality
$|S_{11}| = |S_{22}|$, AA'' || OC.

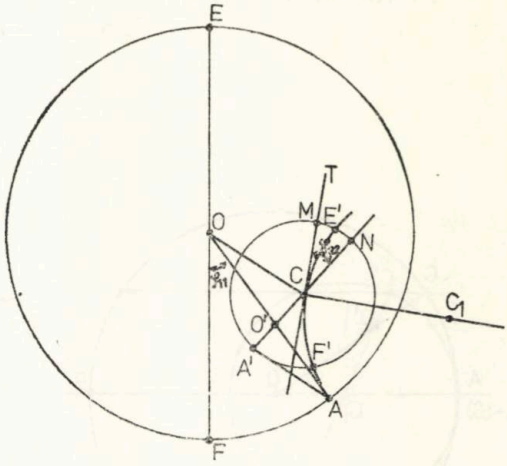


Fig. 2. The graphycal condition for arguments equality
$\varphi_{11} = \varphi_{22}$.

The arguments equality $\varphi_{11} = \varphi_{22}$ is represented, in the diagram of Fig. 2, by the graphical condition $\widehat{FOO'} = \widehat{MCN}$, where $\widehat{MCN}$, the angle between the diameter $O'C$ and the tangent T in C, to the image diameter $E'F'$, gives the φ_{22} value.

In the equivalent quadripole of a lossy junction, for a thin film layer, the conditions $Z_{11} = Z_{22} = Z_{12}$ or, with the scattering matrix terms :

$$S_{12} = 1 + S \tag{8}$$

where $S = S_{11} = S_{22}$, are fulfilled.

In this case, the image circle pass through the point $(-1, 0)$ and the center is placed on the AB diameter (Fig. 3).

The symmetry condition is $CC' \| AO$. The C_i position or the radius value is unknow. The radius value expression give a criterion for accuracy control.

The impedance : $$Z = Z_{11} = Z_{22} = Z_{12}$$

has, in the previous conditions, the value :

$$Z = -\frac{(1+S)}{2S} = R + jX \tag{9}$$

and because $$R > 0$$

$$|S| < -\cos\varphi \tag{10}$$

where

$$S = |S| e^{j\varphi}$$

In the lossless case

$$|S| = -\cos\varphi \tag{11}$$

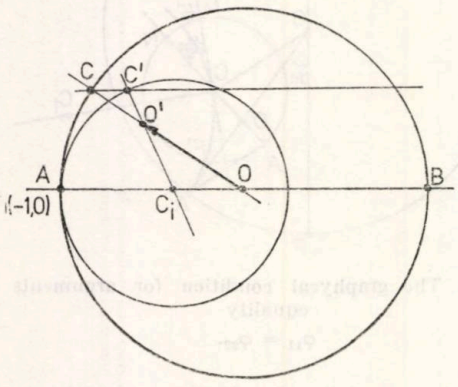


Fig. 3. The image circle.

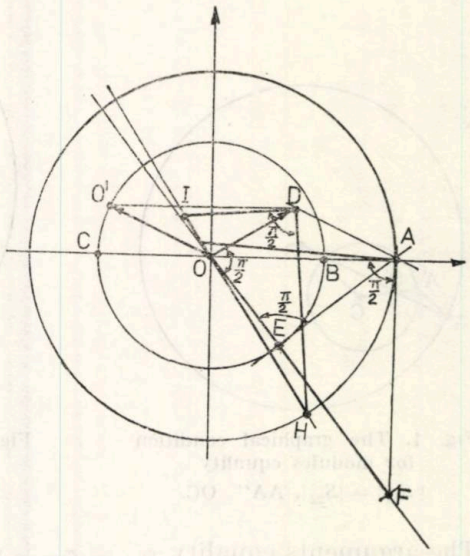


Fig. 4. Geometrycal construction for R_2 determination.

The condition (10) give :

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \tag{12}$$

and evidently

$$|S| < 1$$

From (8)

$$|S_{12}| < \sin\varphi \tag{13}$$

The reprezentative points for S and S_{12} are always inner the circle diagram.

The image circle radius R_2 is

$$R_2 = \frac{|1+S|\,|1+S|}{(1-|S|)(1+|S|)} \tag{14}$$

From Fig. 4 :

$$AC = AO + OC = 1 + |S| \tag{15}$$

where $OC = OB = OO' = |S|$ is the radius of the circle BCO'.

$$AE^2 = AB \cdot AC \tag{16}$$

Or

$$AB = 1 - |S| \tag{17}$$

and

$$AE^2 = (1 - |AS|)(1 + |S|) = 1 - |S|^2 \tag{18}$$

In the triangle AFG:

$$EF = R_1 = 1 \tag{19}$$

$$AE^2 = EF \cdot EG \tag{20}$$

From (18) (19) and (20):

$$EG = 1 - |S|^2 \tag{21}$$

In the same way

$$OD^2 = OH \cdot OI \tag{22}$$

where

$$OH = 1 \tag{23}$$

$$OD = |1 + S| \tag{24}$$

so that

$$OI = |1 + S|^2 \tag{25}$$

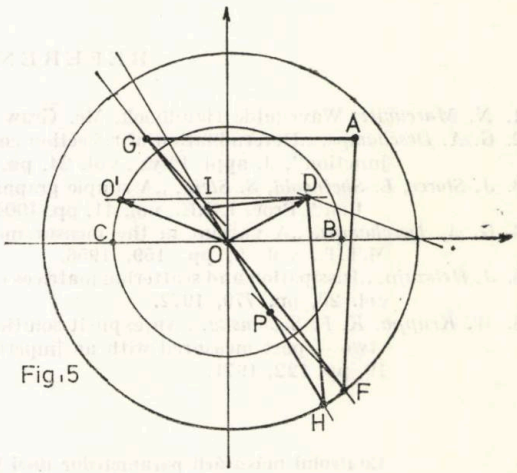


Fig.5

Fig. 5. The geometrycal relation for R_2 value.

If EA is translated with E in origin Fig. 5,

$$\frac{OI}{OG} = \frac{OP}{OF} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{|1 + S|^2}{1 - |S|^2} \tag{26}$$

and

$$OP = R_2 \tag{27}$$

Experimental results

For an inductive diaphragm, $d = 4{,}2$ cm, with the thickness $t = 1$mm, mounted in a rectangular waveguide, $a = 7{,}2$ cm and $b = 3{,}6$ cm, at $\lambda_0 = 9{,}225$ cm, mode H_{10}, there are found $\frac{x_0}{\lambda_g} = 0{,}408$ and $\frac{y_0}{\lambda_g} = 0{,}345$.

The error for the symmetry condition is 0,4 %.

The V S W R at the input, with matched load at the output, is

$$\sigma = 4{,}8 = N^2 \text{ and } \operatorname{tg}\beta y_0 = 2\pi \cdot 0{,}345 = 2{,}166.$$

The error is about 1,1 %.

The parallelism condition (7) is verified with 1,2 % error for a T junction (in H plane) with $a = 3{,}5$ cm, $b = 1{,}75$ cm at $\lambda_0 = 4{,}675$ cm, when the secondary arm is matched.

Conclusions

The relations between the measured values of two port symmetrical junction parameters represent control criteria of the measured parameter values accuracy.

These relations may be applied in automated microwave measurement.

REFERENCES

1. *N. Marcuvitz*, Waveguide Handbook, Mc. Graw Hill, New York, 1951, pp. 132.
2. *G. A. Deschamps*, „Determination of reflection coefficients and insertion loss of a waveguide junction", J. appl. Phys., vol. 24, pp. 1046, 1953.
3. *J. Storer, L. Sheingold, S. Stein*, „A simple graphical analysis of a two port waveguide junction", Proc. I.R.E., vol. 41, pp. 1004–1013, 1953.
4. *G. A. Deschamps*, „A variant in the measurement of two-port junctions", Trans. I.R.E., M.T.T., vol. 5, pp. 159, 1956.
5. *J. Helszajn*, „Dissipation and scattering matrices of lossy junctions", Trans. I.E.E.E., M.T.T., vol. 20, pp. 779, 1972.
6. *W. Kruppa, K. F. Sodomsky*, „An explicit solution for the scattering parameters of a linear two – port measured with an imperfect test set", Trans. I.E.E.E., M.T.T., vol. 19, pp. 122, 1971.

Controlul măsurării parametrilor unei joncțiuni simetrice de tip diport

Sînt date relațiile necesare între valorile măsurate ale parametrilor unei joncțiuni simetrice de tip diport.

Aceste relații, rezultatul unei metode de măsură cu caracter redundant, reprezintă un criteriu de control vizînd precizia valorilor măsurate ale parametrilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z.: 621.382

MODELAREA FUNCȚIONĂRII DIODEI IMPATT LA SEMNAL MARE IN OSCILATOARE DE PUTERE

T. TEBEANU, D. DASCĂLU, N. MARIN

Introducere

Autorii propun un model analitic simplificat pentru funcționarea la semnal mare al diodei IMPATT în oscilatoare de putere pe ghid dreptunghiular sau pe ghid tip linie coaxială.

Modelul este adoptat în scopul interpretării unor rezultate experimentale proprii: corelația curentului de saturație cu cel de start, variația anormală a frecvenței cu curentul de polarizare, stabilitatea dinamică și salturile în frecvență.

Modelarea comportării diodei IMPATT în oscilatoare sau amplificatoare de putere este foarte dificilă deoarece comportarea dispozitivului este atît neliniară cît și nestaționară. Se admite de regulă un regim armonic: se pleacă de la o tensiune sinusoidală la bornele diodei și se calculează impedanța diodei raportînd tensiunea la fundamentala curentului. Pentru o diodă dată această impedanță, fie ea Z, depinde atît de curentul de polarizare, I_0, cît și de amplitudinea V_1 și frecvența ω a semnalului [1].

Există în principiu trei tipuri de modele: *analitice*, care au dezavantajul unor simplificări drastice; modele obținute prin *simulare* pe calculator plecînd de la ecuațiile semiconductorilor (acestea sînt costisitoare și introduc o dependență neexplicită de numeroși parametri, dintre care unii microscopici, inaccesibili direct) și, în sfîrșit modele *(cvasi) empirice* care sînt rezultatul determinării unor dependențe numerice prin comparație cu măsurătorile experimentale.

Pentru explicarea unor rezultate obținute cu diodele de putere fabricate în țară [2] autorii au apelat la un model analitic pe care l-au adaptat în scopul interpretării unor rezultate proprii asupra oscilatoarelor de putere (corelația curentului de saturație cu cel de start, variația anormală a frecvenței cu curentul de polarizare, stabilitatea dinamică și salturile în frecvență) [3], [4].

Manuscris primit la data de 3 noiembrie 1981
* Șef lucrări ing.; Conf. dr. ing., Catedra Dispozitive, circuite și aparate electronice; Ing. I.P.R.S. — Băneasa.

Modelul de semnal mare

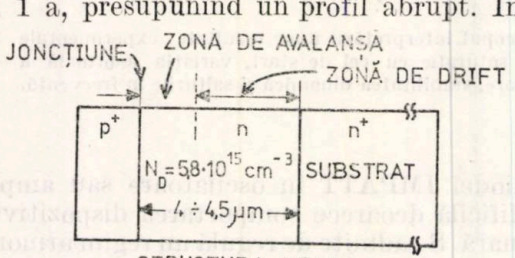
Curentul de particule generat prin fenomenul de avalanșă este [1]:

$$j(t) = j(o) \exp \frac{2\alpha'}{\tau_a} \int_0^t V_a(\tau)d\tau \tag{1}$$

unde α' este derivata ratei de ionizare în raport cu cîmpul electric, τ_a este timpul de tranzit prin regiunea de avalanșă iar V_a tensiunea care cade pe această regiune. Ecuația (1) exprimă neliniaritatea esențială a funcționării dispozitivului. Densitatea curentului total se calculează în zona de drift admițînd că viteza purtătorilor este saturată și incluzînd curentul de deplasare

$$J(t) = \frac{1}{\tau_d} \int_{t-\tau_d}^{t} j(t)dt + C_d \frac{dV_d(t)}{dt} \tag{2}$$

Aici τ_d este timpul de tranzit prin regiunea de drift, V_d căderea de tensiune și C_d capacitatea zonei de drift. Sîntem în cadrul modelului original (propus de Read [5]), cu un profil de impurități idealizat și alte presupuneri simplificatoare. Calculele autorilor sînt făcute pe structura p^+nn^+ din fig. 1 a, presupunînd un profil abrupt. Introducînd $V_a(t) = V_{a1} \sin\omega t$ și



DIODE	DIAMETRU (μm)	C (pF)
MICA PUTERE	120	0,25
MEDIE PUTERE	160	0,5

Fig. 1a. Modelul propus de Read pentru o diodă IMPATT cu structura p^+nn^+, presupunînd un profil abrupt.

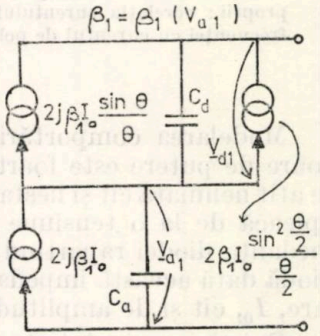


Fig. 1b. Circuit echivalent de semnal mare al diodei IMPATT.

dezvoltînd în serie ajungem la o exprimare a fundamentalei curentului cu ajutorul funcțiilor Bessel modificate de speța întîia $I_n^*(\bar{I}_1)$, avînd ca argument mărimea

$$\bar{I}_1 = \frac{2\alpha' V_{a1}}{\omega \tau_a} \tag{3}$$

care va fi interpretată mai departe ca un curent normat. Rezultatul apare în circuitul echivalent din fig. 1 b (propus de Mouthaan [6]). Aici

$$\beta_1 = \frac{I_1^*(\bar{I}_1)}{I_0^*(I_1)}, \tag{4}$$

este raportul a două funcții Bessel ($n = 0, 1$), iar $\theta = \omega\tau_d$ este unghiul de tranzit prin regiunea de drift. Admitem că generatorul reactiv $2j\,\beta_1 I_0$

poate fi înlocuit cu reactanța (inductivă) $2\beta_1 I_0$ care rezonează cu reactanța capacitivă $1/\omega C_a$ la o anumită frecvență, ω_a. La limită, pentru semnale mici ($V_{a1} \to 0$, $\bar{I}_1 \to 0$) se obține formula cunoscută a frecvenței de avalanșă, $\omega_a = (2\alpha' V_{a1} I_0/\varepsilon A)^{1/2}$. De obicei dioda lucrează la frecvențe substanțial mai mari decît ω_a și zona de avalanșă poate fi modelată exclusiv prin C_a.

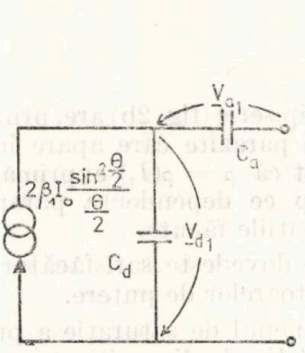


Fig. 2a. Circuit echivalent simplificat de semnal mare al diodei IMPATT.

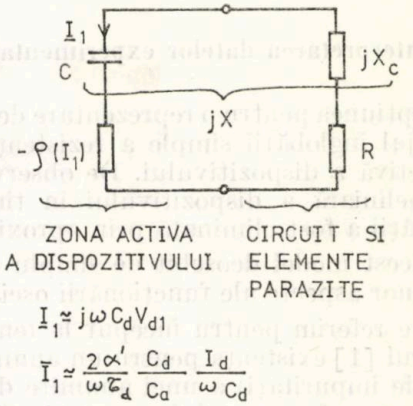


Fig. 2b. Reprezentarea tip serie a diodei IMPATT într-un circuit de microunde.

O altă opțiune importantă este neglijarea generatorului reactiv în paralel cu C_d (ceea ce atrage neglijarea definitivă a efectelor parametrice). Această neglijare este corectă dacă $\theta \approx \pi$. Menționăm că în cadrul acestui model puterea (și eficiența) maximă se obține totuși pentru $\theta = 0{,}74\ \pi$. Ca urmare se obține circuitul echivalent din fig. 2a. Defazajul curent-tensiune este caracteristic unui efect de *rezistență negativă*. Această rezistență, ρ (în valoare absolută) poate fi explicitată aplicînd teorema Thévenin și admițînd apoi (presupunere obișnuită) că se poate aproxima curentul alternativ total I_1 prin curentul de deplasare în zona de drift (deci curentul capacitiv prin C_d). Calculele dau (fig. 2b):

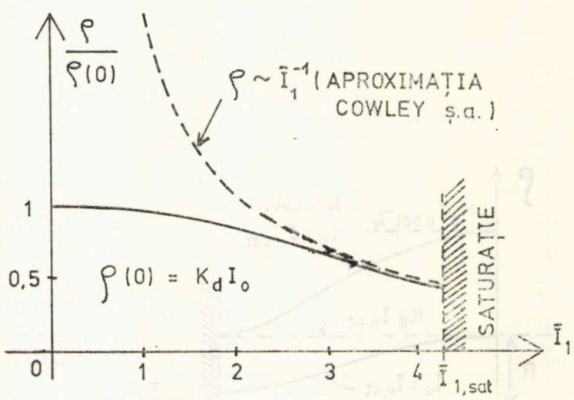


Fig. 3. Variația normată a rezistenței negative a diodei IMPATT cu amplitudinea curentului de radiofrecvență prin dispozitiv.

$$\rho = 2K_D \frac{\beta_1(\bar{I}_1) I_0}{\bar{I}_1}, \quad K_D = \left[\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2 \frac{\alpha' \tau_d}{\omega^2 \tau_a C_a C_d} \tag{5}$$

și trecînd la limită pentru $I_1 \to 0$ ($\beta_1 \to \bar{I}_1/2$) se obține rezistența de semnal mic $\rho(0) = K_D I_0$, unde K_D este o constantă a diodei care depinde slab de frecvență (de pildă într-o plajă de sute de MHz în jurul frecvenței centrale de ordinul a 10 GHz). Variația mărimii rezistenței negative cu semnalul apare în diagrama normată din fig. 3.

Interpretarea datelor experimentale

Opțiunea pentru o reprezentare de tip serie (fig. 2b) are, printre altele, avantajul înglobării simple a rezistenței parazite care apare în serie cu zona activă a dispozitivului. De observat că $\rho = \rho(I_1)$ exprimă comportarea neliniară a dispozitivului în timp ce dependența parametrică a capacității a fost eliminată prin aproximațiile făcute.

Acest model deosebit de simplu se dovedește satisfăcător în explicarea unor aspecte ale funcționării oscilatoarelor de putere.

Ne referim pentru început la fenomenul de saturație a puterii [7], postulînd [1] existența pentru un anumit tip de dispozitiv (cu un anumit profil de impurități) a unei anumite densități de curent alternativ, $I_{1,sat}$ la care apare fenomenul de saturație. Ca urmare nu ne putem deplasa pe curba din fig. 3 decît pînă la un punct limită. Fig. 4 arată curbe $\rho = \rho(I_1)$ pentru diferiți curenți de polarizare. Deoarece $\rho \sim I_0$ ținînd seama de existența curbei normate, rezultă că pentru un circuit dat (rezistența serie

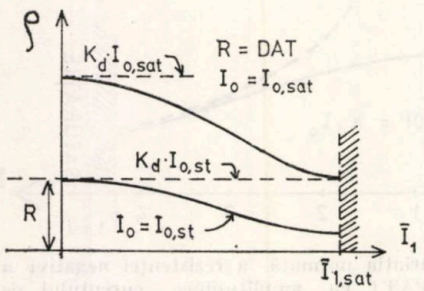


Fig. 4. Explicarea fenomenului de saturație a puterii generate într-un circuit terea dat de microunde la creș curentului de polarizare.

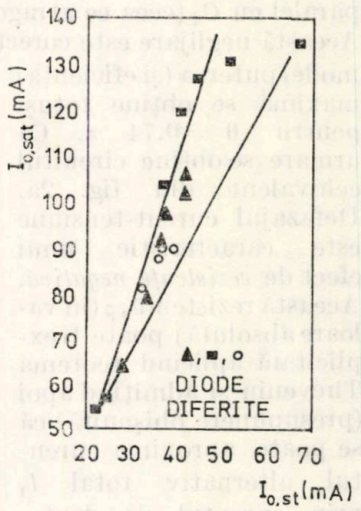


Fig. 5. Verificarea experimentală a corelației dintre curentul de saturație și curentul de start.

oferită de circuit precizată) raportul între curentul de start (amorsarea oscilațiilor), $I_{0,st}$ și curentul la care apare saturația puterii, $I_{0,sat}$, este o constantă.

Această concluzie se verifică experimental atît pentru diode de arii diferite cît și pentru una și aceeași diodă în circuite diferite. Pentru ilustrare se indică fig. 5, unde punctele au fost obținute cu diferite transformatoare de impedanță într-un circuit de tip coaxial [4]. Măsurătorile pe zeci de diode arată că $I_{0,sat} = 2 \ldots 2{,}5\ I_{0,st}$ (valorile $2{,}2 \ldots 2{,}3\ I_{0,st}$ fiind obișnuite). Această concluzie are o importanță practică deosebită deoarece permite reglarea oscilatorului la curenți mici. Este cunoscut faptul că ajustarea circuitului lucrînd la curentul *nominal* este o operație riscantă, care poate duce la distrugerea diodei IMPATT de putere.

Fie de exemplu o diodă care are curentul de lucru recomandat $I_0 = 100$ mA. Circuitul poate fi reglat astfel încît oscilațiile să pornească la $I_{0,st} = 45$ mA. Pentru aceasta se poate folosi un detector sau un powermetru și un atenuator necalibrat, etc. Putem fi apoi siguri de funcționarea corectă a oscilatorului la $I_0 = 95 \ldots$ $\ldots 100$mA, renunțînd la vizualizarea spectrului (în saturație oscilațiile devin extrem de zgomotoase) și chiar la măsurarea puterii. Desigur, în unele cazuri mai este necesar un acord fin pentru a stabili o frecvență bine determinată.

Fig. 6. Determinarea experimentală a variației rezistențe negative cu amplitudinea curentului de radiofrecvență avînd ca parametru curentul de polarizare.

Din punct de vedere teoretic remarcăm confirmarea ipotezei densității limită a curentului alternativ prin dispozitiv. Deoarece $I_1 \simeq j\omega C V_1$ unde C este capacitatea totală a dispozitivului, avem o limitare corespunzătoare în amplitudinea tensiunii la bornele dispozitivului. Sub această formă este întîlnită în literatură condiția limită de evitare a saturației. Valorile diferite raportate de diferiți autori pot fi explicate în primul rînd prin diferențele între profilul de impurități de la un tip de diodă la altul.

Un alt rezultat al aplicării modelului îl constituie posibilitatea determinării valorii lui ρ plecînd de la măsurarea puterii în sarcină (cu neglijarea eventualelor pierderi din circuit). Rezultatele unor astfel de calcule sînt indicate în fig. 6. Precizia lor depinde de precizia modelării circuitului de microunde [4], [8]. Astfel de calcule sînt necesare pentru proiectarea oscilatoarelor și, mai ales, a amplificatoarelor de putere.

Stabilitatea dinamică

Condiţia de oscilaţie a circuitului din fig. 2b este :

$$Z = -\rho + R + jX = 0 \tag{6}$$

Admitem $Z = Z(s, p)$ unde $s = \alpha + j\omega$ şi p este un parametru. În regim de oscilaţie permanentă $s = j\omega = j\omega_0$ şi $Z(j\omega_0, p) = 0$. Într-un regim de oscilaţie uşor modificat avem $Z(s, p) = 0$. De aici [9] :

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial s} ds \times \frac{\partial Z}{\partial p} dp = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{1}{j} \frac{\partial Z}{\partial \omega} \tag{7}$$

Trecînd la variaţii finite (dar mici)

$$\frac{1}{j} \frac{\partial Z}{\partial \omega} (\alpha + j\Delta\omega) + \frac{\partial Z}{\partial p} \Delta p = 0 \tag{8}$$

şi notînd

$$S_\alpha = \frac{\alpha}{\Delta p}, \quad S_a = \frac{\Delta\omega}{\omega p} \tag{9}$$

extragem din condiţia complexă (8)

$$S_\alpha = \left| \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|^{-2} \left[\frac{\partial (R - \rho)}{\partial \omega} \frac{\partial X}{\partial p} - \frac{\partial (R - \rho)}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial \omega} \right] \tag{10}$$

$$S = \left| \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|^{-2} \left[- \frac{\partial (R - \rho)}{\partial p} \frac{\partial (R - \rho)}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial \omega} \right] \tag{11}$$

Stabilitatea dinamică poate fi apreciată alegînd $p = I_1$. Modelul nostru introduce

$$\frac{\partial \rho}{\partial \omega} \simeq 0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} \simeq 0, \quad \frac{\partial R}{\partial p} = 0 \tag{12}$$

Conducînd la

$$S_\alpha = \frac{\alpha}{\Delta I_1} = \frac{\partial \rho}{\partial I_1} \frac{\partial X}{\partial \omega} \left| \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|^{-2} \tag{13}$$

Sistemul este stabil dinamic dacă $S_\alpha < 0$ (o perturbaţie care, duce, de pildă la o creştere accidentală a lui I_1, $\Delta I_1 > 0$, trebuie să tindă să reducă amplitudinea de oscilaţie, $\alpha < 0$ în regimul tranzitoriu ce urmează perturbaţiei. Deoarece $\partial \rho / \partial I_1 < 0$ (fig. 3) condiţia de stabilitate dinamică devine :

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} > 0, \quad X = -\frac{1}{\omega C} + X_c \tag{14}$$

unde X_C este reactanța serie a circuitului de microunde, iar C capacitatea diodei. Se observă că $\partial X_C/\partial\omega > 0$ este o condiție suficientă de stabilitate,

Ilustrăm rezultatul cu reprezentarea în planul complex din fig. 7. Curba reprezintă hodograful lui $R(\omega) + jX(\omega)$, iar $\rho = \rho(I_1)$ se confundă cu o porțiune a axei reale (gradată în I_1, pentru un I_0 = dat). Intersecțiile curbei cu axa reală reprezintă regimuri de oscilație permanentă. În fig. 7 numai punctele 1 și 3 corespund unei oscilații stabile. Salturile în frecvență și putere constatate experimental pot fi explicate prin tranziția dintr-un regim de oscilație în altul atunci cînd modificarea circuitului atrage deplasarea curbei $R(\omega) + jX(\omega)$ [10].

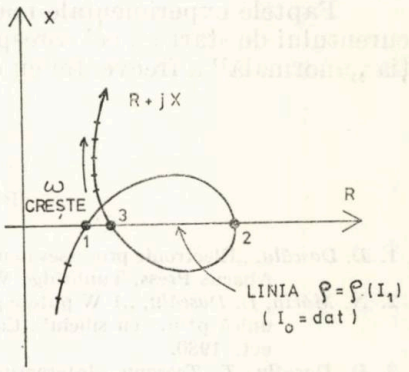


Fig. 7. Reprezentarea în planul complex a hodografului circuitului tenței negative a dispozitivului

Acordul electric

Unul din fenomenele cele mai caracteristice din oscilatoarele cu diode IMPATT îl reprezintă variația frecvenței de oscilație cu curentul de polarizare I_0. Ca urmare, este posibilă o modulație în frecvență prin polarizare [11]. De regulă $\omega_0 = 2\pi f_0$ crește cu creșterea lui I_0. Explicația dată în literatură corespunde modificării părții reactive a impedanței diodei cu I_0. În lucrarea de față arătăm că circuitul poate influența decisiv nu numai mărimea ci și sensul deviației de frecvență. Vom folosi relația (11) apelînd la aproximațiile (12) și luînd drept parametru curentul de polarizare, I_0, Rezultă

$$\frac{\Delta f}{\Delta I_0} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial \rho}{\partial I_0}\,\frac{\partial R}{\partial \omega}\left|\frac{\partial Z}{\partial \omega}\right|^{-2} \tag{15}$$

și $\Delta f/\Delta I_0$ are semnul lui $\partial R/\partial\omega$ (de pildă pozitiv în punctul 1 și negativ în punctul 3 din fig. 7) deoarece $\partial\rho/\partial I_0 > 0$ (fig. 6). Deviația „anormală" de frecvență $\Delta f/\Delta I_0 < 0$ a fost într-adevăr constatată experimental de autori pentru anumite regimuri de frecvență și își găsește acum explicația. De remarcat că schimbarea semnului lui $\Delta f/\Delta I_0$ poate avea loc nu numai prin salt ci și continuu (dacă prin reglaje de circuit curba își schimbă „forma"). Ambele situații au fost observate experimental. De remarcat că o stabilitate bună a frecvenței se obține pentru $\left|\frac{\partial R}{\partial \omega}\right|$ mic ceea ce se poate corela cu $\left|\frac{\partial X}{\partial \omega}\right|$ mare și un factor de calitate ridicat al circuitului de microunde.

Concluzie

Lucrarea propune un model simplificat de semnal mare al diodei IMPATT, verificat de autori pentru oscilatoare de putere construite pe ghid dreptunghiular sau pe ghid tip linie coaxială. Mai simplu decît mode-

lul Mouthaan [6] derivat din teoria lui Read [5], acest circuit echivalent descrie generarea de putere mai bine decît cel propus de Cowley ş.a. [7] care este acceptabil numai pentru cazul limită al semnalelor mari. Remarcăm o deosebire netă faţă de teoria generală a lui Kurokawa [10]: aici neglijăm caracterul neliniar al reactanţei diodei, dar luăm în considerare dependenţa ei de frecvenţă.

Faptele experimentale mai importante explicate aici sînt: corelarea curentului de start cu cel corespunzător saturaţiei puterii, precum şi variaţia „anormală" a frecvenţei cu curentul de polarizare.

BIBLIOGRAFIE

1. *D. Dascălu*, „Electronic processes in unipolar solid state devices", Ed. Academiei, Bucureşti; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1977.
2. *N. Marin, D. Dascălu*, „1 W putere generată în undă continuă la 9500 MHz de o structură unică p^+nn^+ cu siliciu". Comunicare la Conf. An. Semic, Timişul de Sus, 16—18 oct. 1980.
3. *D. Dascălu, T. Tebeanu* „Interacţiunea dispozitiv-circuit în oscilatoare de microunde cu diode semiconductoare", comunicare la Sesiunea Academiei Militare din 18—19 nov. 1980 (în curs de publicare).
4. *D. Dascălu, T. Tebeanu*, Raport de cercetare, Inst. Politehnic Bucureşti, dec. 1980.
5. *W. T. Read*, Jr., Bell Syst. Techn. J., vol. *37*, 1958, pag. 401—446.
6. *K. Mouthaan*, Philips Res. Repts, vol. *25*, 1970, pag. 33—67.
7. *A. M. Cowley ş.a.*, IEEE J. of Solid State Circuits, vol. *SC—5*, 1970, pag. 338—345.
8. *S. Iordănescu, S. Cotabiţiu*, „Metodă de determinare a circuitului echivalent al diodelor de microunde în capsulă coaxială", comunicare la Conf. An. Semic., Timişul de Sus, 16—18 oct. 1980.
9. *E. Nicolau, Al. Popovici*, „Introducere în cibernetica sistemelor continue", Ed. tehnică, 1972.
10. *K. Kurokawa*, Cap. 5 în „Microwave devices. Device circuit interaction", John Wiley London, 1976.
11. *T. Tebeanu*, „Modulaţia prin polarizare a oscilatorului cu diodă IMPATT", comunicare la Simpozionul de Tehnica Microundelor, Inst. Politehnic, Bucureşti, 9—10 nov. 1979.

Modelling the Large-Signal Behaviour of IMPATT Diodes in Power Oscillators

A simplified analytical model for large-signal operation of an IMPATT diode in rectangular or coaxial line guide power oscillators is suggested. This model explains certain experimental results, namely the correlation between saturation current and the starting current, the anomalous frequency variation with the d.c. current, the dynamic stability and frequency jumps.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z.: 621.315.24 : 621.391.82

EFECTE PERTURBATOARE ALE LINIILOR ELECTRICE AERIENE (PERTURBAŢII ŞI ZGOMOT ACUSTIC)

D. CRISTESCU, MARILENA UNGUREANU, IOANA DOROBANŢU, P. POSTOLACHE *

Se prezintă anumite aspecte ale impactului liniilor electrice aeriene de 220 kV şi de 400 kV din România asupra mediului ambiant (perturbaţii radioelectrice şi zgomot acustic). Pe baza măsurătorilor efectuate pe linia experimentală a laboratorului de înaltă tensiune din IPB, se pun în evidenţă parametrii caracteristici ai fenomenelor perturbatoare menţionate.

Profilul transversal al cîmpului perturbator al unei linii electrice aeriene reprezintă variaţia acestuia cu depărtarea faţă de axul liniei. Profilul transversal prezintă un deosebit interes în aprecierea modelului de atenuare al cîmpului perturbator în vecinătatea liniei, fapt absolut necesar la stabilirea culoarului de perturbaţii al unei linii electrice aeriene.

În anul 1980 au fost efectuate pe panoul modelabil de linie de la IPB un număr mare de măsurători de cîmp perturbator care au urmărit evidenţierea influenţei diverşilor parametri asupra nivelului perturbator (NP) ca de exemplu : cîmpul la suprafaţa conductoarelor, condiţiile meteorologice, distanţa faţă de linie, componentele de diverse frecvenţe.

Efectuate în diverse zile ale anului, la diferite momente ale zilei, aceste valori permit urmărirea atît a variaţiilor sezoniere, cît şi a variaţiilor zilnice.

1. Determinarea experimentală a N. P. Prelucrare statistică

Cunoaşterea tuturor elementelor de impact al liniilor de înaltă tensiune asupra spaţiului din jurul lor reprezintă o contribuţie la rezolvarea problemei actuale de reducere a poluării mediului înconjurător.

Principalul mod în care instalaţiile de 220—400 kV influenţează calitatea mediului înconjurător se datoresc apariţiei descărcării corona pe conductoarele liniilor de transport.

Manuscris primit la data de 1 iulie 1981

* Prof. dr. ing.; Şef lucrări dr. ing., Catedra Reţele electrice; Şef lucrări dr. ing., Catedra Electrotenhică ; Şef lucrări ing., Catedra Reţele electrice

Egretele corona duc la apariţia unor curenţi de impuls care se propagă în lungul conductorului şi care constituie cauza perturbaţiilor. Componentele spectrale ale impulsurilor se comportă diferit, corespunzător lungimii de undă care le este asociată.

Atît timp cît lungimea de undă a acestora este mare faţă de dimensiunile transversale ale liniei, se poate neglija propagarea transversală a potenţialelor. În această situaţie se poate considera că acestei componente spectrale de curent i se poate asocia un sistem de două cîmpuri ortogonale (unul electric, celălalt magnetic) care se propagă în lungul liniei şi care formează o undă plană, ghidată, al cărei vector Poynting este paralel cu linia. Atenuarea în cursul acestei propagări fiind slabă, cîmpul perturbator apare ca rezultat al suprapunerii efectelor tuturor egretelor repartizate în lungul liniei.

Determinările făcute pe panoul modelării de linie au drept criteriu de echivalenţă cu instalaţiile reale, existenţa aceluiaşi cîmp electric superficial.

Astfel, pentru stîlpul portal de 400 kV echipat cu două conductoare pe fază de cîte 450 mm² OL—AL, cîmpul maxim apare pe faza mediană; valorile de cîmp superficial pentru cele trei faze vor fi:

$$E_2[\mathrm{kV/cm}] = 0{,}0764\,\frac{U_{\mathrm{max.serv}}[\mathrm{kV}]}{\sqrt{3}}$$

$$E_1 = E_3[\mathrm{kV/cm}] = 0{,}0719\,\frac{U_{\mathrm{max.serv}}[\mathrm{kV}]}{\sqrt{3}}$$

Dat fiind configuraţia nesimetrică a liniei trifazate experimentale (în momentul măsurătorilor faza laterală stînga 4 × 450 mm² OL—AL, faza mediană 2 × 450 mm² OL—AL, faza laterală dreapta 2 × 450 mm² OL—AL, avînd înălţimea diferită de cea mediană) matricea capacităţilor este nesimetrică, şi anume:

$$[C] = \begin{bmatrix} 11{,}578 & -0{,}147 & -0{,}445 \\ -\ 0{,}1474 & 9{,}9 & -0{,}1474 \\ -\ 0{,}445 & -1{,}474 & 9{,}52 \end{bmatrix} \mathrm{pF/m}$$

Se pot stabili valorile de tensiune pentru care gradientul superficial al conductoarelor liniei experimentale este acelaşi cu cel al fazelor liniilor reale:

E_{max_2}[kV/cm]	U_{apl}[kV]
18,548	283
20,403	311

Întrucît variaţiile N.P. în special în funcţie de condiţiile meteorologice reprezintă o condiţie cu un puternic caracter aleator, stabilirea unor rezul-

tate finale corecte este posibilă numai pe baza prelucrării statistice a măsurătorilor, prin care se fixeze valoarea medie, ca cea mai probabilă valoare, abaterea standard, sau, distribuția statistică a valorilor.

De aceea, valorile experimentale obținute au fost grupate după dependența față de unul din parametrii urmăriți (umiditate, presiune, temperatură, gradient). Interesează, de asemenea, și nivelul perturbator ca valoare medie a tuturor valorilor măsurate, indiferent de categoria de timp, pe nivele de gradient superficial.

Acest mod de prelucrare a fost adoptat atît la obținerea profilului transversal al N.P. (variația cu distanța față de axul liniei) cît și la ridicarea spectrului de frecvență (variația N.P. cu frecvența).

Cîmpul perturbator a fost determinat conform recomandărilor Comitetului Internațional de studii a perturbațiilor radiofonice (CISPR) cu ajutorul unei antene de 2 m înălțime, amplasată în vecinătatea liniei. Aparatul de măsură (care răspunde recomandărilor CISPR) — tip B — 60400, fabricație Siemens.

Nivelul perturbator se definește ca :

$$NP[dB] = 20 \log \frac{E_p}{E_{p0}}$$

unde — $E_{p0} = 1\mu$ V/m

Linia electrică aeriană experimentală a fost adaptată la o extremitate, și în gol la cealaltă.

1.1. — O primă informație asupra N.P. se obține prin trasarea profilului transversal al cîmpului perturbator, cu ajutorul valorilor medii ale tuturor valorilor obținute experimental pe perioada măsurătorilor, indiferent de categoria de timp, pentru două nivele de gradient superficial: $E_{max,n}$ și 1,1 $E_{max,n}$ (fig. 1 și 2).

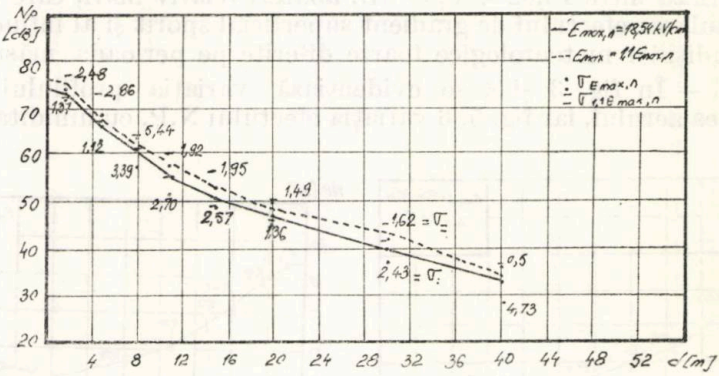


Fig. 1. — Profilul transversal al cîmpului perturbator

Abaterea medie patratică se grupează între 1,563 și 13,883 dB, cele mai mari abateri apărînd la distranțe mari față de conductor (de 30 — 40m), ceea ce se explică prin preponderența zgomotului local față de nivelul perturbator corona.

La un gradient de 1,1 $E_{max,n}$ valorile măsurate sînt mult mai uniforme, ele grupîndu-se în jurul valorii medii cu abateri reduse, de 0,51 ÷ 5,442 dB, ceea ce se explică prin generalizarea şi amplificarea fenomenului corona în lungul conductorului odată cu creşterea cîmpului electric superficial.

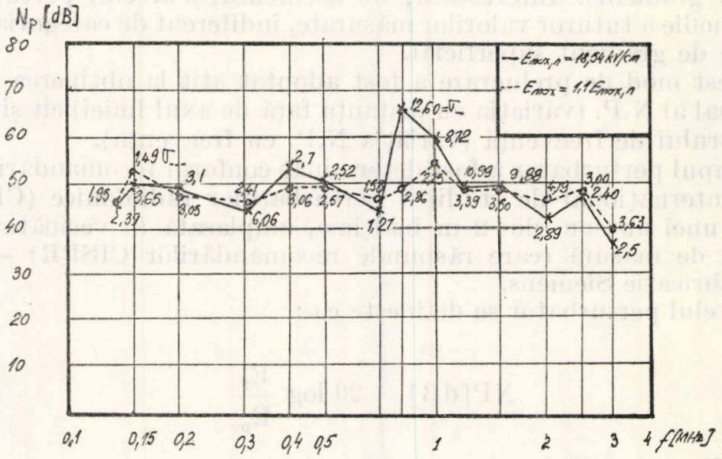


Fig. 2 — Spectrul de frecvenţe al cîmpului perturbator

Spectrul de frecvenţă al N.P. prezintă tendinţa de scădere cu creşterea frecvenţei la ambele gradiente superficiale. Maximile pronunţate în jurul valorii de 0,7 MHz şi 1 MHz se datoresc vecinătăţii faţă de posturile de radio Bucureşti.

Abaterile standard pentru spectru la gradientul superficial de 1,1 $E_{max,n}$ variază între 15,62 ÷ 8,65 dB, abateri relativ mari, care se explică prin cumularea efectului de gradient superficial sporit şi al influenţei efectului condiţiilor meteorologice foarte diferite pe perioada măsurătorilor.

1.2. — În fig. 3 şi 4 se evidenţiază variaţia profilului N.P. cu umiditatea aerului, iar fig. 5, 6 variaţia efectului N.P. cu umiditatea.

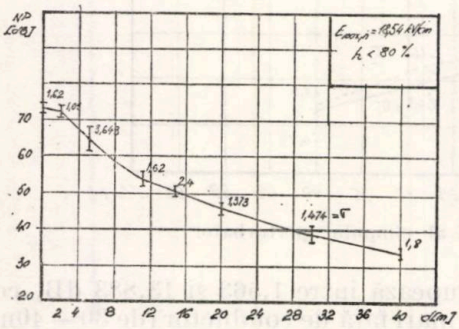


Fig. 3

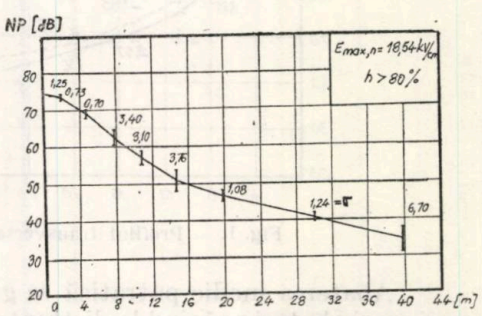


Fig. 4

Fig. 3, 4 — Variaţia profilului transversal al cîmpului perturbator cu umiditatea

Variațiile de umiditate s-au împărțit în două mari categorii

$h < 80\%$ — care corespunde timpului uscat

$h > 80\%$ — care corespunde timpului umed

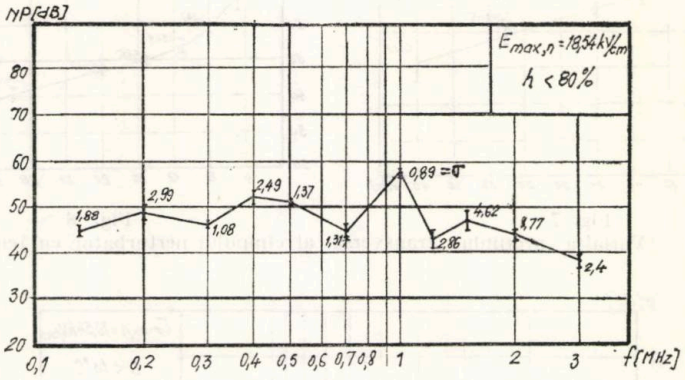


Fig. 5

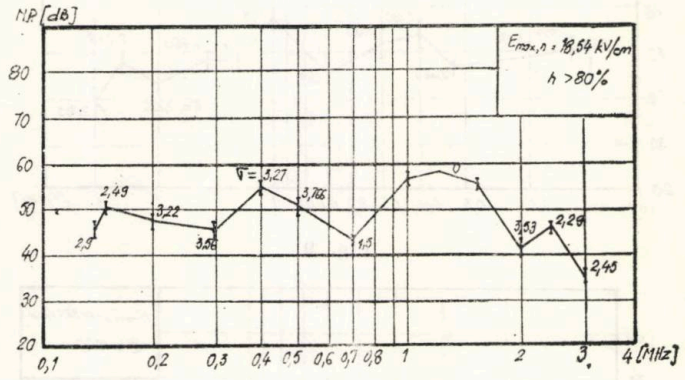


Fig. 6

Fig. 5, 6 — Variația spectrului de frecvențe al cîmpului perturbator cu umiditatea

Nu s-au observat variații puternice ale profilului lateral cu umiditatea. Modificarea umidității cu 10 % duce la modificarea N.P. cu 2—3 dB.

Abaterea standard scade la creșterea umidității; aceasta se explică prin amplificarea descărcării corona odată cu creșterea umidității aerului.

Spectrele de frecvență indică creșterea N.P. odată cu umiditatea la orice nivel de frecvență, ceea ce se explică prin faptul că impulsurile de curent corona injectate în linie prezintă aceleași caracteristici de frecvență independent de intensitatea fenomenului.

1.3. — Fig. 7 și 8 prezintă variația profilului N.P. cu temperatura mediului ambiant, iar fig. 9, 10 prezintă variația spectrului N.P. cu temperatura. Temperatura variind între $0 \div 20°C$ domeniul de variație a fost împărțit în două paliere : $t < 10°C$ și $t > 10°C$.

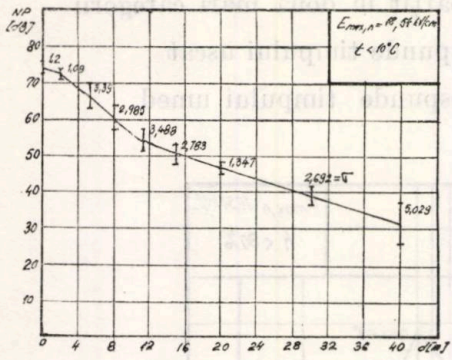


Fig. 7

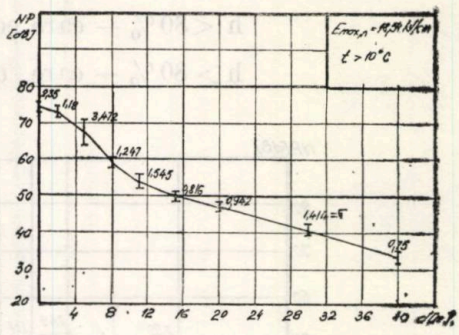


Fig. 8

Fig. 7, 8 — Variația profilului transversal al cîmpului perturbator cu temperatura

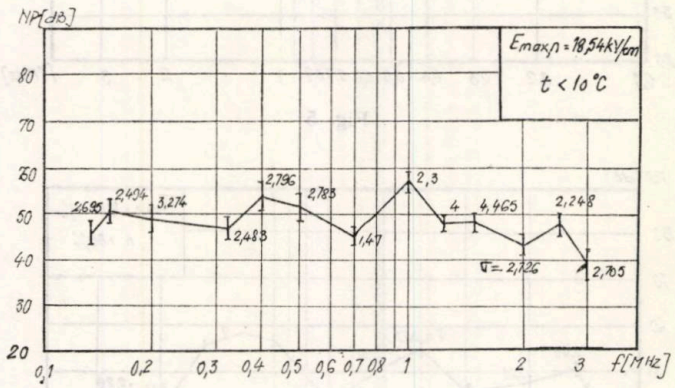


Fig. 9

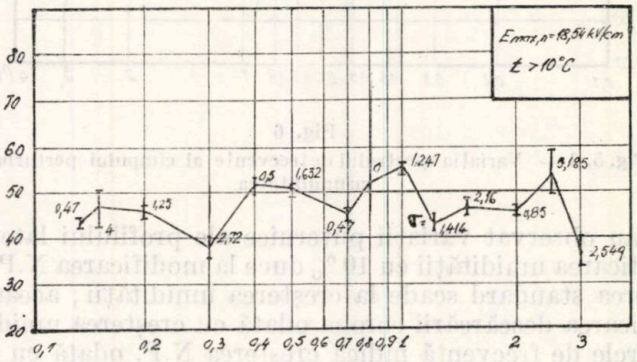


Fig. 10

Fig. 9, 10 — Variația spectrului de frecvențe al cîmpului perturbator cu umiditatea

În general creșterea de temperatură conduce la micșorarea cîmpului perturbator pentru orice frecvență (fig. 9, 10). Variațiile abaterii standard sînt de ordinul a 3 ÷ 5 dB.

În timpul măsurătorilor s-a observat că, pe timp uscat, în timpul amiezei, valoarea N.P. este mai mare de cea din restul zilei. Maximul de N.P. se atingea în jurul orei 14,00.

Se observă că pentru frecvența de 0,5 MHz, diferența dintre valorile de N.P. la diferite paliere de umiditate ca și de temperatură nu sînt foarte pronunțate; aceasta implică urmărirea mai atentă a N.P. la această frecvență pe perioade lungi de timp.

1.4. — Deși nu au fost efectuate măsurători cantitative pentru viteza vîntului, în timpul măsurătorilor s-a putut constata modul în care vîntul mai puternic sau mai slab influențează valorile de N.P.

Astfel, la un vînt puternic dar nu în rafale, în cursul unei măsurători complete (prin măsurători complete înțelegînd trasarea unui profil transversal și a unui spectru) nu se observă modificări mai mari de + 1dB ale N.P. În schimb, la vînt cu rafale puternice apare instabilitatea N.P. cu creșteri bruște și foarte puternice ale valorilor. Această instabilitate influențează aprecierea valorilor indicate de aparat și face ca la unele măsurători abaterea standard să rezulte mai mare decît la celelalte. Acest aspect al influenței cantitative a vîntului necesită încă o serie de precizări cantitative.

2. Zgomotul acustic pe LEA

Zgomotul acustic își are originea în descărcările incomplete care au loc la suprafața conductoarelor după apariția descărcării corona. El se datorește suprapunerii aleatoare staționare a efectelor sonore ale descărcărilor din diferite puncte ale liniei, aceste efecte sonore fiind de fapt unde de șoc acustic care se produc prin antrenarea ionilor în cîmpul electric din jurul conductoarelor.

Fiind generat de descărcarea corona, zgomotul acustic este influențat de aceiași factori ca și aceasta : condiții meteorologice, parametri geometrici și electrici ai liniei. Zgomotul acustic produs de o linie se accentuează deci pe timp ploios, cînd picăturile de apă acumulate pe conductoare constituie puncte în care cîmpul electric atinge valori mari. Dar în mod practic acest zgomot nu este cu necesitate mai jenant deoarece este „mascat" de zgomotul picăturilor de ploaie.

În funcție de intensitatea și durata lor, zgomotele pot produce efecte de gravitate diferită variind de la iritare nervoasă pînă la surditate. În cazul liniilor electrice aeriene zgomotul, avînd intensitate redusă, devine nociv prin efectele sale cumulative asupra sistemului nervos, în special atunci cînd se lucrează sub tensiune.

Utilizarea tot mai largă a liniilor electrice de înaltă și foarte înaltă tensiune impune — ca încă din faza de proiectare — să se ia în considerare zgomotul produs de descărcarea corona pentru a se lua măsurile corespunzătoare de reducere a nocivității acestuia.

Pe baza unui număr mare de cercetări, prelucrate statistic după criteriul nocivității asupra organismului uman, Organizația Internațională de Standardizare (ISO) — Comitetul TC — 43 — a elaborat recomandări cu privire la protejarea auzului și la caracterul deranjant al acțiunii zgomotului în condiții date.

În conformitate cu aceste recomandări, normarea zgomotelor se face cu ajutorul nomogramei „Nivel de presiune acustică dB în funcție de frecvență Hz" care are drept parametru criteriul de zgomot C_z cu valori cuprinse între 0 și 130.

Utilizarea criteriului de zgomot necesită cunoașterea spectrului de frecvență al zgomotului analizat, dar pentru aprecierea caracterului

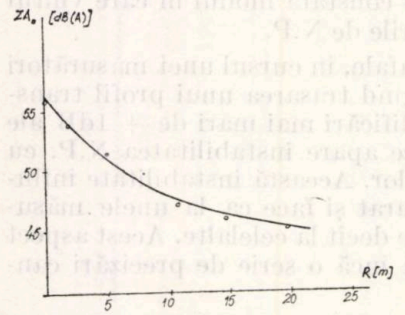


Fig. 11 — Profilul transversal al zgomotului acustic produs de linia monofazată

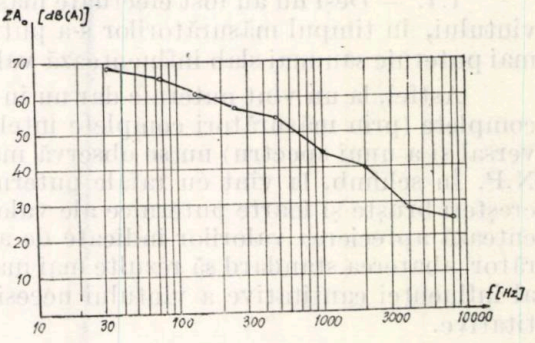


Fig. 12 — Spectrul de frecvență al zgomotului acustic produs de linia monofazată

nociv al acestuia din urmă este necesar să se țină seama și de alți factori ca : modul de acțiune al zgomotului, repetabilitatea și previzibilitatea lui.

În cadrul programului de încercări de pe platforma exterioară a laboratorului de TTI din Institutul Politehnic București, s-au efectuat măsurători de zgomot acustic pe linia experimentală, în alimentare monofazată echipată cu diferite tipuri de conducere și pentru diferite tensiuni. S-a utilizat un sonometru de precizie tip SST—4F—LEA (Franța), măsurătorile realizîndu-se în conformitate cu metodologia în vigoare. Cu această ocazie s-au înregistrat atît zgomotul acustic ZA_0 în dB(A), cît și spectrul de frecvență al acestuia.

În fig. 11 se dă spre exemplificare profilul transversal și în fig. 12 spectrul de frecvență al zgomotului acustic produs, la tensiunea nominală, de linia monofazată echipată cu un fascicul 3 × 450 mm² 01—A1. Aceste date pot fi folosite în continuare pentru estimarea zgootului produs de linia trifazată simplu sau dublu circuit.

Concluzii

Prezenta cercetare este impusă de actualitatea problemei privind determinarea nivelului perturbator radioelectric și a zgomotului acustic generat de liniile electrice aeriene de înaltă tensiune, în vederea stabilirii culoarului perturbator al unei linii, necesar alegerii traseului acesteia din faza de proiectare.

Preocupările din țara noastră din acest domeniu se înscriu interesului manifestat pe plan mondial (de exemplu în țări ca : URSS, Suedia, Polonia, Franța, Ungaria, SUA, ș.a) pentru reducerea efectelor poluante ale liniilor electrice aeriene.

BIBLIOGRAFIE

1. *** — CIGRE — Perturbations engendrées par l'effet couronne des réseaux de transport Déscription des phénomènes. Guide pratique de calcul. Paris 1974.
2. *Gary, C, Moreau, M.*, L'effet couronne en tension alternative. Eyrolles, Paris, 1976.

Effets perturbateurs des lignes électriques aériennes. Perturbations et bruit acoustique

On présente certains aspects de l'impact des lignes électriques aériennes de 220 kV et 400 kV de Roumanie sur l'environnement (perturbations radioélectriques et bruit acoustique). Les résultats des mesures effectuées sur la ligne expérimentale du laboratoire de haute tension de l'IPB mettent en évidence les paramètres caractéristiques des effets perturbateurs mentionnés.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

CENTRALE ELECTRICE

C.Z.: 621.316.7
621.634 : 622.323

VALOAREA ECHIVALENTĂ PENTRU CALCULUL PIERDERILOR A CURENTULUI ABSORBIT DE MOTOARELE SONDELOR PETROLIFERE ÎN POMPAJ

P. BUHUȘ, GH. COMANESCU*

Valorile efective ale curenților absorbiți de sondele în pompaj prezintă o mare diversitate de variații ciclice.

Corespunzător acestor condiții se propune un model matematic pentru determinarea curentului mediu pătratic de calcul al pierderilor de energie electrică. Pe această bază se propune apoi o metodă simplă care permite o estimare suficient de corectă a pierderilor de energie din rețelele electrice petrolifere.

După o primă perioadă eruptivă, în continuare extracția țițeiului se face ani în șir prin pompare. În acest scop se folosesc pompe cu piston și dublă acțiune, a căror acționare se face cu motor asincron avînd rotorul în scurtcircuit.

Între motorul electric și instalația de pompare, printr-un reductor de turație este intercalat un dispozitiv cu contragreutăți care are rolul de a contribui la aplatisarea variațiilor de sarcină absorbită din rețea.

Totuși, chiar și în aceste condiții valoarea curentului absorbit de motor prezintă variații adeseori importante.

Cu privire la aceste variații ale curentului sînt de subliniat următoarele două elemente caracteristice:

— *alura de variație este specifică fiecărei sonde în parte* și, în lungul unor perioade mai îndelungate, se poate modifica în funcție de numeroși parametri aleatorii de care depinde regimul de extracție al sondei;

— *variația curentului se repetă ciclic* durate relativ îndelungate, un astfel de ciclu corespunzînd unei rotații complete a contragreutăților.

Cu ajutorul ampermetrului, electricienii din schele pot înregistra în cadrul unui ciclu *cel mult patru valori efective* ale curentului: două valori maxime, de regulă inegale, pe care le vom nota prin $I_2 > I_4$ și respectiv două valori minime notate în figura 1 prin I_1 și I_3.

Cu rare excepții, *curenții minimi* I_1 *și* I_3 *au valori apropiate.* Ca urmare, în practica schelelor petrolifere de obicei se admite o aceeași

Manuscris predat redacției la data de 17 iunie 1981
* Conf. dr. ing.; Șef lucrări ing. Catedra Centrale electrice.

mărime I_m pentru valorile efective minime I_1 și I_3 ale unui ciclu de variație al curentului.

În acest fel, un ciclu se consideră caracterizat prin 3 valori reprezentative de curenți: două valori maxime I_2 și I_4, respectiv o aceeași valoare I_m pentru cele două minime $I_1 < I_m < I_3$.

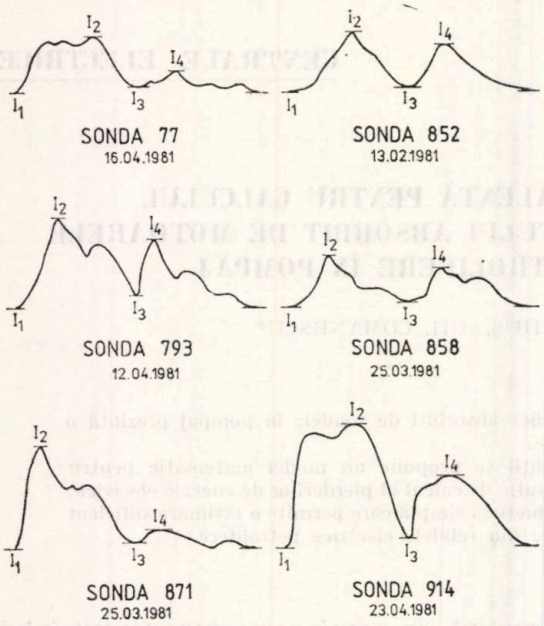


Fig. 1 — Electrograme ridicate de Trustul Petrolului Moinești.

Pe lîngă această primă aproximație — de regulă neglijabilă — avînd în vedere valorile *mici și totodată apropiate* ale curenților I_1 și I_3 — se mai face frecvent o a doua aproximație prin determinarea curentului echivalent constant absorbit de motor cu relația:

$$I_{e3} = \frac{I_2 + I_4 + I_m}{3}. \quad (1)$$

În acest fel se neglijează dubla trecere prin minim în cadrul fiecărui ciclu de variație al curentului și, ca urmare, se supraestimează atît valoarea echivalentă a curentului constant, cît și pierderile datorite tranzitului său prin rețeaua de distribuție.

În intenția de a evita supraestimarea pierderilor din rețeaua de distribuție, în lucrarea de față se propune *aproximarea curentului echivalent constant* absorbit de motorul unei sonde în pompaj *prin media aritmetică a tuturor celor patru valori de curent caracteristice pentru un ciclu*:

$$I_{e4} = \frac{I_2 + I_4 + 2I_m}{4}. \quad (2)$$

Dacă se consideră la rîndul ei valoarea minimă comună I_m ca o medie aritmetică

$$I_m = \frac{I_1 + I_3}{2}, \quad (3)$$

în final rezultă:

$$I_{e4} = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_3}{4}. \quad (4)$$

Ambele metode de calcul — concretizate prin relațiile (1) și (4) — prezintă avantajul simplității atît în ceea ce privește măsurătorile în teren cît și pentru calculele ulterioare ale pierderilor din rețelele petrolifere.

În vederea unor aprecieri cu privire la aproximațiile la care pot conduce aceste două metode practice, în paragraful următor este stabilit un model matematic pentru determinarea unui curent constant de calcul al pierderilor I_{cp}. Mult mai laborios, acest model își propune în principal două scopuri:

— să permită *reflectarea în esență* a diversității alurilor de variație ale curenților întîlniți în practică;

— să conducă la *o estimare relativ corectă a pierderilor de energie* electrică din rețelele schelelor petrolifere.

2. Modelul matematic pentru determinarea curentului mediu pătratic de calcul al pierderilor I_{cp}

2.1. *Aproximarea alurii curentului* I_{cp}

Aproximarea s-a făcut pe baza examinării unui mare număr de electrograme ridicate de Trustul Petrolului Moinești.

În fiecare ciclu de variație al curentului se constată două semiperioade de durată egală dar, de regulă, cu aluri de variație și valori maxime I_2 și I_4 diferite.

Alura de variație a unei semiperioade poate fi în esență aproximată printr-un trapez cu laturile ascendente cel mai adesea concave și, în cazuri mult mai rare, practic rectilinii sau ușor convexe (fig. 2).

Duratele valorilor maxime $I_2 > I_4$ pot fi apreciate printr-un procentaj — notat cu p — din durata $0{,}5T$ a unei semiperioade, de exemplu: $t_2 = 0{,}5\ p_2 T$.

Într-un astfel de interval se poate considera că valoarea curentului maxim se menține practic constantă. În majoritatea cazurilor procentajul este de ordinul $p = 5 \ldots 10\%$. Uneori se înregistrează și procentaje mai scăzute, trapezul curbiliniu reducîndu-se practic la un triunghi curbiliniu.

În cazuri foarte rare durata maximului se lungește, procentajul atinge valori de ordinul $p = 40 \ldots 50\%$ și totodată laturile ascendente devin practic rectilinii.

Pentru a exprima analitic variația valorii efective a curentului din lungul laturilor ascendente am ales relația:

$$I(t) = a + bt^x. \tag{5}$$

Pentru $x = 1$ relația (5) exprimă o variație liniară în timp.

Pentru $x > 1$ relația (5) reflectă destul de fidel alurile concave din electrogramele ridicate de Trustul Petrolului Moinești. În majoritatea cazurilor la aceste electrograme viteza de variație a curentului este inițial mai redusă, fiind apoi în creștere pe măsură ce curentul se apropie de maxim (fig. 3).

Adeseori laturile ascendente prezintă șei care nu au putut fi însă reflectate în cadrul modelului matematic. Totuși, analizînd numeroase

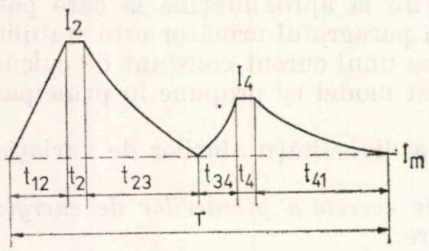


Fig. 2

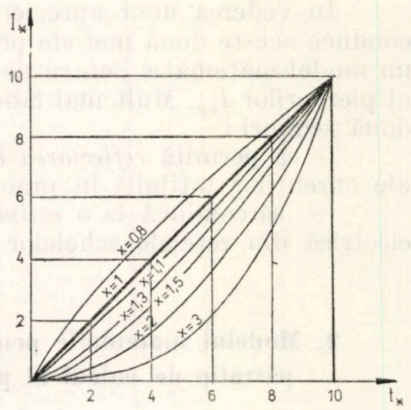


Fig. 3 — Aluri de variaţie ale curentului $I(t)=t^x$ pentru diverse valori ale exponentului x

astfel de laturi concave — cu sau fără şei — alura lor poate fi, în medie, caracterizată prin relaţia (5), considerînd exponentul $x = 1, 1 \ldots 1{,}5$.

În foarte rare cazuri concavitatea laturilor ascendente rezultă mai pronunţată şi, ca urmare, exponentul x poate avea valori mai ridicate, de exemplu, de ordinul $2 < x < 3$.

Rarele aluri uşor convexe pot fi exprimate fie prin drepte ($x = 1$) şi o mică supraestimare a procentajului p, fie prin valori subunitare ale exponentului x, de exemplu $x = 0{,}9 \ldots 0{,}7$.

2.2. *Relaţia generală de calcul al curentului mediu pătratic* I^2_{cp}

Conform condiţiei de egalitate a pierderilor de energie pe o aceeaşi rezistenţă ohmică şi un acelaşi interval de timp T, se poate scrie:

$$I^2_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2_{(t)}\,dt. \tag{6}$$

În cele ce urmează, durata unui ciclu de variaţie a curentului o vom considera egală cu o unitate, iar duratele sale componente din figura 2 le vom presupune exprimate sub formă de fracţiuni din această unitate. În aceste condiţii:

$$t_{12} + t_2 + t_{23} = t_{34} + t_4 + t_{41} = 0{,}5. \tag{7}$$

Notînd

$$t_2 = 0{,}5\ p_2; \tag{8a}$$

$$t_4 = 0{,}5\ p_4; \tag{8b}$$

$$I^2_{mp12} = \frac{1}{t_{12}}\int_0^{t_{12}} I^2_{(t)}\,dt, \tag{8c}$$

relaţia (6) devine:

$$I_c^2 = I_{123}^2 + I_{341}^2 = (I_{mp12}^2 t_{12} + 0{,}5\, p_2 I_2^2 +$$

$$+ I_{mp23}^2 t_{23}) + (I_{mp34}^2 t_{34} + 0{,}5\, p_4 I_4^2 + I_{mp41}^2 t_{41}). \qquad (9)$$

2.3. *Curentul mediu pătratic I_{mp} corespunzător unei laturi ascendente*

Fie cazul unui curent avînd alura de variaţie pe o durată „D" definită prin relaţia (5). În aceste condiţii relaţia (6) devine:

$$I_{mp}^2 = \frac{1}{D}\int_0^D (a + bt^x)^2\, dt. \qquad (10)$$

După integrare se obţine:

$$I_{mp}^2 = a^2 + \frac{2}{x+1}\, abD^x + \frac{1}{2x+1}\,(bD^x)^2. \qquad (11)$$

În cele ce urmează vom particulariza rezultatul obţinut în cazul ramurii cu durata $D = t_{12}$ şi curentul în creştere de la valoarea minimă I_m pînă la valoarea maximă I_2. În acest caz:

$$a = I_m;$$

$$bt_{12}^x = I_2 - I_m$$

şi deci:

$$I_{mp12}^2 = I_m^2 + \frac{2}{x+1}\, I_m(I_2 - I_m) + \frac{1}{2x+1}\,(I_2 - I_m)^2.$$

Restrîngînd primii doi termeni rezultă:

$$I_{mp12}^2 = \frac{I_m^2(x-1) + 2I_m I_2}{x+1} + \frac{(I_2 - I_m)^2}{2x+1}$$

şi în final se obţine:

$$I_{mp12}^2 = \frac{(x+1)\, I_2^2 + 2x^2 I_m + 2xI_2 I_m}{(x+1)(2x+1)}. \qquad (12)$$

În particular, pentru cazul unei variații liniare, respectiv pentru $x = 1$, relația (12) devine:

$$I^2_{mp12} = \frac{I_2^2 + I_m^2 + I_2 I_m}{3}. \tag{13}$$

Examinînd relația (12) se poate observa ușor că în ipoteza celor doi curenți minimi ai unui ciclu egali cu valoarea curentului I_m definit prin expresia (3) rezultă:

$$I^2_{mp12} = I^2_{mp23}, \tag{14}$$

respectiv

$$I^2_{mp34} = I^2_{mp41} = \frac{(x+1) I_4^2 + 2x^2 I_m + 2x I_4 I_m}{(x+1)(2x+1)}. \tag{15}$$

2.4. *Relația curentului mediu pătratic de calcul al pierderilor* I^2_{cp}

Termenii relației cu caracter general (9) sînt grupați în cadrul a două paranteze care corespund celor două semiperioade ale unui ciclu de variație al valorii efective $I(t)$. Pe baza egalității (14) și apoi a relațiilor (7) și (8) suma termenilor corespunzători unei semiperioade devine:

$$I^2_{123} = 0{,}5p\, I_2^2 + I^2_{mp12}(t_{12} + t_{23}) =$$

$$= 0{,}5\, p_2 I_2^2 + 0{,}5\,(1 - p_2)\, I^2_{mp12}. \tag{16}$$

În continuare, folosind relația (12) se obțin succesiv:

$$I^2_{123} = \frac{0{,}5\, p_2(x+1)[p_2\,(2x+1) + 1 - p_2]\, I_2^2}{(x+)(2x+1)} +$$

$$+ \frac{(1 - p_2)(x^2 I_m^2 + x I_2 I_m)}{(x+1)(2x+1)}.$$

respectiv

$$I^2_{123} = \frac{(x+1)(p_2 x + 0{,}5)\, I_2^2 + x(1 - p_2)(x I_m + I_2)\, I_m}{(x+1)(2x+1)}. \tag{17}$$

Suma termenilor corespunzători celei de a doua semiperioade, respectiv I^2_{341}, are aceeași formă ca și expresia (17), unica deosebire constînd în faptul că de această dată curentul maxim I_2 se înlocuiește cu valoarea maximă I_4.

Relația curentului mediu pătratic de calcul al pierderilor se obține însumînd cele două componente ale sale:

$$I^2_{cp} = I^2_{123} + I^2_{341} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)}\{(x+1)\,[(p_2 x + 0{,}5) I_2^2 +$$

$$+ (p_4 x + 0{,}5) I_4^2] + x I_m [(1 - p_2)(x I_m + I_2) +$$

$$+ (1 - p_4)(x I_m + I_4)]\}. \tag{18}$$

În cele ce urmează vom folosi exprimarea în mărimi relative a curenților maximi în raport cu valoarea minimă I_m, respectiv:

$$I_{*2} = \frac{I_2}{I_m}; \tag{19}$$

$$I_{*4} = \frac{I_4}{I_m}. \tag{20}$$

Totodată, avînd în vedere complexitatea relației (18), vom lua în considerare cazul particular în care duratele procentuale ale celor doi curenți maximi I_2 și I_4 sînt egale:

$$p_2 = p_4 = p. \tag{21}$$

În aceste condiții relația (18) devine:

$$I_{*cp} = \frac{I_{cp}^2}{I_m} = \frac{(x + 1)(px + 0{,}5)(I_{*2}^2 + I_{*4}^2)}{(x + 1)(2x + 1)} +$$

$$+ \frac{x(1 - p)(2x + I_{*2} + I_{*4})}{(x + 1)(2x + 1)}. \tag{22}$$

3. Compararea pierderilor estimate cu cele două metode practice și respectiv cu ajutorul curentului mediu pătratic I_{cp}^2

Avînd în vedere expresiile (2) și (3), în scopul acestor comparații s-au utilizat valorile următoarelor rapoarte proporționale cu mărimile pierderilor de energie dintr-un același tronson de rețea:

$$R_4 = \frac{I_{e4}^2}{I_{cp}^2} = \frac{\left(\frac{I_{*2} + I_{*4} + 2)}{4}\right)^2}{I_{*cp}^2} \tag{23}$$

și

$$R_3 = \frac{I_{e3}^2}{I_{cp}^2} = \frac{\left(\frac{I_{*2} + I_{*4} + 1}{3}\right)^2}{I_{*cp}^2}, \tag{24}$$

în care valoarea curentului mediu pătratic I^2_{*cp} se calculează cu relația (22). Pe rînd au fost variate valorile următorilor patru parametri:

— mărimile relative I_{*2} și I_{*4} ale curenților maximi între valorile 1 ... 4;

— exponentul x între valoarea $x = 1$, corespunzătoare unei variații liniare și respectiv $x = 1{,}5$ corespunzător unei aluri concave de variație a curentului;

— procentajul p — al duratei curenților maximi din durata unei semiperioade — între 0 și 50% în cazul variațiilor liniare și respectiv între 0 și 10% în cazul unor aluri de variație concave.

Valorile obținute pentru rapoartele R_4 și R_3 sînt sintetizate în tabelul 1.

Concluzii

1. Corespunzător tuturor cazurilor practice rezultă $R_4 < R_3$, respectiv pierderile de energie estimate cu media tuturor celor 4 curenți caracteristici ai unui ciclu — $I_{e4} = (I_1 + I_2 + 2I_m)/4$ — rezultă mai mici decît pierderile estimate cu ajutorul curentului echivalent $I_{e3} = (I_2 + I_4 + I_m)/3$.

2. În circa 85% din electrogramele ridicate de T. P. Moinești, curentul maxim $I_{*2} \leqslant 3$, iar laturile ascendente sînt practic liniare ($x \approx 1$, $p \approx 0$) sau concave ($1 < x < 1{,}5$ și $p \approx 0-5-10\%$).

În toate aceste cazuri erorile în estimarea pierderilor este de așteptat să se încadreze în intervalele:

$-10\% \ldots +10\%$ în calculele cu I_{e4};

$+10\% \ldots +50\%$ în calculele cu I_{e3}.

3. În celelalte cazuri, puțin frecvente — ale electrogramelor cu alură trapezoidală ($x \approx 1$ și $p \approx 40 \ldots 50\%$) sau a celor cu alură pronunțat concavă ($x \approx 2 \ldots 3$ și $p \approx 0 \ldots 5\%$) este de așteptat erorile în estimarea pierderilorsă rezulte mai ridicate, valorile lor putîndu-se înscrie în următoarele intervale:

$\pm (10 \ldots 40)\%$ în calculele cu I_{e4};

$-(10 \ldots 20)\%$ în cazul alurilor trapezoidale și $+(30 \ldots 100)\%$

în cazul alurilor pronunțat concave la calculele cu I_{e3}.

4. Estimarea pierderilor de energie din rețelele petrolifere folosind media I_{e4} a celor patru curenți caracteristici ai unui ciclu poate conduce în marea majoritate a cazurilor la rezultate mult mai apropiate de realitate în comparație cu calculele efectuate pînă în prezent cu media I_{e3} care ia în considerare doar una din cele două treceri prin minim din cadrul unui ciclu.

Tabelul 1

VALORILE RAPOARTELOR $R_4 = I^2_{e4}/I^2_{cp}$ ȘI $R_3 = I^2_{e3}/I^2_{cp}$

I_{*2}	I_{*4}	$x = 1$ (alura liniară)				$x = 1{,}5$ (alură concavă)				$x = 3$ (alura f. concavă)			
		$p = 50\%$		$p = 0$		$p = 10\%$		$p = 0$		$p = 5\%$		$p = 0$	
		R_4	R_3	R_4	R_3	R_4	R_3	R_4	R_3	R_4	R_3	R_4	R_3
1,0	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,5	1,00	0,868	0,933	0,980	1,054	0,996	1,071	1,028	1,105	1,085	1,166	1,107	1,191
	1,25	0,846	0,937	0,988	1,095	1,010	1,119	1,053	1,167	1,133	1,255	1,166	1,292
	1,50	0,815	0,928	0,987	1,123	1,014	1,153	1,068	1,216	1,171	1,333	1,215	1,383
2,0	1,00	0,750	0,853	0,937	1,067	0,963	1,096	1,025	1,166	1,132	1,288	1,182	1,345
	1,50	0,744	0,885	0,965	1,149	0,999	1,189	1,077	1,281	1,222	1,454	1,291	1,537
	2,00	0,711	0,877	0,964	1,190	1,002	1,237	1,098	1,355	1,278	1,578	1,370	1,691
2,5	1,00	0,658	0,783	0,890	1,059	0,920	1,095	1,005	1,196	1,153	1,372	1,231	1,465
	1,50	0,675	0,833	0,931	1,149	0,967	1,194	1,065	1,315	1,254	1,537	1,340	1,655
	2,00	0,667	0,849	0,946	1,204	0,986	1,255	1,097	1,397	1,307	1,663	1,422	1,810
	2,50	0,645	0,842	0,942	1,231	0,984	1,286	1,109	1,448	1,343	1,754	1,478	1,931
3,0	1,00	0,587	0,725	0,844	1,042	0,875	1,081	0,978	1,208	1,156	1,427	1,260	1,556
	1,50	0,615	0,783	0,893	1,136	0,930	1,183	1,043	1,328	1,249	1,590	1,369	1,743
	2,00	0,623	0,814	0,919	1,200	0,959	1,253	1,084	1,416	1,316	1,719	1,453	1,898
	2,50	0,616	0,822	0,927	1,238	0,970	1,295	1,105	1,476	1,359	1,815	1,514	2,022
	3,00	0,600	0,817	0,923	1,256	0,966	1,315	1,111	1,512	1,383	1,882	1,556	2,117
4,0	2,00	0,545	0,742	0,857	1,167	0,896	1,219	1,039	1,414	1,299	1,768	1,474	2,006
	4,00	0,543	0,783	0,893	1,286	0,935	1,346	1,106	1,593	1,422	2,047	1,651	2,377

Determination of the Equivalent Current for Energy Loss Calculations, Absorbed by the Electrical Motors Used in Pomping Wells

The efective values of the electrical currents absorbed by the pomping wells present a large diversity of cyclic variations. Any calculation based on these real variations is extremely difficult.

The purpose of this paper is to present a mathematical model for determination of the equivalent current for energy loss calculations. On this basis it is also proposed a simple and convenient method for a good approximation of energy losses in electrical networks associated with the pomping wells.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

AUTOMATICĂ

C.Z.: 681.32; 621.9

SISTEM CNC CU PRELUCRARE DISTRIBUTIVĂ PENTRU CONDUCEREA ADAPTIVĂ A MAȘINILOR UNELTE

TH. BORANGIU, R. DOBRESCU, T. IONESCU*

Abordarea problemei conducerii mașinilor unelte prin prisma tehnicii de calcul oferă soluții de perspectivă pentru problemele tehnico-economice specifice procesului de uzinare : conturarea bi- și tri-dimensională cu precizie impusă, optimizarea regimului de așchiere, programabilitatea fluxului de comutație și îmbunătățirea dialogului cu operatorul. Configurațiile de conducere de tip multiprocesor realizează integral funcțiile menționate ; prin puterea de calcul, flexibilitatea de interconectare și posibilitățile de extensie a memoriei programului piesă și a interfețelor cu motoarele principal și de avans structurile de comandă construite cu microprocesoare pot fi adaptate oricărui tip de mașină unealtă. Lucrarea prezintă particularitățile conducerii mașinilor unelte cu sisteme multimicroprocesor și descrie o configurație concretă, cît și funcțiile procesoare componente.

Introducere

Evoluția sistemelor de conducere a mașinilor unelte a fost caracterizată printr-o dinamică rapidă. Astfel, de la echipamentul de conducere specializat, avînd un obiectiv relativ modest — poziționarea, prelucrarea paralelă cu axele sau în cazul cel mai complex conturarea în $2^1/_2$ dimensiuni, —, care a dominat producția deceniului 6 și a atins apogeul la sfîrșitul celui de al 7-lea, s-a trecut la utilizarea calculatoarelor de proces — mai întîi calculatoarele de serie, cu software specializat și extensii hardware, cu memorie nevolatilă pe suport magnetic (primii 5 ani ai deceniului 8), apoi microcalculatoare specializate cu memorii semiconductoare (1976—1978) și s-a ajuns la structuri de conducere multimicroprocesor (1979—1981), cu memorie nevolatilă cu bule magnetice pentru stocarea programelor piesă (Ernst, 1980).

Particularități ale conducerii mașinilor unelte cu sisteme multiprocesor

Ca structură de conducere, un sistem multiprocesor oferă avantaje certe în raport cu un sistem numeric clasic de reglare automată, păstrînd atributele esențiale realizării deciziei pe baza comparației între un set de

Manuscris primit la data de 30 noiembrie 1981
* Șef lucrări dr. ing ; Șef lucrări dr. ing. ; Șef lucrări dr. ing., Catedra Automatică I

mărimi prescris prin program și un set de mărimi de reacție, furnizat de traductoare, care oferă informație despre dinamica desfășurării procesului.

Pentru stabilirea unei configurații optime pentru un sistem multiprocesor dedicat conducerii mașinilor unelte pot fi avute în vedere mai multe criterii :

a) Criteriul relațiilor dintre procesoare ; din acest punct de vedere se pot demarca trei configurații :

— sistem multiprocesor ierarhizat, la care există un procesor central de tip master și unul sau mai multe procesoare subordonate de tip slave. De regulă, procesul master deține magistrala sistemului. O astfel de structură este adecvată realizării funcției de conturare prin interpolare, în 2 sau 3 axe, și cuprinde un procesor master, care coordonează activitățile de achiziție și transfer de date, cît și de calcul matematic de corecție a datelor de contur achiziționate, un procesor slave de interpolare (PINT), capabil să genereze impulsurile de comandă pe două axe pentru generarea profilurilor liniare, circulare, parabolice, logaritmice și exponențiale, și două procesoare de reglare a turației motoarelor de avans, de curent continuu — procesoare de ax (PAX), ca în Fig. 1.

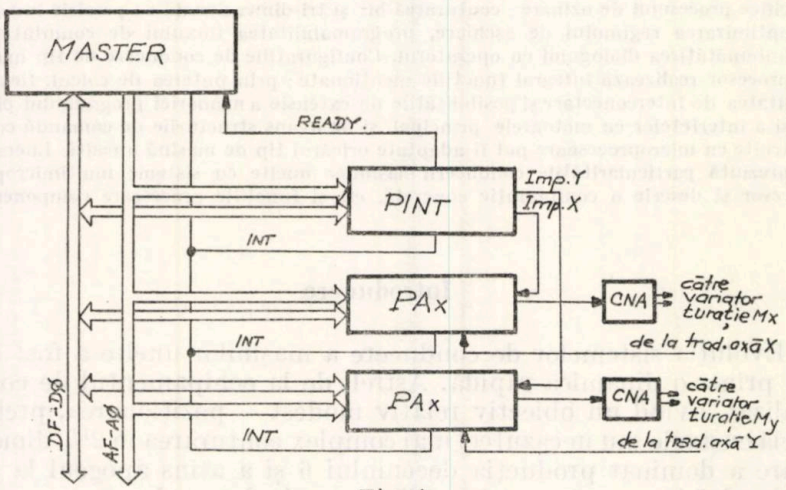


Fig. 1

Comunicația între procesoare este realizată printr-o magistrală de date și una de adrese de cîte 16 biți. După ce primește comenzile și datele corespunzătoare profilului real, PINT execută calculele interne de distribuție a impulsurilor pe axele X și Y ; la încheierea calculelor în timp real pentru segmentul de curbă programat, PINT emite o cerere de întrerupere INT către procesorul master, fiind gata pentru recepționarea unui nou set de date. Deși citirea registrelor de cote parțiale este posibilă, prin accesul procesorului master la o memorie comună, plasată în PINT, un indicator READY rămîne zero pe toată durata unei interpolări, informînd procesorul master că datele finale privind starea sistemului de conturare nu sînt încă disponibile.

Procesorul de interpolare lucrează pe o magistrală internă de date de 24 de biți, fiind capabil să asigure în felul acesta o precizie de calcul de interpolare de 1μm la un domeniu maxim de 8,3 m. Din considerente ce

ţin de viteza de operare şi de lungimea cuvîntului de date PINT este realizat cu componente din famila 3000.

Sistemele multiprocesor ierarhizate sînt folosite şi pentru coordonarea funcţionării unui grup de maşini unelte cu performanţe similare — CND cu sistem multiprocesor (Crossley, 1979).

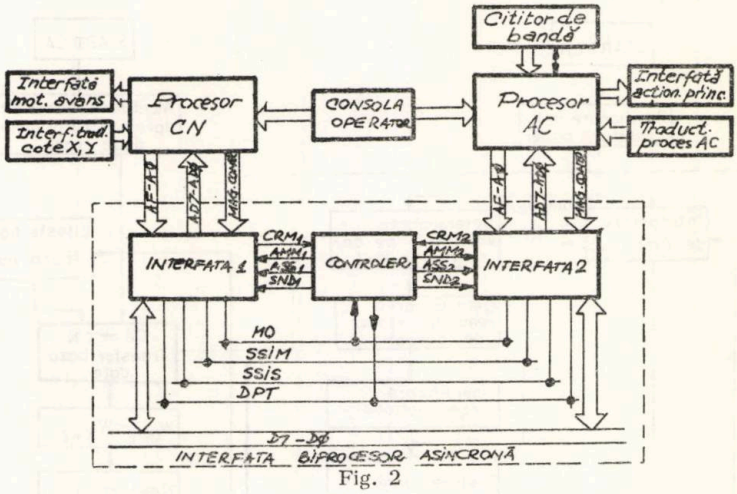


Fig. 2

— sistem cu procesoare de priorităţi egale, la care, două sau mai multe procesoare, împreună cu circuitele aferente, pot lucra împreună prin intermediul unei interfeţe de cuplare. O structură de acest tip este propusă de Siemens (Sinumerik System 8) la care pe o magistrală de 16 biţi de tip MULTIBUS sînt conectate trei procesoare cu unitatea centrală de tip 8086 (Gose, 1980).

O situaţie particulară pentru această a doua variantă o constituie configuraţia biprocesor cu ierarhie alternantă (Borangiu, 1980), propusă de autori pentru a permite prelucrarea paralelă a funcţiilor de conturare (CN) şi adaptare a intensităţii regimului de tăiere (CA), cu unităţi centrale de calcul de tip 8085 (Fig. 2).

Cele două procesoare lucrează simultan, comunicînd în mod asincron date între ele prin intermediul unei interfeţe specializate realizate pe principiul handshaking I/O. Fiecare procesor poate căpăta controlul asupra magistralei sistemului, devenind master (situaţie în care transmite date), sau se poate afla în poziţie de slave (situaţie în care primeşte date). Procesorul CN execută exclusiv calcul de interpolare, iar procesorul CA asigură achiziţia programului piesă de la cititorul de bandă şi calculul de adaptare on line a vitezei de avans şi a turaţiei axului principal. Transferul de date între cele două procesoare are ca scop reactualizarea datelor/frază program, necesare conturării, respectiv a datelor necesare calculului vitezei de avans optimale, care modifică frecvenţa de calcul a procesorului CN. Procesorul CN utilizează un sistem de operare care activează permanent trei fraze din programul/piesă. Pentru efectuarea în timp real a calculelor de corecţie (care se reduc la adunări, scăderi, interpolări fictive prin sumări şi testări repetate de transport), microprocesorul secţiunii CN este prevăzut cu extensie hardware, prin unitate aritmetică 8231.

Viteza tehnologică, materializată prin frecvența de calcul asigurată de ceasul de timp real al procesului CN (t_w), este calculată de procesorul CA, conform unei strategii de adaptare, prin care este extremizată productivitatea sau costul așchierii. Același program de adaptare asigură și optimizarea turației axului principal al mașinii. În figura 3 este prezentată organigrama programului monitor al sistemului.

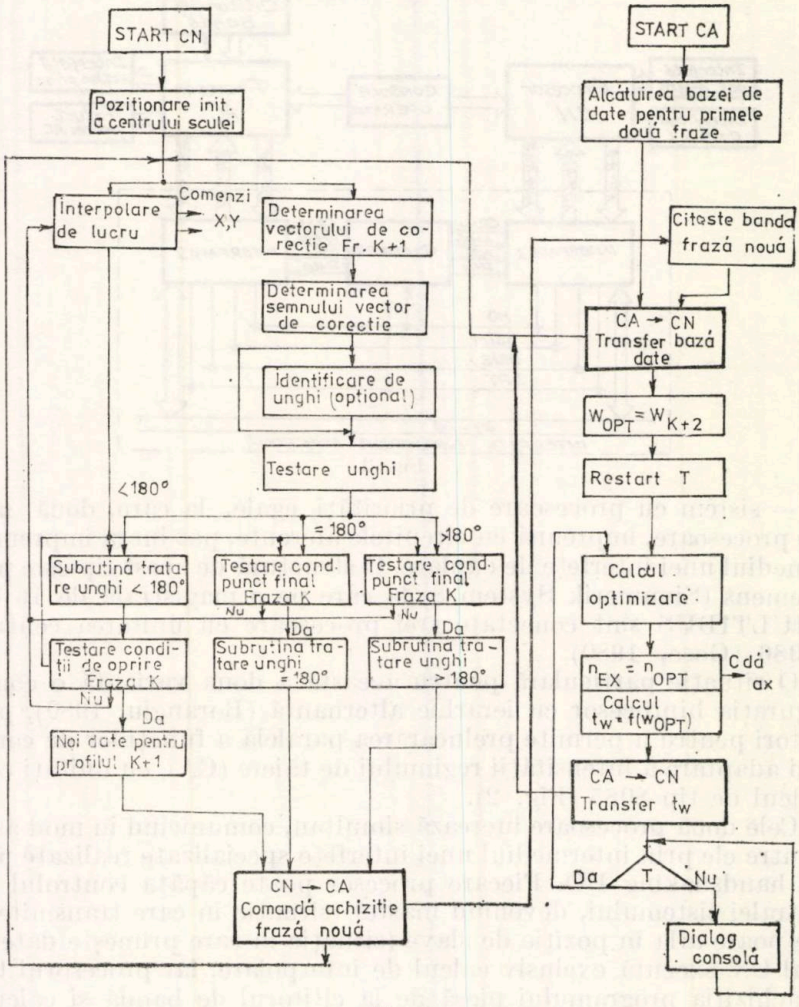


Fig. 3

Interfața asincronă conține un cuplor realizat sub forma unui automat secvențial sincron, ce asigură protocolul de comunicație, și cîte o interfață specifică fiecărei unități centrale; interfețele 1 și 2 identice constructiv și funcțional. Interfața este structurată parțial radial, parțial tip magistrale:

— liniile radiale sînt organizate astfel încît un dispozitiv comun (cuplorul) este comandat de cele două procesoare (sau le comandă) prin linii separate, dedicate direct fiecărui procesor;

— liniile organizate pe principiul magistralei (ieşirile din una din interfeţele standard pot comanda intrări corespunzătoare din cealaltă interfaţă) au conexiuni comune cu cele două procesoare din sistem;

— liniile organizate pe principiul magistralei, care creează magistrala de comunicaţie/date de 8 biţi bidirecţională, pe care informaţia are întotdeauna sensul de la master la slave.

Organizarea magistralelor este următoarea:

— magistrala de control constă din 4 linii: MO (Magistrală ocupată), SSIM (Semnal sincronizare master), SSIS (Semnal sincronizare slave) şi DPT (Depăşire timp), care controlează transferul de informaţie pe magistrala de date D7—DØ, cît şi negocierea situaţiei de depăşire a valorii maxime de timp permise pentru transfer;

— magistrala (bidirecţională) de date D7—DØ;

Organizarea radială cuprinde 4 linii de tip cuplor: $CRM_{1,2}$ (cerere magistrală), $AMM_{1,2}$ (acordare magistrală master), $ASS_{1,2}$ (acordare statut slave) şi $SND_{1,2}$ (semnal dezactivare normală), care controlează cererile asupra magistralei de date şi activităţile de acordare a poziţiilor de master şi slave. În figura 4 este prezentată schema interfeţei standard.

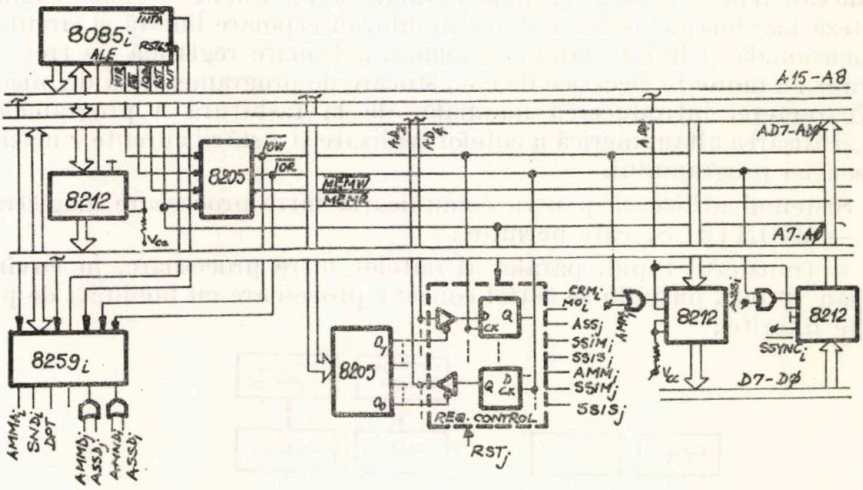


Fig. 4

— sistem multiprocesor cu prioritate variabilă, la care diferitele procesoare pot căpăta prioritate în funcţie de programul global de conducere a maşinii unelte.

b) Criteriul modului de interconectare a proceselor:

— sistem multiprocesor în inel, la care informaţia utilă este transferată de-a lungul magistralei în inel, preluată şi prelucrată de unul din procesoare în funcţie de îndeplinirea anumitor condiţii;

— sistem multiprocesor în reţea, la care se conectează pe magistrale comune un număr de procesoare diferite, cu posibilitatea cuplării oricăror două în vederea transferului de date. Configuraţia permite o comunicaţie rapidă între procesoare, criteriu decisiv în conducerea maşinilor unelte (Mathialagan, 1980).

c) Criteriul modului de prelucrare a datelor și instrucțiunilor :

— o singură instrucțiune, mai multe date — sistem rigid, care implică prelucrarea unor seturi de date simultan, după același algoritm ;

— mai multe instrucțiuni, mai multe date — sisteme care permit ca procesoarele să fie dotate cu algoritmi de prelucrare specifici conducerii complexe a mașinii unelte (Fuller, 1978).

Ca o concluzie, pentru conducerea numeric — adaptivă a procesului de așchiere, se consideră avantajoasă utilizarea de sisteme multiprocesor ce conțin mai multe procesoare cu priorități distincte, conectate în rețea, cu posibilitatea de prelucrare a mai multor instrucțiuni și a mai multor date, cu transfer direct între anumite procesoare, fără a implica magistrala (ex. între PINT și PAX).

Distribuirea funcțiilor în sisteme multimicroprocesor de conducere a mașinilor unelte

În figura 5 este prezentată arhitectura unui sistem multimicroprocesor conceput astfel încît să permită comanda unei mașini unelte ultraderformante de tip strung, freză sau mașină de rectificat, și să asigure precizie de calcul de interpolare 1μm la un domeniu maxim de ± 99999,999mm cu viteză maximă de așchiere de 10 m/min, interpolare liniară și circulară bidimensională și liniară tridimensională, acționare reglabilă pe trei axe de avans cu motoare electrice de c.c., stocare de programe/piesă de pînă la 40 Kcaractere, introducerea manuală, de la tastatură a programelor/piesă și afișarea alfanumerică a cotelor realizate și a stării curente a mașinii și execuției programului.

Sistemul utilizează pentru comunicația între procesoare magistrala Intel — MULTIBUS, care permite :

— transferul rapid, paralel al datelor între procesoare, în cuvinte de 8 sau 16 biți, putîndu-se astfel conecta procesoare cu facilități de prelucrare diferite ;

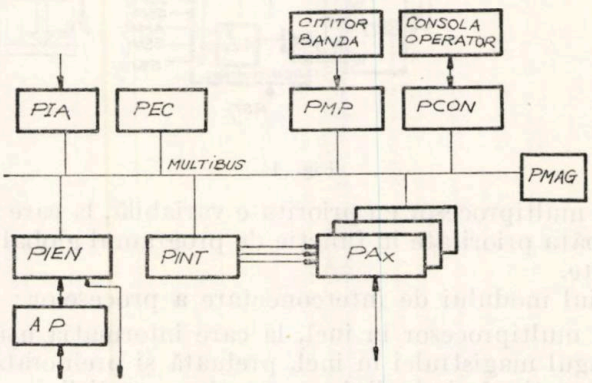


Fig. 5

— adresarea unui spațiu de memorie de 1 M byte și a unui număr de dispozitive I/O (4096) absolut satisfăcător pentru gama de aplicații în discuție ;

— cuplarea în sistem a pînă la 16 procesoare ;

— utilizarea de procesoare ce operează cu frecvențe de ceas diferite;
— utilizarea unor tehnici variate de rezolvare a cererilor de acordare a magistralei, cu sau fără întreruperea unui transfer de date în curs;
— extinderea ulterioară a funcțiilor magistralei prin liniile de rezervă.

În continuare sînt prezentate principalele funcții ale fiecărui procesor.

Procesorul de magistrală (PMAG) rezolvă problema priorității de acces a modulelor conectate la magistrala sistemului. Se utilizează un algoritm de rotație a priorităților, prin care se servește procesorul cu prioritatea cea mai mare dintre cele care au solicitat accesul la magistrală; acest serviciu poate fi întrerupt, dacă apar ulterior cereri de prioritate mai mare. La terminarea unei serviri, procesorul respectiv capătă prioritatea cea mai mică. PMAG este implementat cu ajutorul unui automat.

Procesorul de consolă (PCON) asigură comunicația dintre operator și sistemul de conducere, cît și achiziția programului/piesă, de la cititor de bandă. PCON permite afișarea sub formă alfanumerică a mărimilor selectate de operator prin intermediul unei tastaturi specializate. Este realizat pe o placă, în jurul microprocesorului 8080.

Procesorul de memorie program (PMP) servește pentru stocarea parțială sau totală a programelor/piesă înscrise pe bandă perforată, ceea ce oferă posibilitatea utilizării unui singur cititor de bandă (portabil) pentru un grup de mașini unelte. PMP conține 40K cuvinte de 8 biți memorie RAM de tip CMOS (ex. 5101), susținută de la baterie în cazul căderii tensiunii de alimentare.

Procesorul de intrări analogice (PIA) este destinat culegerii de informații de la traductoarele mașinii ce permit caracterizarea intensității regimului de așchiere (momente de torsiune, încovoiere, forțe normale, tangențiale, deflexii ale arborelui principal, nivel de vibrații, viteze de avans, turații, intensitatea curentului acționării principale), și prin aceasta servesc ca bază de date pentru calculul de adaptare. În cazul în care nu este posibilă utilizarea unor sisteme modulare de achiziție de date (ex. SDM 853), PIA utilizează un microprocesor de tip 8080 sau 8085 care, preluînd direct ieșirile din CA/N, asigură filtrarea numerică a perturbațiilor, testarea încadrării în limite, conversia de cod, comanda achiziției cu perioadă variabilă, liniarizarea ș.a.

Procesorul de intrări/ieșiri numerice (PIEN) este realizat cu microprocesor 8080, și îndeplinește următoarele funcții de bază:
— achiziție de date numerice, în format paralel (8 biți) sau serie de la elementele traductoare cu funcționare discretă (ex. limitatoare de cursă, contacte de presostat, celule fotoelectrice, traductoare de deplasare incrementale sau absolute);
— cuplarea sistemului multimicroprocesor la mașina unealtă prin intermediul unuia sau mai multor automate programabile;
— stocarea informației privind starea mașinii unelte în memoria de lucru;
— realizarea comenzilor pentru cicluri fixe de prelucrare;
— asigurarea funcțiilor de comutație necesare controlului și supravegherii fluxului energetic al mașinii unelte.

Procesorul de interpolare (*PINT*) realizează calculul de interpolare de lucru, urmare a căruia distribuie impulsurile de comandă către procesoarele de ax, cît și calculul de corecție, care constă din determinarea

amplitudinii și sensului vectorului de corecție, din racordarea segmentelor de curbă în cazul unghiurilor externe, și din determinarea anticipată a punctului de intersecție a segmentelor, în cazul unghiurilor interne. Aceste operații se desfășoară în timp partajat, prioritate avînd interpolarea de lucru. PINT mai efectuează și calcule matematice, de tip adunare, scădere, înmulțire, împărțire, extragere de radical, pentru calculul perioadei de calcul t_w. Realizarea PINT se face cu microprocesoare din familia 3000, cu microinstrucțiuni pe 48 de biți, și zonă de prelucrare de 32 de biți virgulă fixă pentru calcul de interpolare și 8 biți caracteristică și 24 de biți mantisă pentru formatul virgulă mobilă necesar calculului matematic.

Procesorul de elaborare comenzi (PEC) este destinat coordonării activităților procesoarelor din sistem, pentru achiziția datelor de la proces și cititor de bandă, pentru interpolare și corecție în timp real, și pentru dialog cu operatorul.

Concluzii

Experimentările efectuate asupra acestei structuri au cuprins în prima etapă realizarea procesorului de magistrală și a sistemului de comunicație între procesoare, și în a doua etapă implementarea hardware a PINT, PIEN, PCON, PEC și PMP. Pentru conturare plană au fost elaborate microprograme specifice de interpolare și corecție, testarea lor fiind realizată prin cuplarea directă a PINT cu un ploter. Viabilitatea soluției propuse de autori a fost confirmată de respectarea performanțelor de precizie și viteză listate în lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. *Borangiu, Th., Dobrescu, R.*, Biprocessor Configuration with Alternating Hierarchy for High Speed Process Control, Proc. of the 6th IFAC/IFIP Conf. on Digital Comp. Appl., Pergamon Press, 1980.
2. *Crossley, T. R., Mc Cartney, D.*, — Microprocessor — Based Direct Numerical Control Sys-, tems, Annals of the CIRP, vol. 28/1/1979, p. 273—276.
3. *Ernst, P.*, — Automatisierung von Werkzeugmaschinen, Rtp. H. 2/1980, p. 49—56.
4. *Fuller, S. H., Ousterhout, J., Raskin, L.*, Proc. of the IEEE, vol. 66, no. 2, 1978, p. 216—228.
5. *Gose, H., Leusch, G.*, Stand und Trand der Automatisierung von Werkzeugmaschinen und Fertigungssystemen, Rtp, H. 2, 1980, p. 28—30.
6. *Mathialagan, A.*, IEEE Trans. on Comp., vol. C—9, 1980, p. 145—147.

Distributed CNC System for Adaptive Control of Machine Tools

Real-time multiprocessing techniques by means of microcomputer-based distributed control configurations provide prospective solutions for the technical and economical problems associated to the cutting process on machine-tools, such as : plane — and space contouring with fixed accuracy, optimization of the cutting intensity, programmability of the conventional control and improvement of the operator communication.

The multimicroprocessor control structures have powerful computing capabilities and allow flexible interconnection procedures and extension of the part program memory as well as of the interface with the feed and speed actuating system.

The object of the paper is to discuss the particularities of distributed CNC of machine tools, and to describe a microprocessor-based configuration which provides the above mentioned functions.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

C.Z. :62—53 :621.2

UNELE PROBLEME PRIVIND PROIECTAREA ȘI SIMULAREA SISTEMELOR ELECTROHIDRAULICE

I. CATANĂ*

Proiectarea asistată de calculator a sistemelor electrohidraulice oferă multiple posibilități de soluționare a problemelor implicate de utilizarea acestor echipamente în tehnica reglării automate.

Lucrarea prezintă unele aspecte legate de sinteza și simularea sistemelor electrohidraulice de poziționare evidențiind corelația dintre optimizarea structurală și parametrică a acestor sisteme.

1. Considerații privind proiectarea și optimizarea sistemelor de poziționare electrohidraulice

Dezvoltarea continuă a echipamentelor hidraulice și electrohidraulice și creșterea gradului lor de complexitate ridică probleme calitativ noi, de optimizare structurală și parametrică, pentru rezolvarea cărora se utilizează din ce în ce mai mult tehnica de calcul.

În prezent, în proiectarea și construcția acestor echipamente se manifestă pregnant tendința realizării unor blocuri funcționale cu structură modulară care să permită sinteza unor sisteme oricît de complexe, folosind componente tipizate compatibile cu cerințele de performanță cerute în diverse aplicații.

Din acest punct de vedere problema proiectării sistemelor electrohidraulice îmbracă două aspecte fundamentale :

— Proiectarea și elaborarea unor structuri de sisteme, în totalitatea lor, pornind de la date inițiale care exprimă performanțele globale cerute luînd în considerare anumite restricții tehnologice.

— Proiectarea unor componente hidraulice sau blocuri funcționale electrohidraulice care împreună cu alte elemente cunoscute ca structură și funcționalitate să permită sinteza unor sisteme în conformitate cu specificațiile de proiectare impuse.

Dificultatea problemelor de proiectare a echipamentelor electrohidraulice este determinată în primul rînd de mulțimea parametrilor constructivi și funcționali care au o influență directă asupra performanțelor tran-

Manuscris primit la data de 1 septembrie 1981
* Șef lucrări dr. ing., Catedra Automatică

zitorii şi staţionare, mulţi dintre aceşti parametri nefiind cunoscuţi suficient de bine în proiectare. În acelaşi timp efectul unor neliniarităţi tipice componentelor hidraulice cum sînt, zona de insensibilitate, saturaţia şi fenomenul de histerezis impun o distribuţie corespunzătoare a factorului de amplificare în cadrul sistemului precum şi o plasare optimă a echipamentului de interfaţă electric-hidraulic care delimitează cele două subsisteme de bază.

O structură tipică pentru sistemele electrohidraulice de poziţionare este prezentată în figura 1, [1, 3], unde am notat : 1 — blocul de referinţă, 2— subsistemul electronic, 3 — echipamentul de interfaţă electro-hidraulic, 4 — subsistemul hidraulic, 5 — traductor de viteză sau acceleraţie, 6 — traductor de presiune, 7 — traductor de poziţie.

Stabilizarea sistemelor de poziţionare necesită utilizarea unor reacţii locale de viteză şi acceleraţie care se dimensionează în funcţie de structura sistemului de acţionare şi caracteristicile sarcinii. De cele mai multe ori reacţiile de viteză şi acceleraţie se obţin în cadrul sistemelor electrohidraulice prin măsurarea cu mijloace adecvate a debitului şi presiunii. De aceea echipamentul de interfaţă se realizează constructiv sub o formă care să permită implementarea acestor circuite de reacţie, întregul ansamblu reprezentînd o unitate distinctă denumită servovalvă electrohidraulică.

În lucrarea de faţă ne ocupăm de proiectarea sistemelor de poziţionare care utilizează ca echipament de interfaţă diferite tipuri de servovalve evidenţiind prin simulare numerică avantajele oferite de aceste structuri de sisteme în aplicaţiile practice.

2. Optimizarea constructivă şi funcţională a subsistemelor electrohidraulice

Subsistemul hidraulic de acţionare este alcătuit în general dintr-un motor hidraulic liniar sau rotativ care antrenează prin intermediul unui sistem cinematic adecvat o anumită sarcină. Comanda acestui subsistem se realizează direct de la echipamentul de interfaţă care conţine ca ultim etaj de amplificare un amplificator cu sertar cum se arată în figura 2.

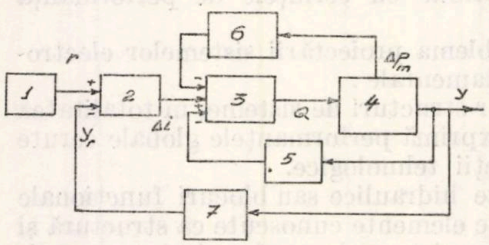


Fig. 1 Fig. 2

Alegerea sau dimensionarea corespunzătoare a subsistemului hidraulic se face în conformitate cu performanţele impuse sarcinii legate de viteza maximă de acţionare, forţa maximă sau cuplul maxim rezistent la sarcină, acceleraţia maximă la demararea sarcinii din care rezultă puterea maximă de acţionare.

În același timp, trebuie avute în vedere, în alegerea sistemului de acționare și alte elemente cum sînt distanța de poziționare, caracteristicile dinamice ale sarcinii, prezența forțelor de frecare care se reflectă, în final, în comportarea sistemului de conducere automată.

Ecuațiile care descriu comportarea subsistemului hidraulic de acționare a sarcinii sînt ecuații de echilibru dinamic al forțelor (respectiv cuplurilor) și ecuații de continuitate a fluidului de lucru care se prezintă sub formă liniarizată astfel [1, 3]:

$$\Delta p_m A_m = M \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + f \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_0 \tag{1}$$

$$Q_m = A_m \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \alpha_m \Delta p_m + \frac{V_m}{4E} \frac{\mathrm{d}\Delta p_m}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Puterea hidraulică este furnizată subsistemului de acționare de către o sursă de energie hidraulică prin intermediul unui amplificator electrohidraulic cu două etaje. Etajul de putere reprezentat în figura 2 este descris de ecuația [1].

$$Q_m = C_d h x \sqrt{\frac{1}{\rho}(p_0 - \Delta p_m)} \tag{3}$$

În multe aplicații practice ale sistemelor de reglare a vitezei se impune ca puterea hidraulică transferată sarcinii să fie maximă, astfel încît trebuie satisfăcută condiția:

$$\frac{\partial (Q_m \Delta p_m)}{\partial \Delta p_m} = 0 \tag{4}$$

Din această relație se obține condiția de transfer maxim de putere sub forma:

$$(\Delta p_m)_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{3} p_0 \tag{5}$$

Condiția (5) se adoptă și în proiectarea sistemelor de poziționare liniară sau unghiulară chiar dacă respectarea ei nu poate fi asigurată decît într-un singur punct din cadrul ciclului de lucru, deoarece prin limitarea presiunii la motorul hidraulic la valoarea maximă dată de relația (5) se asigură implicit funcționarea amplificatorului hidraulic în porțiunea liniară a caracteristicilor statice așa cum rezultă din figura 3.

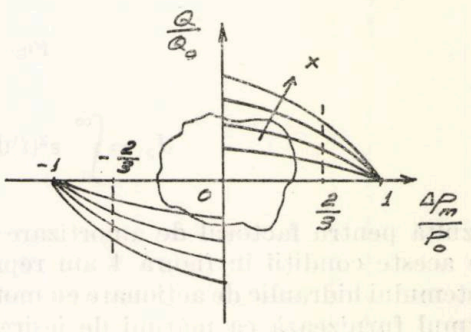


Fig. 3

O atenție deosebită trebuie acordată amortizării în cadrul sistemelor de poziționare, deoarece în general subsistemele hidraulice au o amortizare naturală mică. Pentru ameliorarea factorului de

amortizare și implicit a stabilității sistemului de poziționare se pot alege în mod corespunzător parametrii α_m și f din ecuațiile (1) și (2). Valorile optime pentru acești parametri rezultă din performanțele impuse sistemului în ansamblu și de criteriul de optimizare ales. Pentru optimizarea sistemelor de poziționare în conformitate cu criteriul integral

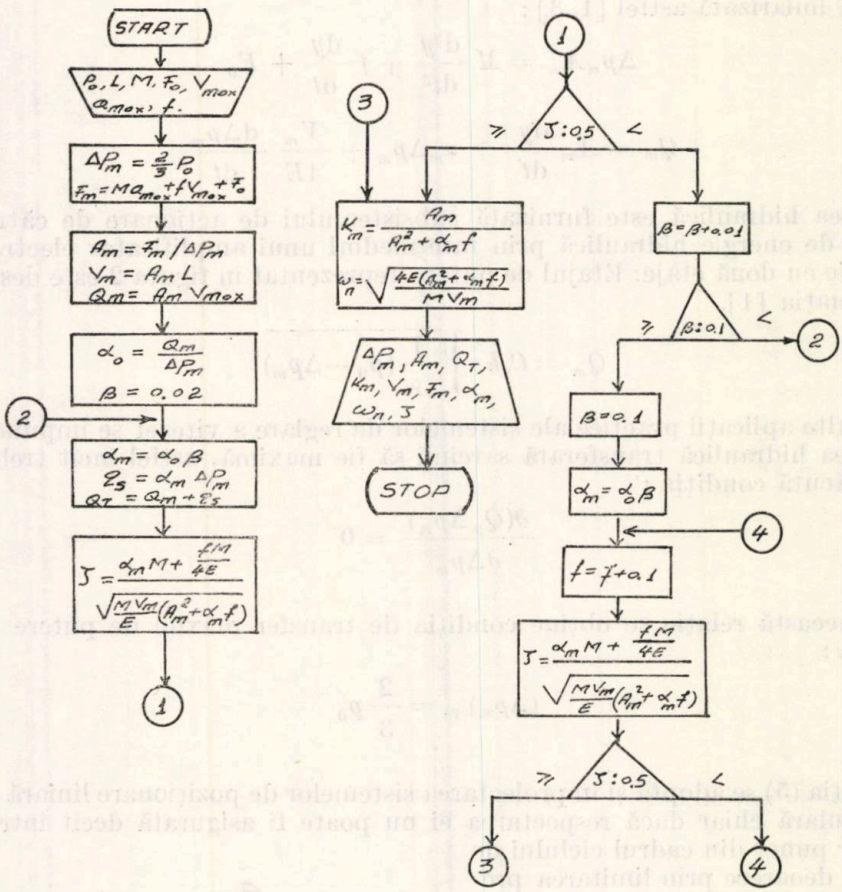


Fig. 4

$$J_0 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)\mathrm{d}t = \text{minim} \qquad (6)$$

rezultă pentru factorul de amortizare valoarea : $\tau = 0{,}5$ [1]. Ținînd cont de aceste condiții în figura 4 am reprezentat algoritmul de proiectare a sistemului hidraulic de acționare cu motor liniar. După cum se observă, algoritmul furnizează ca mărimi de ieșire parametrii necesari pentru proiectarea elementului imediat anterior reprezentat de amplificatorul hidraulic.

3. Algoritm de proiectare și optimizare a sistemelor de poziționare

Cerințele de performanță impuse sistemelor electrohidraulice diferă de la o aplicație la alta fapt care explică și marea diversitate de tipuri de amplificatoare folosite în cadrul acestor sisteme. După cum se cunoaște [3] fiecare tip de amplificator oferă anumite caracteristici funcționale care îl recomandă în anumite structuri de sisteme. Astfel amplificatorul cu resoarte de centrare prezintă un coeficient debit-presiune mic, ceea ce este favorabil pentru regimul staționar al sistemelor de poziționare, dar conduce la un factor de amortizare mic și implicit la un regim tranzitoriu mai lung.

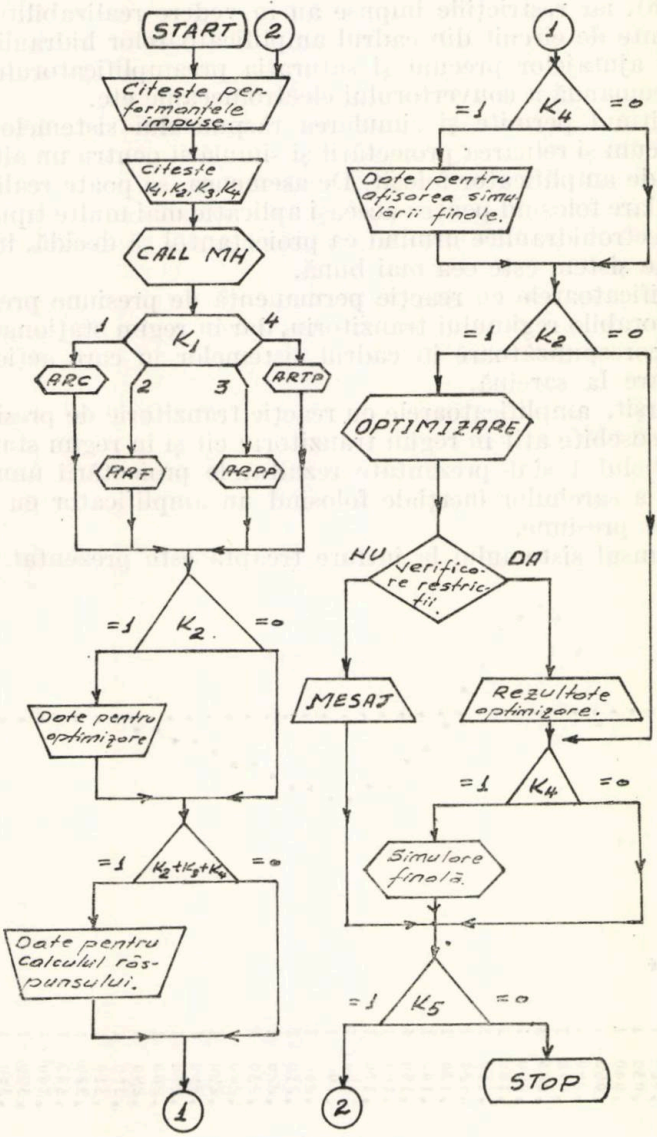


Fig. 5

În alegerea tipului de amplificator trebuie să avem în vedere atît complexitatea acestuia cît și dificultățile de realizare tehnologică și întreținere pe care le implică.

Algoritmul de proiectare și optimizare a sistemelor de poziționare lăsînd la opțiunea proiectantului alegerea unui anumit tip de amplificator servește pentru proiectarea asistată de calculator a acestor sisteme în funcție de performanțele impuse și de aplicația în care urmează să fie utilizat sistemul.

Structura acestui algoritm este prezentată în figura 5.

Optimizarea sistemelor de poziționare s-a făcut cu criteriu exprimat de relația (6), iar restricțiile impuse au în vedere realizabilitatea fizică a unor elemente de circuit din cadrul amplificatoarelor hidraulice cum sînt rezistențele ajutajelor precum și saturația preamplificatorului, limitarea puterii de comandă a convertorului electromecanic etc.

Algoritmul permite și simularea răspunsului sistemelor la intrare treaptă precum și reluarea proiectării și simulării pentru un alt set de date sau alt tip de amplificator folosit. De asemenea, se poate realiza o proiectare și simulare folosind pentru aceeași aplicație mai multe tipuri de amplificatoare electrohidraulice urmînd ca proiectantul să decidă, în final, care structură de sistem este cea mai bună.

Amplificatoarele cu reacție permanentă de presiune prezintă caracteristici favorabile regimului tranzitoriu, dar în regim staționar nu asigură o precizie corespunzătoare în cadrul sistemelor în care acționează forțe perturbatoare la sarcină.

În sfîrșit, amplificatoarele cu reacție tranzitorie de presiune au performanțe deosebite atît în regim tranzitoriu cît și în regim staționar.

În tabelul 1 sînt prezentate rezultatele proiectării unui sistem de poziționare a sarcinilor inerțiale folosind un amplificator cu reacție permanentă de presiune.

Răspunsul sistemului la intrare treaptă este prezentat în figura 6.

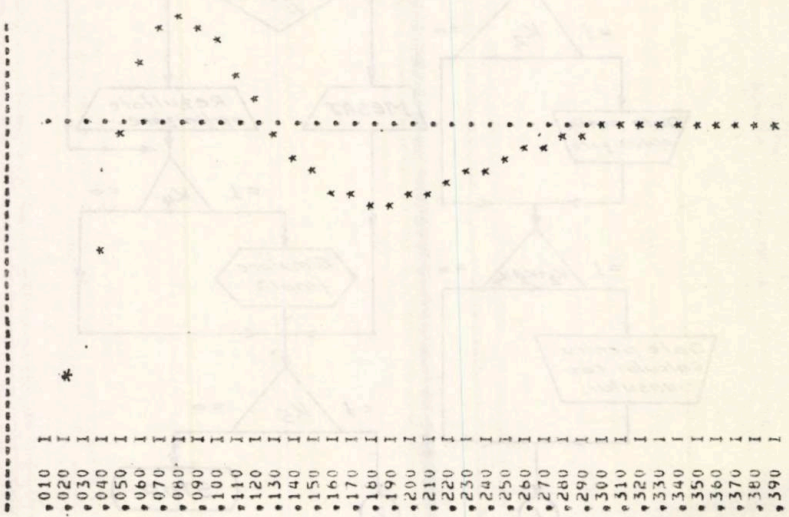


Fig. 6

Tabelul 1

Date iniţiale

Caracteristicile sarcinii

Presiunea de alimentare	PO	=.21000E+03 KGF/CM**2
Randamentul volumetric	ETA	=.98000E+00 %
Distanţa de poziţionare	L	=.20000E+02 CM
Masa sarcinii	M	=.40000E+03KG
Coeficientul de frecări viscoase la sarcină	F	=.12000L+01 KGF SEC/CM**2
Modulul de elasticitate al fluidului de lucru	E	=.60000E+04 KGF/CM**2
Viteza maximă la sarcină	VM	=.15000E+01M/SEC
Acceleraţia maximă la sarcină	AM	=.40000L+01 M/SEC**2
Forţa rezistentă la sarcină	FO	=.20000L+03 KGF

Performanţele impuse sistemului

Suprareglarea	SIG	=.10000E+02
Durata regimului tranzitoriu	TTI	=.75000L+00 SEC
Eroarea staţionară la intrare treapta	EST	=.00000L+00 %
Eroare staţionară la intrare rampa	ESR	=.50000L+01 %

Rezultatele proiectării

Caracteristicile motorului hidraulic

Căderea de presiune la sarcină	DPM	=.1400E+03 KGF/CM**2
Aria pistonului	AM	=.38571E+01 CM**2
Coeficientul de pierderi la motor	ALM	=.82653E−01 CM**5/KGF/SLC
Debitul la sarcină	QM	=.59014E+03 CM**3/SEC
Factorul de amplificare al motorului	KM	=.25754E+00 1/CM**2
Volumul total al motorului	VT	=.15429E+03 CM**3
Pulsaţia naturală a motorului	OM	=.76317E+02 RAD/SEC
Factorul de amortizare al motorului	OE	=.10389E+00

Parametrii preamplificatorului ajutaj-Paleta diferenţial

Poziţia de echilibru a paletei	HO	=.50000E−02 CM
Diametrul ajutajului	DA	=.40000E−01 CM
Factorul de amplificare în presiune	KPO1	=.42000E+06 N/CM**3
Factorul de amplificare în debit	KQO1	=.11320E+04 CM**2/SEC
Coeficientul debit-presiune	KCO1	=.24256E−02 CM**5/N/SLC
Debitul de pierderi	QP	=.10188E+02 CM**3/SEC

Parametrii amplificatorului de putere cu sertar

Suprafaţa de comandă	AC	=.20096E+01 CM**2
Presiunea de comandă	DPC	=.21000E+02 KGF/CM**2
Constanta de elasticitate	KD	=.84403E+05 N/CM
Factorul de amplificare	KA	=.12500E−02 CM/MA
Constanta de timp	TA	=.19726E−01 SEC
Factorul de amplificare în debit	KQO2	=.70000E +04 CM**2/SLC
Lăţimea orificiului de comandă	B	=.71603E+00 CM
Coeficientul reacţiei de presiune	KS	=.93460E−06 CM**3/KGF
Suprafaţa de reacţie	AR	=.78883E−02 CM**2
Factorul de amortizare dorit	TE	=.50000E+00

Concluzii

Proiectarea asistată de calculator a sistemelor electrohidraulice de poziţionare permite considerarea în proiectare a unui număr mare de parametri constructivi şi funcţionali astfel încît soluţia adoptată să cores-

pundă în totalitate condițiilor cerute de utilizarea acestor sisteme în diverse aplicații. Analiza diferitelor variante într-un timp foarte scurt precum și posibilitatea de a determina o soluție optimă atît la nivelul subsistemelor cît și la nivelul întregului sistem reprezintă unul din avantajele esențiale ale proiectării asistate de calculator.

Notații

Δp_m — căderea de presiune la motorul hidraulic și sarcină
x — deplasarea sertarului de putere
A_m — aria motorului hidraulic
V_m — volumul motorului hidraulic
α_m — coeficientul de pierderi la motorul hidraulic
E — modulul de elasticitate al fluidului de lucru
Q_m — debitul la motorul hidraulic
F_0 — forța rezistentă la sarcină
M — masa sarcinii
f — coeficientul de frecări viscoase la sarcină
ARC — amplificator cu resoarte de centrare
ARF — amplificator cu reacție de forță
ARPP — amplificator cu reacție permanentă de presiune
ARTP — amplificator cu reacție tranzitorie de presiune

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Florea, I. Catană*, „Analiza și sinteza circuitelor hidraulice și electrohidraulice" Lito IPB 1981.
2. *I. Catană*, „Algoritmi pentru analiza și sinteza sistemelor electrohidraulice" IPB 1977.
3. *I. Catană*, „Contribuții la analiza stabilității și la sinteza sistemelor electrohidraulice pentru procese rapide" Teză de doctorat Buc. 1978.

Some Problems about Designing and Simulation Electrohydraulic Servosistems

The computer aided design of the hydraulic systems has many possibilities to solve the problems of fluid power and systems. The paper is dealing with the numerical simulation and parametrical optimization of the electrohydraulic systems. The present method offers opportunity on optimum synthesis from the stability and dynamical performances viewpoint.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ
Tomul XLIV — 1982, Numărul 1

CALCULATOARE

C.Z.: 681.32

EVALUAREA PERFORMANȚELOR SISTEMULUI DE CALCUL MICROPROCESOR FELIX M18

IRINA ATHANASIU, CR. ZERVOS*

Lucrarea prezintă un studiu de evaluare a performanțelor efectuat asupra unui sistem de calcul microprocesor FELIX M18 din dotarea Catedrei Calculatoare, IPB. Sînt prezentate modelul analitic de performanțe, care a stat la baza studiului de evaluare, monitorul software de performanțe utilizat pentru măsurarea valorilor parametrilor de intrare ai modelului, precum și valorile evaluate pentru indicii de performanță principali și secundari ai sistemului de calcul microprocesor FELIX M18.

1. Un model analitic de performanțe pentru sistemul de calcul microprocesor FELIX M18

Pe baza organizării și modului de funcționare al sistemului de calcul microprocesor FELIX M18 [1] rezultă rețeaua cu unități de deservire multiple din figura 1. Notațiile folosite în figura 1 reprezintă următoarele cantități operaționale:

1) Z = timpul mediu de gîndire al utilizatorului.

2) X_i = productivitatea dispozitivului i, $i = 1, \ldots, 5$.

X_0 = productivitatea sistemului.

3) S_i = timpul mediu de deservire la dispozitivul i, $i = 1, \ldots, 5$.

Avem

$$S_i = \frac{B_i}{C_i}$$

unde:

B_i = timpul total în care dispozitivul i este ocupat;

C_i = numărul de cereri de servicii satisfăcute la dispozitivul i.

4) q_{1i} = frecvența de direcționare de la dispozitivul 1 la dispozitivul i, $i = 2, \ldots, 5$. Avem

$$q_{1i} = \frac{C_{1i}}{C_1}$$

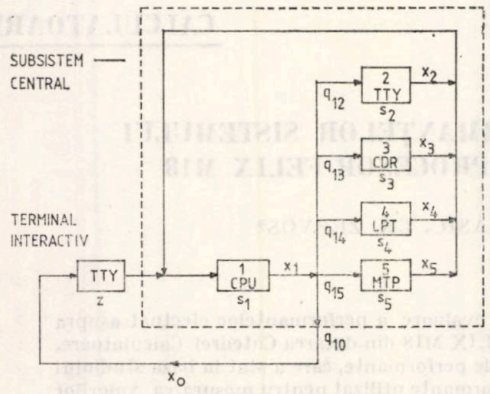
Manuscris primit la data de 11 septembrie 1981

* Șef. lucrări dr. ing.; Șef lucrări dr. ing. Catedra de Calculatoare

unde

C_{1i} = numărul de ori cînd un job (tranzacție interactivă) trece la dispozitivul i imediat după ce i-a fost satisfăcută o cerere de servicii la dispozitivul 1.

q_{10} = frecvența de direcționare de ieșire. Avem



CPU = UNITATE DE PROCESARE CENTRALĂ

TTY = TERMINAL INTERACTIV

CDR = CITITOR DE CARTELE

LPT = IMPRIMANTĂ

MTP = UNITATE DE BANDĂ MAGNETICĂ

Fig. 1 Rețea cu unități de deservire multiple reprezentînd sistemul de calcul microprocesor FELIX M18

$$q_{10} = \frac{C_{10}}{C_1}$$

unde

C_{10} = numărul de ori cînd un job iese din sistem imediat după ce i-a fost satisfăcută o cerere de servicii la dispozitivul 1.

Facem următoarele ipoteze cu privire la sistemul evaluat :

1) Sistemul se află în echilibru, adică

$$A_i = C_i,$$

$i = 1, \ldots, 5$, unde

A_i = numărul de sosiri la dispozitivul i.

2) Sistemul poate opera cu două dispozitive de tip terminal interactiv. Considerăm că numai unul dintre aceste dispozitive este utilizat (TTY). De asemenea, nu luăm în considerare casetele magnetice, unități de bandă magnetică multiple, unitățile de disc flexibil, cititorul și perforatorul de bandă de hîrtie.

3) Dispozitivul TTY poate fi utilizat atît ca terminal interactiv, pentru introducerea comenzilor de monitor, cît și ca dispozitiv de I/E standard. În primul mod de lucru TTY determină parametrul Z, iar în al doilea mod de lucru TTY determină parametrul S_2.

Particularizînd rezultatele operaționale din [2] obținem :

1) Ratele de vizitare la dispozitive (subsistemul central este de tipul cu unitate de deservire centrală)

$$V_1 = \frac{1}{q_{10}};$$

$$V_i = \frac{q_{1i}}{q_{10}}, \quad i = 2, \ldots, 5.$$

2) Productivitățile dispozitivelor

$$X_i = V_i X_0, \; i = 1, \ldots, 5;$$

$$X_0 = \frac{C_0}{T}$$

unde:

C_0 = numărul total de job-uri procesate în sistem;

T = durata perioadei de observare.

3) Utilizările dispozitivelor

$$U_i = X_i S_i, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

4) Timpul de răspuns al subsistemului central

$$R = \sum_{i=1}^{5} V_i S_i.$$

5) Timpul mediu de gîndire al utilizatorului

$$Z = \frac{1}{X_0} - R.$$

6) Valoarea maximă a productivității sistemului

$$X_0^{\max} = \frac{1}{R}.$$

7) Dispozitivul limitator de performanță, L, unde

$$V_L S_L = \max_{1 \leqslant i \leqslant 5} \{V_i S_i\}.$$

Modelul analitic de performanțe prezentat mai sus impune determinarea valorilor următorilor parametri:

1) B_i $i = 1, \ldots, 5$.

2) $C_{10}, C_0, C_{1i}, i = 2, \ldots, 5$.

3) $C_i, i = 1, \ldots, 5$.

4) T.

Observăm însă că:

1) $C_{10} = C_0$;

2) $C_{1i} = C_i$, $i = 2, \ldots, 5$ (sub premiza echilibrului fluxului de job-uri).

3) $C_1 = C_{10} + \sum_{i=2}^{5} C_{1i}$.

Rezultă deci că trebuie măsurați de fapt numai următorii parametri:

1) $B_i, i = 1, \ldots, 5$.

2) $C_{10}, C_{1i}, i = 2, \ldots, 5$.

3) T.

2. Măsurarea parametrilor de intrare ai modelului analitic de performanţe

Măsurarea parametrilor de intrare ai modelului analitic de performanţe prezentat în secţiunea anterioară s-a efectuat sub încărcarea reală a sistemului evaluat, utilizînd un monitor de performanţe software dedicat sistemului de operare interactiv MON 18 V1.4 [/1/]. Mecanismul de terminare a sesiunilor de măsurare incorporat în monitor a asigurat satisfacerea premizei echilibrului fluxului de job-uri.

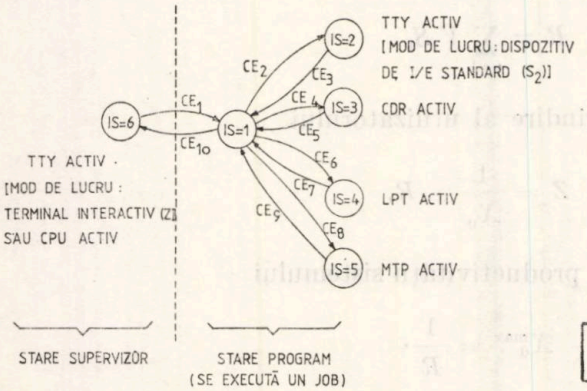


Fig. 2 Diagramă de tranziţii de stare a sistemului de calcul microprocesor FELIX M 18

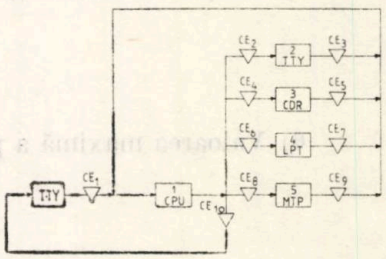


Fig. 3 Amplasarea logică a capcanelor de eveniment

Observăm că parametrii care se cer a fi măsuraţi pot fi clasificaţi în două categorii:

1) parametri de tip contor de evenimente: C_{10}, C_{1i}, $i = 2, \ldots, 5$;
2) parametri de tip contor de timp: T, B_i, $i = 1, \ldots, 5$.

Măsurarea parametrilor de tip contor de evenimente s-a realizat prin intermediul unor rutine de măsurare specifice. Funcţionarea sistemului de calcul microprocesor FELIX M18 poate fi descrisă prin diagrama de tranziţii de stare prezentată în figura 2, unde

$$IS = \text{index de stare.}$$

Valoarea variabilei IS indică starea curentă a sistemului; iniţial $IS = 6$. Rezultă amplasarea logică a capcanelor de eveniment prezentată în figura 3. În figură, CE_i, $i = 1, \ldots, 10$, denotă o capcană de eveniment. Rolul unei capcane de eveniment este de a detecta evenimentul (tranziţia de stare a sistemului) asociat capcanei respective (vezi figura 2). Astfel:

1) CE_1 — detectează tranziţia de stare $IS: 6 \to 1$ (adică trecerea sistemului din starea supervizor ($IS = 6$) în starea program — CPU activ ($IS = 1$));
2) $CE_2(CE_3)$ — detectează tranziţia de stare $IS: 1 \to 2$ ($IS: 2 \to 1$);
3) $CE_4(CE_5)$ — detectează tranziţia de stare $IS: 1 \to 3$ ($IS: 3 \to 1$);
4) $CE_6(CE_7)$ — detectează tranziţia de stare $IS: 1 \to 4$ ($IS: 4 \to 1$);
5) $CE_8(CE_9)$ — detectează tranziţia de stare $IS: 1 \to 5$ ($IS: 5 \to 1$);
6) CE_{10} — detectează tranziţia de stare $IS: 1 \to 6$.

Funcția realizată de o capcană de eveniment CE_i, $1 \leqslant i \leqslant 10$, este de a apela rutina de măsurare asociată RM_i, conform reprezentării schematice din figura 4. În principal, o rutină de măsurare actualizează valoarea variabilei IS corespunzător evenimentului care a activat rutina în cauză și, dacă este cazul, valoarea unuia dintre contoarele $C10$, $C12$, $C13$, $C14$, $C15$, care acumulează valoarea parametrului C_{10}, C_{12}, C_{13}, C_{14} și respectiv C_{15}. Astfel, de exemplu, rutina de măsurare RM_4 asociată cu capcana de eveniment CE_4 realizează algoritmul

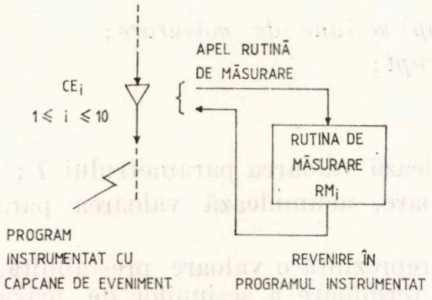


Fig. 4 Activarea unei rutine de măsurare asociată cu o capcană de eveniment

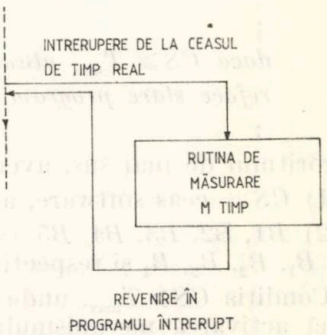


Fig. 5 Activarea rutinei de măsurare MTIMP

RM_4 : *salvează stare program instrumentat*;
atribuie $IS = 3$;
atribuie $C13 = C13 + 1$;
reface stare program instrumentat;
;

pe cînd rutina de măsurare RM_5 asociată cu capcana de eveniment CE_5 realizează algoritmul

RM_5 : *salvează stare program instrumentat*;
atribuie $IS = 1$;
reface stare program instrumentat;
;

Măsurarea parametrilor de tip contor de timp s-a realizat prin intermediul unei rutine de măsurare specifice, MTIMP. Principiul de activare al rutinei MTIMP este reprezentat în mod schematic în figura 5. Algoritmul realizat de rutina de măsurare MTIMP este următorul :

MTIMP : *salvează stare program întrerupt*;
atribuie $CS = CS + 1$;
alege IS *dintre*
1 : *atribuie* $B1 = B1 + 1$;
;
2 : *atribuie* $B2 = B2 + 1$;
;

3 : *atribuie* $B3 = B3 + 1$;
;
4 : *atribuie* $B4 = B4 + 1$;
;
5 : *atribuie* $B5 = B5 + 1$;
;
6 :
;
;
dacă $CS \geqslant T_{max}$ *atunci stop sesiune de măsurare*;
reface stare program întrerupt;
;

În algoritmul de mai sus, avem

1) CS = ceas software, acumulează valoarea parametrului T;

2) $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$ = contoare, acumulează valoarea parametrului B_1, B_2, B_3, B_4 și respectiv B_5.

Condiția $CS \geqslant T_{max}$, unde T_{max} reprezintă o valoare prestabilită, determină activarea mecanismului de terminare a sesiunilor de măsurare incorporat în monitorul de performanțe. Terminarea efectivă a sesiunii de măsurare și afișarea rezultatelor măsurătorilor se va face însă abia la următoarea trecere prin rutina de măsurare RM_{10}, pentru a satisface premiza echilibrului fluxului de job-uri.

Monitorul software utilizat (colecția de rutine de măsurare prezentată mai sus) face parte din categoria monitorilor de performanțe fixe [3] deoarece domeniul monitorului, i.e. clasele de evenimente care pot fi detectate, este prestabilit (tranzițiile de stare ale sistemului de calcul măsurat și avansul timpului). Monitorul realizează o prereducere a datelor colectate prin contorizări adecvate.

Rezoluția monitorului [3] reprezintă frecvența maximă cu care pot fi detectate evenimentele din domeniul monitorului. Dat fiind modul în care au fost concepute rutinele de măsurare RM_i, $i = 1, \ldots, 10$, tranzițiile de stare ale sistemului de calcul monitorizat sînt detectate corect independent de frecvența lor de apariție. Pe de altă parte, sesizarea avansului timpului depinde în mod direct de alegerea cuantei de timp pentru ceasul de timp real (perioada cu care ceasul de timp real generează întreruperi și deci activează rutina de măsurare MTIMP). S-a ales cuanta de timp minimă disponibilă în configurația standard a sistemului de calcul microprocesor FELIX M18 și anume lms. În acest mod se obține o rezoluție a monitorului, în ceea ce privește sesizarea avansului timpului, de $10^3\ s^{-1}$.

Precizia monitorului [3] este determinată de numărul de biți utilizați pentru reprezentarea datelor colectate. S-a ales dimensionarea contoarelor $C10$, $C12$, ... $C15$, CS, $B1$, $B2$, ..., $B5$ la cîte 3 octeți fiecare. Această dimensionare permite:

1) acumularea a maximum 16777215 tranziții orientate de job-uri (parametrii C_{10}, C_{1i}, $i = 2, \ldots, 5$);

2) acumularea a maximum 4,66 ore (parametrii T, B , $i = 1, \ldots, 5$). Avînd în vedere caracteristicile încărcării reale şi ale modului de utilizare a sistemului de calcul măsurat s-a considerat această dimensionare ca fiind acoperitoare. Remarcăm că dimensionarea contoarelor determină în mod direct durata sesiunilor de măsurare (s-a considerat că contorul CS se modifică cel mai des).

Ţinînd cont de numărul redus de contoare utilizate şi de dimensionarea acestora rezultă că contoarele pot fi memorate în memoria RAM a sistemului de calcul măsurat şi afişate (la LPT) la sfîrşitul fiecărei sesiuni de măsurare. Această soluţie oferă următoarele avantaje :

1) facilitează mecanismul de acces la contoare pe parcursul sesiunii de măsurare ;

2) nu necesită utilizarea unui mediu extern de memorare (MTP), neafectînd astfel utilizarea normală a sistemului de calcul măsurat ;

3) permite, dacă este necesar, redimensionarea fără dificultate a contoarelor.

Acurateţea monitorului [3] este reprezentată de erorile introduse de către monitor în datele colectate. Pot apare următoarele categorii de erori :

1) erori de rezoluţie — se datoresc pasului de eşantionare cu care rutina de măsurare MTIMP eşantionează variabila IS ;

2) erori de timp — se datoresc timpului consumat în rutinele de măsurare.

Principalele restricţii asupra utilizării sistemului de calcul măsurat pe parcursul sesiunilor de măsurare sînt următoarele :

1) ceasul de timp real nu poate fi utilizat de către utilizatorii sistemului ;

2) programarea operaţiillor de I/E se face numai prin intermediul rutinelor corespunzătoare din cadrul sistemului de operare MON18 Vl.4.

3. Rezultatele studiului de evaluare a performanţelor sistemului de calcul microprocesor FELIX M18

Aplicînd modelului analitic de performanţe prezentat în secţiunea 1 valorile parametrilor de intrare ai modelului, obţinute prin măsurători utilizînd monitorul de performanţe prezentat în secţiunea 2, au fost evaluate următoarele valori pentru indicii de performanţă principali ai sistemului de calcul microprocesor FELIX M18 :

1) $R = 16{,}482$ sec ;

2) $X_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-5}$ job-uri/msec, $X_0^{\max} = 6{,}06 \cdot 10^{-5}$ job-uri/msec ;

3) $Z = 6{,}28$ sec.

Valorile evaluate pentru indicii de performanţă secundari ai sistemului de calcul microprocesor FELIX M18 sînt prezentate în tabelul 1. Dispozitivul limitator de performanţă este :

$$L = 2 \text{ (TTY)}.$$

Tabelul 1

Valorile evaluate pentru indicii de performanţă secundari ai sistemului de calcul microprocesor FELIX M18

	1 CPU	2 TTY	3 CDR	4 LPT	5 MTP
S_i	1,261 msec	219,33 msec	96,303 msec	2,691 msec	1,962 msec
X_i	0,127	$0,964 \cdot 10^{-3}$	$0,920 \cdot 10^{-3}$	0,0333	0,0662
U_i	0,16	0,21	0,08	0,07	0,12
V_i	2890	21,9	20,9	758,03	1504,65
q_{1i}		$0,75 \cdot 10^{-2}$	$0,72 \cdot 10^{-2}$	0,26	0,52

Principalele aspecte de performanţă care pot fi remarcate sînt :

1) utilizarea foarte redusă a dispozitivelor sistemului ($U_i < 25\%$, pentru $i = 1, \ldots, 5$);

2) productivitatea foarte redusă a dispozitivelor din sistem şi a sistemului în ansamblu.

Se poate afirma că aspectele de performanţă menţionate mai sus se datoresc :

1) modului de lucru interactiv al sistemului;

2) utilizării dispozitivului TTY ca dispozitiv de I/E standard (mod de lucru interactiv la nivelul programului utilizator) ($L = 2 =$ TTY).

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Petrescu ş.a.* „FELIX M18. Manual de utilizare", Atelierul de multiplicare IPB, 1979.
2. *P. J. Denning, J. P. Buzen,* „The Operational Analysis of Queuing Network Models", Computing Surveys, Vol. 10, No. 3, September 1978.
3. *D. Ferrari,* „Computer Systems Performance Evaluation" Prentice-Hall, 1978.

Performance Evaluation Study Performed on a FELIX M18 Microcomputer System

The paper presents a performance evaluation study performed on a FELIX M18 microcomputer system of the Computer Engineering Department at the Polytechnic Institute of Bucharest. The study is based on an analytical performance model, using operational analysis techniques. Input parameters of the performance model are the following: duration of the observation period, transaction counter, service requests counters at the devices, total busy times at the devices. The performance model allows for the following output parameters to be computed : service times at the devices, visit ratios, system productivity, device productivities, device utilizations, interactive response time, etc. Input parameter values were obtained by means of measurements executed under the real workload of the system, using a dedicated software performance monitor. The structure and operating principles of the performance monitor are presented. Finally, the paper presents the evaluated values for the output parameters of the performance model.

I. P. Informaţia c. 2125

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов, „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ELECTROTECHNICS SERIES

The Bulletin is issued quarterly, continuing the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
SÉRIE ÉLECTROTECHNIQUE

paraît tous les trois mois, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ROMÂNIA
Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)
Seria Electrotehnică

1982 SEP 7

Lei 35

F 1130/2

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

SERIA: ELECTROTEHNICĂ, ENERGETICĂ, AUTOMATICĂ, CALCULATOARE, ELECTRONICĂ

TOMUL XLIV NUMĂRUL 2 ANUL 1982
APRILIE–IUNIE

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*

MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. docent ing. *Florea Oprea*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Prof. dr. ing. *Marin Rădoi*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent ing. *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu*.

Editor: Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București. Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper trough ILEXIM import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest ROMANIA

Sumar

MATEMATICĂ

P. Stoica, O. Stănăşilă
Asupra proprietăţilor spectrale ale matricilor $A^{-1}B$ (l. engleză) 3

FIZICĂ

Gh. Stanciu, Gabriela Cone, I. M. Popescu, C. Stoichiţă
Realizarea unei instalaţii experimentale pentru studiul efectului Faraday rezonant şi nerezonant la gaze 9

Vl. Iancu, D. Iordache, M. Stan, Doina Gavrilă, Gh. Lăzărescu, A. Tomovici
Probleme fizice în proiectarea cablurilor criogenice. II. Metoda de calcul a distribuţiei longitudinale a temperaturii în cabluri răcite în contracurent pentru stări staţionare (îmbunătăţire a metodei Edney-Fox-Gilbert) (l. engleză) 13

ELECTROTEHNICĂ

M. Preda, P. Cristea, G. Ionescu
O nouă metodă de analiză a circuitelor electrice bazată pe calculul iterativ al funcţiilor de transfer hibride 25

Gabriela Spineanu
Influenţa neuniformităţii întrefierului asupra determinării inducţiei magnetice rezultante la un cuplaj cu curenţi turbionari, în construcţia cu poli aparenţi (partea II) 36

ELECTRONICĂ

G. Rulea
Diagrama frecvenţei de rezonanţă a rezonatorului dielectric placă 41

D. Dascălu, M. Udrea-Spenea, E. Popa
Efectul disipării de putere asupra străpungerii prin multiplicare în avalanşă la joncţiunile pn difuzate (l. engleză) 46

M. Dragoman, I. Ardelean
Implementarea filtrelor cu capacităţi comutate (l. engleză) 53

CENTRALE ELECTRICE

N. Dănilă, D. Golici
Contribuţii la analiza funcţionării economice a centralelor termoelectrice cu abur 61

REŢELE ELECTRICE

A. Arie, P. Postolache, E. Dumitrescu
Model mecano-electric pentru studiul vibraţiilor unui ansamblu conductor-amortizor în cazul liniilor electrice aeriene 70

AUTOMATICĂ

S. Călin, Gh. Petrescu, I. Tăbuş
Considerente de îmbunătăţire a comportării tranzitorii în proiectarea directă a sistemelor automate numerice 79

I. Catană
Comanda discretă a amplificatoarelor electrohidraulice 89

Cr. Tănăsescu
O tehnică de definire a modelelor pentru memorie 98

Summary

MATHEMATICS

P. Stoica, O. Stănăşilă
On the Spectral Properties of the Matrix A^{-1} B 3

PHYSICS

Gh. Stanciu, Gabriela Cone, I. M. Popescu, C. Stoichiţă
Experimental Installation for Resonant and Nonresonant Faraday Effect Studies in Gases 9

Vl. Iancu, D. Iordache, M. Stan, Doina Gavrilă, Gh. Lăzărescu, A. Tomovici
Physical Problems in the Design of the Cryogenic Cables. II. Computing Method for Longitudinal Temperature Distribution in Counter-Flow Cooled Cables for Steady States (Improvement of the Edney-Fox-Gilbert Method) 13

ELECTROTECHNICS

M. Preda, P. Cristea, G. Ionescu
A New Method for the Analyse of the Electrical Networks, Based on the Iterative Computation of the Hybrid Transfer Functions 25

Gabriela Spineanu
The Influence over the Air-Gap Nonuniformity Concerning the Determination of Magnetical Resultant Induction on an Eddy-Currents Coupling- Made in Apparent Poles (part II) 36

ELECTRONICS

G. Rulea
Frequency Resonance Diagram of a Dielectric Plate Resonator 41

D. Dascălu, M. Udrea-Spenea, E. Popa
Effect of Power Dissipation upon Avalanche Breakdown of Diffused PN Junctions 46

M. Dragoman, I. Ardelean
Switched Capacitor Filters Implementation 53

ENERGETICS

N. Dănilă, D. Golici
Contributions to the Analysis of the Economical Operation of the Thermal Power Stations 61

A. Arie, P. Postolache, E. Dumitrescu
Study of Transmission Line Conductor-Damper Ensemble Vibrations by Electrical-Mechanical Analogies 70

AUTOMATIC CONTROL

S. Călin, Gh. Petrescu, I. Tăbuş
Transient Behaviour Improvement Using the Direct Method for Digital Control Systems Design 79

I. Catană
Pulse Control of Electrohydraulic Amplifiers 89

Cr. Tănăsescu
A Definition Technique for Storage Models 98

C.Z.: 517.98 :681.3.04/.06

SOME SPECTRAL PROPERTIES OF THE MATRIX $A^{-1}B$

P. STOICA, O. STĂNĂȘILĂ *

Some spectral properties of the matrix $A^{-1}B$ which hold under various assumptions on the square matrices A and B, are presented. The properties are particularly useful for stability studies or in establishing the convergence of some estimation algorithms.

Introduction

The analysis of the convergence of some iterative algorithms either in numerical analysis or in estimation and control leads to the study of the stability of some time-invariant systems of the form

$$Dx(t) = A^{-1}Bx(t), \tag{1}$$

where A, B are constant square matrices (A invertible) and D is the operator $x(t) \to \frac{dx}{dt}$ or $x(t) \to x(t+1)$. In the theory of nonlinear networks do appear equations of the form $AF(v) + Bv = c$ and thus the study of the matrix $A^{-1}B$ may also be useful.

In the problems briefly mentioned above the spectral properties of matrices of type $A^{-1}B$ are essential and it could be useful to have a list of sufficient conditions on A and B which guarantee thatall the eigenvalues of $A^{-1}B$ belong to $\mathbb{C}^+$ or inside the unit disc (the latter situation being relevant for the discrete case of (1)).

Notations. If A is a symmetric positive definite matrix then we write $A > 0$. As is well know $A > 0 \to$ all the eigenvalues of A are strictly positive $\to A = LL^T$, where L is nonsingular inferior triangular. A^T means the transpose of A, and sometimes A^{-T} stands for $(A^T)^{-1}$. All the matrices considered below are m×m with real elements. Denote also

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\} \quad \mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}, \quad U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Manuscript received 23 September 1981

* Senior lecturer, Automatic Control Dept.; Professor, Chair of Mathematics

1. Some spectral properties of $A^{-1}B$ (statements)

In order to prove the convergence of some algorithms which appear both in estimation and control the following proposition is very useful [2—3].

Proposition 1. *Suppose* $A > 0$, $B + B^T > 0$. *Then all eigenvalues of* $A^{-1}B$ *belong to the right half plane* (i.e. Spec $A^{-1}B \subset \mathbb{C}^+$).

Corollary. *If* B *is symmetric,* $B > 0$ *and* A *is nonsingular,* $A^{-1} + A^{-T} > 0$, *then* Spec $A^{-1}B \subset \mathbb{C}^+$.

Indeed, $A^{-1}B$ has the same eigenvalues as BA^{-1} and then apply proposition 1.

Proposition 2. *If*

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & A \end{bmatrix} > 0,$$

then all the eingenvalues of $A^{-1}B$ *are in* U. *The same holds if* A, B *are invertible and*

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & A^{-T} \\ A^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} > 0.$$

Remark : A well-known fact (see, e.g., [1]) is the following Ostrowski's theorem: „Let $A - B > 0$, $A^T + B > 0$. Then Spec $A^{-1}B \subset$ U". The matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

fulfil the conditions of this theorem but not those of proposition 2, while

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

conversely. This shows that proposition 2 has an independent existence. ∎

If stronger conditions are imposed, then the location of eigenvalues can be further specified. For instance, it holds :

Proposition 3. Let $A > 0$ and $B = B^T$. Then

a) *The eigenvalues of* $A^{-1}B$ *are positive if and only if* $B > 0$;

b) *The eigenvalues of* $A^{-1}B$ *are situated in the interval* $(-1, 1)$ *if and only if* $A + B > 0$ *and* $A - B > 0$.

This property has been used in [4] in order to prove the local convergence of a commonly used iterative estimation algorithm.

The following proposition may also be useful.

Proposition 4. *Let* $P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B^T & D \end{bmatrix}$ *be a* $2m \times 2m$ *matrix with real coefficients with* A, D *symmetric* $m \times m$ matrices, $-A > 0$ *and* $\|A^{-1} - B\| < 1$. (where $\|\cdot\|$ is any norm consistent with the euclidian vector norm). *Then the eigenvalues of* P are *either real or situated in* $\mathbb{C}^-$.

2. Proofs of propositions 1—4

Proof of proposition 1. Let S be chosen such that $A^{-1} = SS^T$. The matrix $A^{-1}B$ has the same eigenvalues as $S^{-1}A^{-1}BS = S^TBS$. Let $\lambda_R + i\lambda_I$ be an arbitrary eigenvalue of $A^{-1}B$ and $v_R + iv_I$ a corresponding eigenvector (λ_R, λ_I, v_R and v_I being real—valued entities). Since the matrix S^TBS is real we have $S^TBS\,v_R = \lambda_R v_R - \lambda_I v_I$, $S^TBS\,v_I = \lambda_R v_I + \lambda_I v_R$. Therefore

$$\lambda_R = \frac{1}{v_R^T v_R + v_I^T v_I}\,(v_R^T S^T BS\,v_R + v_I^T S^T BS\,v_I).$$

Since S is nonsingular and $B + B^T > 0$ it follows immediately that λ_R is strictly positive.

Proof of proposition 2. Consider the following vector norm $\|x\| = x^TAx$ for any x, and let $\|\cdot\|$ denote the subordinate matrix norm. Therefore,

$$\|A^{-1}B\| = \sup_{\|x\|=1} \|A^{-1}Bx\|$$

If $\|x\| = 1$, then $\|A^{-1}Bx\| = x^TB^TA^{-1}Bx = 1 - x^T(A - B^TA^{-1}B)x$. Since our assumption that

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & A \end{bmatrix} > 0$$

is equivalent to $A > 0$ and $A - B^TA^{-1}B > 0$ (see for instance [8]) the first assertion is proved.

For the second assertion let $\|\cdot\|$ be now the matrix norm subordinate to the following vector norm $\|x\| = x^TBx$ (by hypothesis B is positive definite). It suffices to prove that $\|A^{-1}B\| < 1$. If $\|x\| = 1$ then $\|A^{-1}Bx\| = x^TBA^{-T}BA^{-1}Bx = 1 - x^T(B - BA^{-T}BB^{-1}BA^{-1}B)\,x$. Thus $\|A^{-1}B\| < 1$ provided the matrix

$$\begin{bmatrix} B & BA^{-T}B \\ BA^{-1}B & B \end{bmatrix}$$

is positive definite. However this follows readily from our assumption since

$$\begin{bmatrix} B & BA^{-T}B \\ BA^{-1}B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B^{-1} & A^{-T} \\ A^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Proof of proposition 3. Let S be such that $A^{-1} = SS^T$. The matrix $A^{-1}B$ has the same eigenvalues as $S^{-1}A^{-1}BS = S^TBS$. Clearly the eigenvalues are real. The assertion a) also follows easily (the „if" part of a) follows also from prop. 1).

Consider now the matrix $A^{-1}(A+B)$ the eigenvalues of which are equal to $1+\lambda$, where $\lambda \in \text{Spec } A^{-1}B$. From part a) it will follow that $1+\lambda>0$ if and only if $A+B>0$; similarly, $1-\lambda>0$ if and only if $A-B>0$ (by considering $A^{-1}(A-B)$). The assertion b) is thus proved.

Proof of proposition 4. Let λ be a non-real eigenvalue of P. For any $2m$-dimensional complex vector

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x_1 \ldots x_m\, y_1 \ldots y_m]^T$$

one can see that $(Pz)^T \cdot J \cdot \bar{z}$ is a real number, where

$$J = \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

If z is an eigenvector corresponding to λ such that $\|x\|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2 = 1$, then $P \cdot z = \lambda z$ hence

$$(Pz)^T \cdot J \cdot \bar{z} = \lambda z^T \cdot J \cdot \bar{z} = \lambda \sum_{i=1}^{m} (|y_i|^2 - |x_i|^2).$$

Since this number is real and λ is not real, it results that $\|x\| = \|y\| = 1$. From the relation $P \cdot z = \lambda z$ one also obtains $(A-\lambda I)x = By$ hence $(I - \lambda A^{-1})x = A^{-1}By$ and therefore,

$$\|(I - \lambda A^{-1})x\| = \|A^{-1} \cdot By\| \leqslant \|A^{-1}B\| \cdot \|y\| = \|A^{-1}B\| < 1.$$

Hence $\|x - \lambda A^{-1}x\| < 1$, that is $(\bar{x}^T - \bar{\lambda}(A^{-1}\bar{x})^T) \cdot (x - \lambda A^{-1}x) < 1$ or equivalently, $|\lambda|^2 \|A^{-1}x\|^2 - 2(\text{Re}\lambda) \cdot (\bar{x}^T \cdot A^{-1} \cdot x) < 0$. Since $-A > 0$, it follows that $\text{Re}\lambda < 0$.

Remark. From this proposition one can easily deduce that if α, δ are the maximal eigenvalues of A, D respectively and if $\alpha + \delta < 0$, then Spec $P \subset \mathbb{C}^-$. ∎

3. Applications.

a) *Let $\varphi(t)$ be a stationary vector-valued stochastic process*, and define

$$A = E\varphi(t) \cdot \varphi(t)^T, \quad B = E\, \varphi(t) \cdot H(q^{-1})\, \varphi(t)^T, \tag{2}$$

where E denotes expectation, q^{-1} is the backward shift $\varphi(t) \to \varphi(t-1)$, and $H(q^{-1})$ is an asymptotically stable filter. *Assume that $A>0$ and that $H(q^{-1})$ is strictly positive real* (i.e. $\text{Re}H(e^{i\omega})>0$ *for any* $\omega \in (-\pi, \pi]$). *Under this hypothesis we will prove that* Spec $A^{-1}B \subset \mathbb{C}^+$, by making use of prop 1.

Indeed let g be a vector having the same dimension with $\varphi(t)$. Introduce $y(t) = g^T\varphi(t)$ and let $\Phi_y(\omega)$ denote the spectral density of $y(t)$. Then we can write

$$g^T Bg = Ey(t) \cdot H(q^{-1})\, y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega})\, \Phi_y(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re} H(e^{i\omega})\, \Phi_y(\omega)\, d\omega \geqslant 0.$$

Furthermore, the equality holds if and only if $\Phi_y(\omega) \equiv 0$ or equivalently

$$0 = Ey\,(t)^2 = g^T[E\,\varphi\,(t)\,\varphi\,(t)^T]\,g = g^T Ag$$

which implies $g = 0$ since $A > 0$. Thus $B + B^T > 0$ and the assertion follows from prop. 1.

This property was used in [2, 3, 5—7] to prove the convergence of some iterative/recursive estimation and control algorithms.

b) If in (2) $\varphi(t)$ belongs to a particular class of stochastic processes, then the eigenvalues of $A^{-1}B$ could be determined explicitly. In this sense we give:

Proposition 5. *Let the matrices A and B be given by (2) with*

$$\varphi(t) = \frac{1}{F(q^{-1})}\,[e(t-1)\ \ldots\ e(t-m)]^T$$

where $e(t)$, $t \in Z$ is a sequence of independent and identically distributed random variables with zero mean, and where $F(q^{-1}) = f_0 + f_1 q^{-1} + \ldots + f_m q^{-m}$, $f^0 \neq 0$.

Assume that the filters $1/F(q^{-1})$ and $H(q^{-1})$ are asymptotically stable. Then the eigenvalues of $A^{-1}B$ are given by $H(\alpha_k)$, $k = 1, \ldots, m$ where $\{\alpha_k\}$ are the zeros of $z^m F(z^{-1})$.

(This property has been used in [6, 7] to derive necessary and sufficient conditions for the local convergence of recursive extended-matrix estimation algorithms).

Proof. Let $\lambda \in \mathrm{Spec}\, A^{-1}B$, hence $\det[\lambda I - A^{-1}B] = 0$ or equivalently, $\det[\lambda E\varphi(t)t\varphi(t)^T - EH(q^{-1})\varphi(t)\cdot\varphi(t)^T] = 0$. Introduce the following notations

$$Q = \lambda E\,\varphi\,(t)\,\varphi\,(t)^T - EH\,(q^{-1})\,\varphi(t)\cdot\varphi(t)^T =$$

$$= E\,[\lambda - H(q^{-1})]\varphi\,(t)\cdot\varphi\,(t)^T;\ x = [x_1\ \ldots\ x_m]^T;$$

$$X\,(z) = x_1 z + \ldots\ x_m z^m;\ F^*\,(z) = z^m\,F(z^{-1}).$$

Consider the equation

$$0 = Qx = E\left\{\frac{\lambda - H(q^{-1})}{F(q^{-1})}\begin{bmatrix} e(t-1) \\ \vdots \\ (et-m) \end{bmatrix}\cdot\frac{X(q^{-1})}{F(q^{-1})}\,e\,(t)\right\}$$

which can also be written as

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\lambda - H(z)}{F(z)}\cdot\frac{z^m X(z^{-1})}{z^m F(z^{-1})}\cdot z^{j-1}\,dz = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m, \qquad (3)$$

the integration contour being the unit circle. It follows from [9] that in (3) the integrand (except for the factor z^{j-1}) must be analytic inside the unit disc U. Now since $f_0 \neq 0$ the polynominal $F^*(z) = z^m F(z^{-1})$ has degree m, while the degree of $X^*(z) = z^m X(z^{-1})$ is equal to $m-1$. Let α_k denote an arbitrary zero of $F^*(z)$. Then, according to the above discussion, for $\lambda \neq H(\alpha_k)$ the only solution of (3) is $X^*(z) \equiv 0$. Thus no $\lambda \neq H(\alpha_k)$ can fulfil the condition $\det[\lambda I - A^{-1}B] = 0$. For $\lambda = H(\alpha_k)$ we can take $X^*(z) = \dfrac{F^*(z)}{z - \alpha_k} \not\equiv 0$ and so Q is singular. It follows that $\lambda = H(\alpha_k)$ is an eigenvalue of $A^{-1}B$. It remains only to show that the multiplicity degree of α_k as a zero of $F^*(z)$ is equal to that of the eigenvalue $H(\alpha_k)$. However this follows readily by a straightforward perturbation argument.

Remark. Many other problems involve matrices of the form $A^{-1}B$. For instance, if $x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, and if $Z = A^{-1}(e^{At} - I_m)$, then $x(t) = e^{At}\cdot x_0 + ZBu = x_0 + Z(Ax_0 + Bu)$. The matrix Z plays some role; if $x_0 = 0$, $B = I_m$ then $x(t) = Zu$, so the elements of Z could be obtained by taking controls u as being the vectors of the canonical basis of $\mathbb{R}^m$. If A is a companion, Z can be explicitly calculated. ∎

We may also remark that some of the above results can be extended to complex matrices or to operators on Hilbert spaces. Some extensions to A^+B (A^+ being the pseudoinverse of A) could also be interesting.

REFERENCES

1. *P. Arminjon*, Analyse numérique matricielle, La presse de L'Université de Montreal, Canada 1978.
2. *L. Ljung*, IEEE Trans. Automat. Control., AC-22 (1977), 539–551.
3. *P. Stoica, T. Söderström*, Int. J. Control, 33 (1981), 433–454.
4. *P. Stoica, T. Söderström*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-26 (1981), 712–717.
5. *T. Söderström, P. Stoica*, Comparison of some instrumental variable methods-consistency and accuracy aspects, Report UPTEC 7888 R, Uppsala Univ., Sweden, Oct. 1978; also Automatica, 17 (1981), 101–115.
6. *J. Holst*, Adaptive prediction and recursive estimation, Report TFRT-1013, Lund Inst. of Technology, Sweden, sept. 1977.
7. *P. Stoica, T. Söderström, J. Holst*, Analysis of extended matrix methods (in preparation).
8. *E. Kreindler, A. Jameson*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-17 (1972), 147–148.
9. *K. J. Åström, T. Söderström*, IEEE Trans. Automat. Contr. AC-19 (1974), 769–773.

Cîteva proprietăţi spectrale ale matricilor de tip $A^{-1}B$

În lucrare sînt prezentate cîteva proprietăţi spectrale ale matricelor de tip $A^{-1}B$ (relativ la localizarea valorilor proprii), care au loc în diverse ipoteze asupra matricelor pătrate A şi B. Aceste proprietăţi sînt utile în probleme de stabilitate şi în analiza convergenţei unor algoritmi de estimare.

C.Z.: 535.54
541.135.6

REALIZAREA UNEI INSTALAȚII EXPERIMENTALE PENTRU STUDIUL EFECTULUI FARADAY REZONANT ȘI NEREZONANT LA GAZE

GH. A. STANCIU, GABRIELA F. CONE, I. M. POPESCU, C. M. STOICHIȚA *

Avînd în vedere importanța cunoașterii rotației Faraday pentru studiul gazelor, în cazul rezonanței, se prezintă o instalație experimentală bazată pe metoda polarizorului rotitor. Este prezentată evoluția unghiului de rotație în funcție de presiunea gazului (Ne).

1. Introducere

Printre fenomenele magnetooptice care demonstrează că proprietățile optice ale substanței se modifică sub acțiunea cîmpului magnetic se numără și efectul Faraday. Rotația Faraday apare datorită faptului că partea reală a indicelui de refracție este diferită pentru lumina polarizată circular dreapta și cea polarizată circular stînga.

Experimental s-a determinat că rotirea planului de polarizare a luminii liniar polarizate, Φ, depinde de lungimea l a substanței pe care o străbate și de inducția B a cîmpului magnetic longitudinal conform relației,

$$\Phi = \theta B \; l, \tag{1a}$$

unde θ reprezintă constanta Verdet. Unghiul Φ poate fi exprimat ca fiind egal cu jumătate din diferența de fază ce apare între cele două unde polarizate circular dreapta și stînga, provenite din radiația incidentă polarizată liniar,

$$\Phi = \frac{1}{2} \Delta \varphi = \frac{\omega(n_d - n_s)l}{2c}, \tag{1b}$$

Exprimînd indicii de refracție n_d și n_s în funcție de frecvența ω a undei liniar polarizate și de frecvența Larmor ω_L, se poate obține o legă-

Manuscris primit la data de 4 ianuarie 1982.
* Șef lucrări, dr. ing.; Șef lucrări; Prof. dr. ing.; Ing. Catedra Fizică

tură directă între unghiul Φ și factorul giromagnetic g_F, care în cazul unei stări excitate prezintă o importanță deosebită.

Efectul Faraday oferă informații deosebit de utile despre structura atomică, atît în cazul nerezonant, cît mai ales în cazul rezonant . Pe baza acestui efect s-a determinat simetria impurităților necubice într-o rețea cristalină cubică [1], s-a propus un model pentru un centru colorat [2]. Alte aplicații ale efectului Faraday în știință și tehnică sînt date în [3].

Rotația Faraday în semiconductori depinde de tranzițiile interbenzi (efectul purtătorilor liberi) [4], [5], permițînd determinarea masei efective a purtătorilor liberi și de tranzițiile bandă de valență — bandă de conducție (efectul electronilor legați), ceea ce duce la obținerea de date asupra factorului giromagnetic al benzilor [6].

Utilizînd rotația Faraday în vecinătatea unei linii de rezonanță optică pentru tranziția corespunzătoare liniei 632,8 nm în Ne, s-a determinat coeficientul de absorbție pe baza variației cîmpului magnetic [7].

În această lucrare propunem o metodă de determinare a rotației Φ atît în cazul nerezonant cît și în apropierea liniei de rezonanță, asemănătoare cu cea propusă în [8].

2. Rezultate experimentale și discuții

Instalația experimentală realizată de noi este prezentată în figura 1

Un laser cu HeNe acordat pe lungimea de undă 632,8 nm trimite lumină liniar po'arizată asupra probei (neon sau amestec He Ne). Gazul se află într-un tub cu lungimea de 1,5 m, care este plasat în cîmpul magnetic de inducție B al unui solenoid. În continuare fasciculul laser străbate un polarizor montat în centrul unui disc, care este acționat de un motoraș cu frecvența ω_0. Cu ajutorul analizorului montat pe un goniometru se asigură extincția fasciculului, ceea ce este necesar dacă se lucrează cu metoda de nul. Semnalul de la fotocelulă și semnalul de sincronizare cu

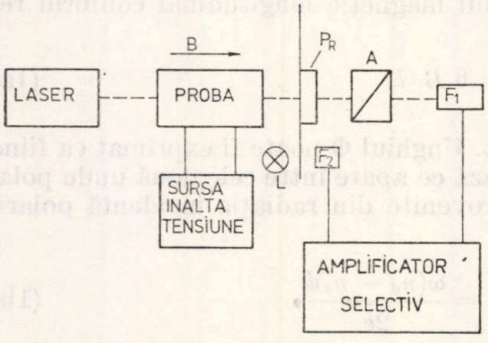


Fig. 1 — Schema bloc a instalației experimentale

polarizorul rotitor intră într-un amplificator selectiv de tipul Ithaco. Amplificatorul este prevăzut cu un instrument de măsură etalonat în mV.

Funcționarea instalației are loc în modul următor : se rotește analizorul astfel încît axa sa de transmisie să fie perpendiculară pe planul de polarizare al luminii. În acest caz armonica a doua a intensității luminii

$I_{2\omega_0}$ este nulă. În cazul aplicării cîmpului magnetic pe probă are loc o rotație Faraday Φ a planului de polarizare a luminii laser, ceea ce face ca armonica a doua să aibă expresia [8]:

$$I_{2\omega_0} = \frac{1}{4} I_L[(1 + \cos 2\Phi) \cos 2\omega_0 t - \sin 2\Phi \sin 2\omega_0 t], \quad (2)$$

unde I_L este intensitatea luminii laser.

Semnalul obținut în urma rotației cu un unghi $\Delta\Phi$ mic se obține prin diferențierea relației (2):

$$\Delta I_{2\omega_0} = -\frac{1}{2} I_L \Delta\Phi \cos 2\omega_0 t. \quad (3)$$

Relația (3) arată că armonica a doua depinde liniar de unghiul de rotație Faraday, $\Delta\Phi$. Pentru a asigura o măsurare a armonicii a doua, discul pe care este montat polarizorul rotitor este prevăzut cu două fante care permit sincronizarea între polarizor și amplificatorul selectiv.

S-a făcut o etalonare a instrumentului în grade sexagesimale. S-a lucrat cu o frecvență de rotație a polarizorului foarte stabilă de 98 Hz.

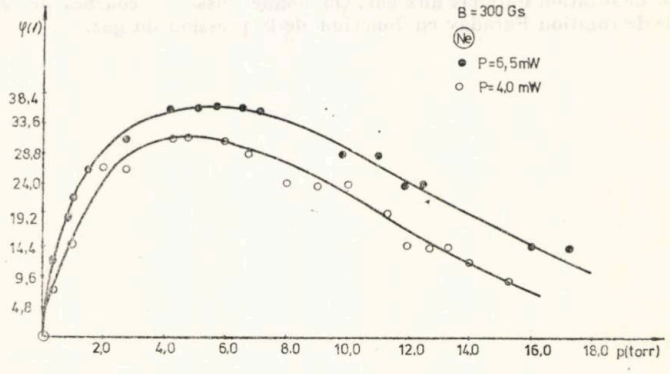


Fig. 2 Unghiul de rotație Faraday în funcție de presiunea gazului.

Instalația descrisă a fost utilizată pentru determinarea rotației Faraday rezonante la neon. În figura 2 se prezintă dependența unghiului de rotație Faraday de presiunea gazului.

Un studiu detaliat al dependenței unghiului de rotație Faraday de diferiți parametri, în neon și în amestec He Ne va fi publicat [9].

Precizia metodei este de 2,4 minute de arc, fiind limitată de instrumentul de măsură al amplificatorului. Precizia poate fi îmbunătățită pînă la 0,6 minute de arc, limită impusă de goniometru.

3. Concluzii

Instalaţia experimentală realizată după o soluţie tehnică simplă permite determinarea rotaţiei Faraday rezonante şi nerezonante cu o foarte bună precizie. Ea poate fi utilizată atît în cadrul unor lucrări de cercetare fundamentală (determinări spectroscopice) cît şi în cazul unor cercetări aplicative (studii asupra mediilor active laser).

BIBLIOGRAFIE

1 *L. A. Alekseeva, P. P. Feofilov*, Sov. Phys. Solid State, *10*, 1397 (1968).
2 *H. Paus, F. Luty*, Phys. Rev. Letters, *20*, 57 (1968).
3 *G. Cone*, Buletinul IPB, Tom. XLII, Nr. 4, 25 (1980).
4 *J. Badoz*, Ann. Phys. *5*, 22 (1970).
5 *D. L. Mitchell, E. D. Palik, R. F. Wallis*, Phys. Rev. Lett., *14*, 827 (1965).
6 *A. K. Walton, U. K. Mishra*, Proc. Phys. Soc., *90*, 1111 (1967).
7 *W. Winiarczuk*, Acta Phys. Pol. *A52*, 157 (1977).
8 *E. Tătaru*, Stud. Cercet. Fizică, *25*, 1019 (1977).
9 *G. Cone, I. M. Popescu, Gh. Stanciu, C. Stoichiţa*, Rev. Roum. Phys. (în curs de publicare).

Installation expérimentale pour l'étude de l'effet Faraday résonant et nonrésonant dans les gaz

On présente une installation expérimentale utilisée pour la détermination de l'angle de rotation Faraday aux gaz. On donne aussi les courbes de variation de l'angle de rotation Faraday en fonction de la pression du gaz.

C.Z.: 536.24

PHYSICAL PROBLEMS IN THE DESIGN OF THE CRYOGENIC CABLES

II. COMPUTING METHOD FOR LONGITUDINAL TEMPERATURE DISTRIBUTION IN COUNTERFLOW COOLED CABLES FOR STEADY STATES (IMPROVEMENT OF THE EDNEY-FOX-GILBERT METHOD)

VL. IANCU, D. IORDACHE, M. STAN, DOINA GAVRILĂ, GH. LĂZĂRESCU, A. TOMOVICI *

General equations are presented and polynomial approximations are analysed, estimating the contribution of the different terms. The distribution of the dissipated heat, between the inner and the outer cooling channels, and its longitudinal variation is also discussed. The second order approximation is fully developed, and the fact that the Edney-Fox-Gilbert solution is not selfconsistent (because of the neglected terms) is pointed out. The coefficients for the second order approximation are evaluated for a.c. Al/LN_2 cryoresistive cables, with cylindrical inner symmetry, and numerical results are also presented.

Introduction

The knowledge of the temperature distribution has an outstanding importance for the design of the cryogenic cables. Unfortunately, the thermal state evolution equations are too intricate to be directly integrated. Therefore, different computing methods were elaborated, to ensure the desired accuracy of the estimates, with a small amount of calculations.

The study of these methods points out the absence of a critical analysis of the accepted approximations. For instance, Deschamps et al. [1] obtain too optimistic estimations, because they investigate separately each contribution to the heat balance, neglecting their interdependence. Nagano et al. [2] report very interesting experimental results, but investigate them in the same way. Edney, Fox and Gilbert [3] give no argument for their equations, and the used approximation is not selfconsistent. Clark's method [4] is still too general for numerical computations. The method of Keilin et al. [5] needs special assumptions on the mass density of the fluid entalpy.

Manuscript received 19 February 1982

* Assist.; Conf. Ph. D.; Lecturer; Lect. Ph. D.; Lect. Ph. D., Physics Department; Student

The present work makes a detailed analysis of the thermal state evolution equations and of their approximations, in order to perform a convenient computing method. Section 1 investigates the general equations to reach their simplest form. Section 2 deals with the iterative methods, deducing the longitudinal temperature distribution equations. Section 3 discusses the polynomial approximations of these equations. Section 4 evaluates the coefficients for the second order approximation, for a.c. Al/LN_2 cryoresistive cables, with cylindrical inner (and outer) symmetry. Section 5 reports some numerical results and concluding remarks.

1. General equations

It was shown [6] that all the statistical phenomena can be simulated by Markov processes. Therefore, the most general equation describing the thermal state evolution is the Smoluchowski [6] equation :

$$P(f; \bar{k}, \bar{r}, t | f', \bar{k}', \bar{r}', t') = \int_{\infty} P(f; \bar{k}, \bar{r}, t | f''; \bar{k}'', \bar{r}'', t'') \times$$

$$\times P(f''; \bar{k}'', \bar{r}'', t'' | f'; \bar{k}'; \bar{r}', t') \, df'', \tag{1.1}$$

where $P(f; \bar{k}, \bar{r}, t | f'; \bar{k}', \bar{r}', t') = P(f, f')$ is the conditional probability density of having $f(\bar{k}, \bar{r}, t,) = f$, if for $t' < t$ we had $f(\bar{k}', \bar{r}', t') = f'$. Here $f(\bar{k}, \bar{r}, t)$ is the uniparticle distribution function, satisfying the Boltzmann equation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f - f_0}{\tau_S} + \dot{\bar{k}} \cdot \nabla_{\bar{k}} f + \dot{\bar{r}} \cdot \nabla_{\bar{r}} f = 0, \tag{1.2}$$

where :

$$f_0 = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}} - \mu(T)}{k_B T(\bar{r}, t)} \right) + \eta \right]^{-1}, \tag{1.3}$$

is the distribution for the local equilibrium *, and the microscopic scattering relaxation time $\tau_S(\bar{k}, \bar{r}, t)$ is given by the equation ** :

$$\frac{f - f_0}{\tau_S} = \frac{\eta V}{(2\pi)^3} \int [P(f, f') f' (f - \eta) - P(f', f) f (f' - \eta)] \, d^3k'. \tag{1.4}$$

---

* $\varepsilon_{\bar{k}}$ is the energy of the particle, μ is the electrochemical potential, k_B is the Boltzmann constant, T is the temperature in the point $\bar{r}$, at the moment t, and $\eta = 1$ for fermions, respectively $\eta = -1$ for bosons.

** V is the volume of the studied system, and $f' = f(\bar{k}', \bar{r}', t')$ (one consider the probability $P(f, f')$ at the limit $t' \to t_-$).

It is convenient to define also an average scattering relaxation time by*.

$$\frac{1}{\tilde{\tau}_S} = \sum \frac{\int \frac{f}{\tau_S} \cdot \mathrm{d}^3k}{\int f \cdot d^3k}. \tag{1.5}$$

The equation (1.1) is usually developed into a Kolmogorov differential series. If we cut this series at the second order (this order was imposed by general physical considerations), and if we use the equations (1.2)—(1.5), we find — after some calculations — the Prigogine equation for the thermal state evolution [7]:

$$\left(1 + \tilde{\tau}_S \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\, c_V T) - \nabla(\theta \nabla T) - g_Q\right) = 0, \tag{1.6}$$

where ρ and c_V are the density and specific heat at constant volume of the studied component of the system, respectively, g_Q is the heat source, and $\theta(\bar{r}, t)$ is related to the thermal conductivity λ by the relations

$$\lambda = \left(1 + \tilde{\tau}_S \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\theta.$$

For any temperature dependent function $F(T)$ we can write:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \propto \frac{F - F_0}{\tau_T},$$

where τ_T is the macroscopic thermal relaxation time, and F_0 is the equilibrium (or steady state) value of F. If the system is not too far from equilibrium or any steady state**, the Prigogine criterion $Pg = \frac{\tilde{\tau}_S}{\tau_T}$ is vanishingly small, and we obtain the usual Fourier equation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho c_V T) = \nabla(\lambda \nabla\, T) + g_Q. \tag{1.8}$$

If the system has more than one component, we must add to equation (1.8) (written for each component) the continuity equations:

$$\bar{1}_\Sigma(\lambda_{s1}\nabla T_{s1} - \lambda_{s2}\nabla T_{s2}) = 0 \tag{1.9}$$

* The sum is made over all the constitutive particles (elementary and collective excitations) of the system (and over all the scattering processes).

** For flowing fluids, the fluid speed must be less than the sound speed ($v < c$).

for solid-solid, and : $\lambda_s \bar{1}_\Sigma \cdot \nabla T_s = \alpha (T_s - T_f)$, (1.10)
for solid-fluid separation surfaces, respectively ($\bar{1}_\Sigma$ being the surface versor and α the convective heat exchange coefficient).

2. Iterative methods

The system (1.8)—(1.10) written for counterflow cooled cryogenic cables, is too intricate to be directly integrated, even for cables having cylindrical symmetry for the inner and outer zones (i.e., neglecting the symmetry breaking effects of the gravitational field, or of the three inner zones in a.c. triphasic cables). More than that, for the evaluation of the fluid temperature distribution, we must add to the system (1.8)—(1.10) the flow equations [8].

The studies of turbulent flows [9] have shown,that, except for the boundary layer, the fluid temperature at a given cross-section is almost constant. This suggests an iterative method with two stages at each iteration. In the first stage of the Ith iteration, one evaluates the longitudinal temperature distribution in the fluid channels, the different terms being computed on the basis of the $(I\text{-}1)^{th}$ iteration for the temperature distribution in the cable. In the second stage, the inner and outer temperature distributions are calculated, using the Ith iteration for the fluid temperature as boundary condition [10]. For the first stage of the first iteration, one must introduce some convenient assumptions, in order to estimate the different terms of the equations. Further, we will study only this stage.

For fluid in monophasic flows, and neglecting the symmetry breaking effects, the different parameters (ρ, c_V, λ) are only temperature dependent. Then, the equation (1.8) becomes :

$$\varkappa \rho c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{d\lambda}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + g_Q, \tag{2.1}$$

where :

$$\varkappa = 1 + \frac{d \ln (\rho c_V)}{d (\ln T)}. \tag{2.2}$$

In steady states $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Then, we have :

$$(-1)^{i-1} \varkappa \rho c_V v_i \cdot \frac{dT_i}{dz} = \lambda \frac{d^2 T_i}{dz^2} + \frac{d\lambda}{dT} \left(\frac{dT_i}{dz} \right)^2 + g_{Qi}, \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

where $T_1 (T_2)$ is the fluid temperature in the inner (outer) channel, and $v_1 (v_2)$ is the corresponding flow speed. If we integrate the equations (2.3) over the cross-sectional channel areas, we obtain :

$$(-1)^{i-1} \varkappa \dot{M} c_V \frac{dT_i}{dz} = l \Lambda_i \cdot \frac{d^2 T_i}{dz^2} + l \frac{d\Lambda_i}{dT} \left(\frac{dT_i}{dz} \right)^2 +$$
$$+ \dot{Q}_i' + \lambda_{eff} (T_j - T_i), \quad i, j = 1, 2 \ (i \neq j), \tag{2.4}$$

$\dot{M}$ being the mass flow rate (from equilibrium necessities $\dot{M}_1 = \dot{M}_2 = \dot{M}$), $\dot{Q}'_i$ the linear densities of the dissipated power, $\Lambda_i = \frac{1}{l}\int_{\Sigma_i} \lambda \mathrm{d}S$ the fluid thermal conductances (l is the length of the cable segment), and λ_{eff} the effective thermal conductance between the inner and outer channels.

It is more convenient to use similarity criteria. Noting :

$$z^* = \frac{z}{l}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad q = \frac{\dot{Q}' l}{\varkappa \dot{M} c_V T_0}, \quad c = \frac{l\lambda_{eff}}{\varkappa \dot{M} c_V}, \tag{2.5}$$

where T_0 is the incoming fluid temperature for all the channels, the system (2.4) becomes :

$$(-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathrm{d}T_i^*}{\mathrm{d}z^*} = \frac{\Lambda_i}{\varkappa \dot{M} c_V} \cdot \frac{d^2 T_i^*}{\mathrm{d}z^{*2}} + \frac{T_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\Lambda_i}{\mathrm{d}T}}{\varkappa \dot{M} c_V} \left(\frac{\mathrm{d}T_i^*}{\mathrm{d}z^*}\right)^2 + q_i + c(T_j^* - T_i^*),$$

$$i, \ j = 1, 2 \ (i \neq j). \tag{2.6}$$

This system is still too involved, so that we must resort to approximations.

3. Polynomial approximations

The system (2.6) is valid at any iteration. For the first iteration it is convenient to consider $T_1^*(z^*)$ and $T_2^*(1 - z^*)$ as polynomials of the nth order. By substituting these polynomials (with unknown coefficients) in eqs. (2.6) (considered as identities), we will obtain some specific conditions for the different terms of the right hand side of the equations.

The first condition is that T_1^* and T_2^* must be polynomials of the same order. More than that, c must be a constant. Then, we have to take for c a value at an average temperature $\tilde{T}^*$ (see Section 4). The second term in the right hand side fits only for polynomials of the first order and for $\frac{\mathrm{d}\Lambda_i}{\mathrm{d}T} = \text{const}$. The first term in the right hand side is available only if $\Lambda_i = \text{const}$.

The numerical estimation of the different terms shows that the neglect of the Λ and $\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}T}$ terms lead to errors less than 3%. Then, for the first iteration, the system (2.6) becomes the usual Edney-Fox-Gilbert [3] system :

$$(-1)^{i-1} \frac{\mathrm{d}T_i^*}{\mathrm{d}z^*} = q_i + c(T_j^* - T_i^*), \ i, \ j = 1, \ 2 \ (i \neq j). \tag{3.1}$$

We have now to discuss the contribution of the power source terms q_i. They can also be considered as polynomials of z^*(or $1-z^*$, respectively). If $c = 0$ (no heat transfer between the inner and the outer channels), then T_i^* can be obtained by simply integrating q_i, with the initial conditions :

$$T_1^*(z^*)\,|_{z^*=0} = T_2^*(1-z^*)\,|_{z^*=1} = 1. \tag{3.2}$$

When $c \neq 0$, we can separate the equations to obtain :

$$\frac{d^2T_i^*}{dz^{*2}} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{dq_i}{dz^*} - c(q_1+q_2), \quad i=1, 2. \tag{3.3}$$

We see that, if $q_i(z^*)$ are polynomials of nth order, but $q_1 + q_2$ is a polynomial of the $(n-1)^{th}$ order, then T_i^* are polynomials of the $(n+1)^{th}$ order. If $q_1 + q_2$ has also the nth order, then T_i^* will have the $(n+2)^{th}$ order.

4. The second order approximation

The experimental results [1, 2, 3, 11] allow us to make the assumption that, for counterflow cooled cables, the T_i^* behave like parabola segments (with $\frac{d^2T_i^*}{dz^{*2}} < 0$), with errors less than about 10%. The simplest way to reach that is the Edney-Fox-Gilbert [3] supposition that both q_1 and q_2 are constants. We will show that this is not the best supposition (this is not selfconsistent with the conclusions of Sect. 3). To do that, we must explicitate q_1 and q_2.

We will analyse a.c. Al/LN_2 mono- or triphasic cables ($T_0 = 77.32$ K), with inner and outer cylindrical symmetry. The first contribution we will take into account is the friction heat, given by the relations* [8] :

$$\dot{Q}'_{fi} = \rho P_i f_i \left(\frac{\dot{M}_i}{2\rho S_i}\right)^3, \tag{4.1}$$

where S_i and P_i are cross-sectional areas and perimeters of the channels, respectively, f being the friction factors, for which we propose the expression (see [8, 10]):

$$\frac{1}{\sqrt{f_i}} = -1.9 \lg\left[\left(\frac{6.75\,\eta P_i}{4\dot{M}_i}\right)^{0.95} + \left(\frac{h_i P_i}{15 S_i}\right)^{1.05}\right], \tag{4.2}$$

* For triphasic cables : $\dot{M}_2 = 3\,\dot{M} = 3\dot{M}$. Then, if we put $\dot{M}_2 = \dot{M}$ in the denominator of the relations (2.5), we must multiply $\dot{Q}'_{f2}$ with $\frac{\varphi}{3}$, φ being a corrective factor for the symmetry breaking in the outer channel. The investigations have shown that $\varphi \simeq 2.5$ and we will overestimate it by taking $\varphi = 3$.

h being the absolute roughness. The ratio $\frac{\eta_f}{\eta_w}$ (η_f, η_w being the shear viscosities at bulk fluid and wall temperature) is very close to 1 for our problem, so that the corresponding correction [12] can be neglected.

Another contribution is the external heat (transfered from the surroundings). If we use superinsulation :

$$\dot{Q}'_{\text{super}} = \lambda_{\text{super}} \Delta T_{\text{super}}, \tag{4.3}$$

and then we have* :

$$\dot{Q}'_{e2} = \lambda_{\text{ext}}(T_a - T_2), \tag{4.4}$$

where T_a is the ambient temperature (e.g. $T_a = 300$ K). Certainly, if we use this relation, we have no more polynomial approximation. Then it is useful to overestimate this contribution, by puting :

$$\dot{Q}'_e = \lambda_{\text{ext}}(T_a - T_0) = \dot{Q}'_e \tag{4.5}$$

(clearly $\dot{Q}'_{e1} = 0$).

λ_{ext} is the effective thermal conductivity between the outer channel and the surroundings. If we note with λ_1 (λ_2) the effective conductivities from the maximum temperature radius ** to the inner (outer) channel, we have [13] :

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\pi N u_1 \lambda_{\text{LN}_2}} + \frac{1}{2\pi} \sum_k^{(i)} \frac{\ln\left(\frac{R_k}{r_k}\right)}{\lambda_k}, \quad i = 1, 2, \tag{4.6.a}$$

$$\frac{1}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}, \quad \frac{1}{\lambda_{\text{ext}}} = \frac{1}{\pi N u_2 \lambda_{\text{LN}_2}} + \frac{1}{2\pi} \sum_k^{(\text{ext})} \frac{\ln\left(\frac{R_k}{r_k}\right)}{\lambda_k} + \frac{1}{\pi N u_a \lambda_a}, \tag{4.6.b}$$

where the sums are performed over the solid components of the different zones, r_k and R_k are the inner and outer radii of the component k, and the Nusselt criterion is :

$$Nu_i = \frac{4\dot{M}_i}{P_i} \sqrt[3]{\frac{c_p}{\eta^2 \lambda_{\text{LN}_2}}} \cdot j_i, \quad i = 1, 2 \tag{4.7}$$

---

* For triphasic cables : $\dot{Q}'_{e2} = \frac{1}{2} \lambda_{\text{ext}}(T_a - T_0)$.

** The radius of the metal-insulator surfaces, see [10].

(for liquids, $c_V \simeq c_p$). Considering the different investigations [9, 14], we propose for the Colburn factors j_i the expression* :

$$\frac{1}{\sqrt{8j_i}} = -1.9 \lg \left[\left(\frac{6.75 \eta_l P_i}{4 \dot{M}_i} \right)^{0.95} + \left(\frac{h_i P_i}{15 S_i} \sqrt[3]{\frac{\eta_l^2 c_p^2}{\lambda_{LN_2}^2}} \right)^{1.05} \right] \tag{4.8}$$

(we have also neglected the contribution of the ratio $\frac{\eta_{lf}}{\eta_{lw}}$). As Nu_a depends on the temperature difference at the external surface, but is certainly great, we shall neglect also this term. The whole overestimation of $\dot{Q}_s'$ will still rest less than 5%.

We reach now the main contribution to the heat balance, namely the Joule dissipated heat in the conductors ($\dot{Q}_c'$) and in the insulator ($\dot{Q}_i'$). The heat dissipated in the insulator is :

$$\dot{Q}_i' = \frac{2\pi\omega\varepsilon \operatorname{tg}\delta \; U_{eff}^2}{\ln\left(\frac{R_{\text{ins}}}{r_{\text{ins}}}\right)}, \tag{4.9}$$

where ω and U_{eff} are the frequency and the effective tension of the electric power, ε and $\operatorname{tg}\delta$ being the insulator permitivity and loss tangent. The heat dissipated in conductor has a more intricate expression. For instance, for tubular conductors (with the dimensions r_c, $R_c > d$, $\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2\rho_0}{\mu}}$ being the penetration depth, ρ_0 the resistivity [15], and μ the permeability of the conductor), we have :

$$\dot{Q}_c' = \frac{\rho_0 I_{eff}^2}{2\pi d \cdot R_c} \cdot \frac{1 \cdot 8 + 1 \cdot 6\, Ko + 1.53\, Ko^2 + 0.00177\, Ko^3}{1 \cdot 8 + 1.6 Ko + 0.53\, Ko^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sh} 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}} + \sin 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}}}{\operatorname{ch} 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}} - \cos 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}}}, \tag{4.10}$$

I_{eff} being the effective intensity of the electric power, $Ko = \frac{10^5}{4} \cdot \frac{B_{eff}}{en\rho_0}$ — the Kohler criterion (e and n are the elementary electric charge and the electronic density, respectively) [16], and :

$$B_{eff} = \frac{\mu \cdot I_{eff}}{2\pi \sqrt{\frac{R_c}{\mathrm{d}}(R_c^2 - r_c^2)}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}} - \sin 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}}}{\operatorname{ch} 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}} - \cos 2\,\frac{R_c - r_c}{\mathrm{d}}}} \tag{4.11}$$

is the effective magnetic field in the conductor.

* See the note at page 6.

The Joule heat source is placed between the inner and outer channels. Therefore, we have to study how this heat is distributed between the channels. One simple supposition is that the whole heat is transfered to the channel which has the lower temperature. Unfortunately, this supposition does not fit for the second order approximation, even if we try to work with two parabolas continuously connected at the equal temperature point [17]. Another assumption is that the heat dissipated in conductor is transfered to the inner channel, and the heat dissipated in insulator is transfered to the outer channel. As the electric conductors are also good heat conductors, we can improve this assumption considering the whole Joule heat ($\dot{Q}'_J = \dot{Q}'_c + \dot{Q}'_i$) divided in the same ratio as the effective thermal conductivities. Then, we have :

$$\dot{Q}'^{(0)}_{J1} = \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_2} \equiv s_1 \dot{Q}'_J, \quad \dot{Q}'^{(0)}_{J2} = \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_1} \cdot \dot{Q}'_J \equiv s_2 \dot{Q}'_J. \tag{4.12}$$

These relations are in agreement with the Edney-Fox-Gilbert [3] method, but take no account for the influence of the longitudinal temperature variations. Eqs. (3.3) allow us to use linear polynomials in z^*, instead of eqs. (4.12). To reach these polynomials, we need the first order approximation ($c = 0$). Using eqs. (3.1) and (4.12), we obtain :

$$T_1^{*(0)} = 1 + \frac{(\dot{Q}'_{f1} + s_1 \dot{Q}'_J) l}{\varkappa \dot{M} \cdot c_p \cdot T_0} z^* \equiv 1 + k_1 \cdot \Delta T^* \cdot z^*, \tag{4.13.a}$$

$$T_2^{*(0)} = 1 + \frac{(\dot{Q}'_{f2} + \dot{Q}'_e + s_2 \dot{Q}) l}{\varkappa \dot{M} \cdot c_p \cdot T_0} (1 - z^*) \equiv 1 + k_2 \Delta T^* (1 - z^*), \tag{4.13.b}$$

where $\Delta T^* = T^*_{\max} - 1$, and $T_{\max}$ is the maximum temperature in the cable segment.

At this moment, we can make a better estimate of the distribution of the Joule dissipated heat. We will assume that $\dot{Q}'_{J1} = \dot{Q}'_{J2}$ satisfy the conditions :

$$\frac{\dot{Q}'_{J1}}{\dot{Q}'_{J2}} = \frac{\lambda_1 (T^*_{\max} - T_1^{*(0)})}{\lambda_2 (T^*_{\max} - T_2^{*(0)})}, \quad \text{and} : \dot{Q}'_{J1} + \dot{Q}'_{J2} = \dot{Q}'_J. \tag{4.14}$$

Solving this system up to first order in z^* (we have $s_1, s_2, z^* < 1$, $k_1, k_2 \lesssim 1$), we obtain :

$$\dot{Q}'_{J1} = [s_1 (1 + s_2 k_2) - s_1 s_2 (k_1 + k_2) z^*] \dot{Q}'_J, \tag{4.15. a}$$

$$\dot{Q}'_{J2} = [s_2 (1 + s_1 k_1) - s_1 s_2 (k_1 + k_2) (1 - z^*)] \dot{Q}'_J. \tag{4.15.b}$$

By replacing (4.15) in (2.5), we found that :

$$q_1 = a_1 - b \cdot z^*, \quad q_2 = a_2 - b\,(1 - z^*), \tag{4.16}$$

with :

$$a_1 = \frac{\dot{Q}'_{f1} + s_1\,(1 + s_2 k_2)\,\dot{Q}'_J}{\varkappa \dot{M} \cdot c_p \cdot T_0} \cdot l, \qquad a_2 = \frac{\dot{Q}'_{f2} + \dot{Q}'_e + s_2\,(1 + s_1 k_1)\dot{Q}'_J}{\varkappa \dot{M} \cdot c \cdot T_0} \cdot l,$$

$$b = \frac{s_1 s_2\,(k_1 + k_2)\,\dot{Q}'_J}{\varkappa \dot{M} \cdot c_p \cdot T_0} \cdot l \qquad . \tag{4.17}$$

The eqs. (4.16) are selfconsistent with the before discussed conditions for the second order approximation, and therefore represent the best initial assumption. We must add that, having parabolic solutions for the temperature, the average temperature $\widetilde{T}^*$ (at which the different material constants are evaluated) can be taken as : $\widetilde{T}^* = 1 + \frac{2}{3}\,\Delta T^*$. (4.18)

Introducing (4.16) in (5.3), and solving the system, we finally obtain the second order approximation for the longitudinal temperature distribution : $T_1^* = 1 + A_1 z^* - B \cdot z^{*2}$; $T_2^* = 1 + A_2\,(1 - z^*) - B(1 - z^*)^2$, (4.19) with the coefficients :

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\,(1 + c)\,(a_1 + a_2) + \frac{a_1 - a_2}{1 + c} - c.b\right],$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\,(1 + c)(a_1 + a_2) + \frac{a_2 - a_1}{1 + c} - c \cdot b\right],$$

$$B = \frac{1}{2}\,[c\,(a_1 + a_2) + (1 - c)]. \tag{4.20}$$

We shall make no discussion on the different conditions satisfied by our coefficients*. We only point out that the outgoing fluid temperature for any channel is greater than the incoming one.

5. Numerical results and concluding remarks

We have already presented [16] a set of numerical computations of some monophasic similarity models. In that computation, a simpler relation for the Nusselt criterion [18] was used, and the $\varkappa$ correction was neglected (by taking $\varkappa = 1$, as in the Edney, Fox and Gilbert paper [3]).

* Such a discussion was made by Edney et al. [3], for their simpler solution.

If we use eqs. (4.7)—(4.8) for the Nusselt criterion, the corrections to the final results (namely the temperature variations ΔT) will be of the order of 0.01 K.

The $\varkappa$ correction is much more important. For the liquid nitrogen, on the usual temperature range (70...100 K) : $\varkappa = 0.44 \pm 0.0001$.

We have also studied the design of a real triphasic cable segment. For an electric power $P_a = 1$ GVA, at a tension $U = 400$ kV, conveyed on a length $l = 10$ km, using liquid nitrogen with a mass flow rate $\dot{M} = 3.6$ kg.s^{-1} for each inner channel, we have obtained $A_1 = 0.6497514$, $A_2 = 0.5833952$, and $B = 0.4465879$, giving $\Delta T = 18.2734$ K. Our results are in good agreement with those reported by other researchers [1, 2, 11]. We do not expect errors greater than about 10%.

The general thermal state evolution equations were discussed, to justify eqs. (3.1) for the longitudinal steady state temperature distribution in counterflow cooled cables. The $\varkappa$ correction (see eq. (2.2)) was introduced. By analysing the heat source, and its distribution between the cooling elements (channels), we have obtained the best expressions for q_1, q_2, leading to the second order approximation in a selfconsistent way. Numerical computations were carried out, and our results agree with the published experimental data. The main advantage of our method is the possibility of constructing polynomial approximations of any order, by simply reevaluating q_1 and q_2. One can also use different numerical methods [10], to integrate eqs. (2.6) directly.

REFERENCES

1. a) *L. Deschamps, A. M. Schwab, Y. Jégou*, Electr. Fr., Bull. dir. ét. rech., (B), *1*, 49 (1973); b) *Z. Croitoru, L. Deschamps, A. M. Schwab*, Entropie, *56*, 47 (1974); c) *L. Deschamps, A. M. Schwab, A. Lacoste*, Electr. Fr., Bull. dir. ét. rech., (B) *2*, 64 (1975).
2. *H. Nagano, M. Fukusawa, S. Kuma, K. Sugiyama*, Cryogenics, *13* (4) 219 (1973).
3. *K. Edney, M. Fox, G. Gilbert*, Cryogenics, *7* (6) 355 (1967).
4. *J. A. Clark* „Cryogenic Heat Transfer" in „Advances in Heat Transfer", 5th vol., Acad. Press, New York, 1968.
5. *V. E. Keilin, I. A. Kovalev, M. M. Pozvonkov*, Cryogenics, *15* (6) 323 (1975).
6. *M. Stan* „Problems in fluctuation theory", Ph. D. thesis (unpublished).
7. *I. Prigogine* „Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes", 1962.
8. a) *N. Z. Frenkel* „Guidavlika", Gos. energ. izd., Moscow, 1956; b) *L. D. Landau, E. M. Lifschitz* „Mécanique des fluides", Mir, Moscow, 1971; c) *P. Brădeanu* „Mecanica fluidelor", Ed. tehn., Bucharest, 1973.
9. *M. J. Lewis*, Int. J. Heat Mass Transfer, *17*, 809 (1974).
10. *Gh. Lăzărescu, D. Iordache, Vl. Iancu, L. Popa, V. Tudoricu*, Bul. Inst. Pol. Bucharest, Electr. S., to be published (no. 3 of this series).
11. a) *P. A. Klaudy, Th. Wasserab*, Rheinisch-Westfalische Akademie der Wissenschaften Vorträge, *223* (1973); b) *E. L. Blinkov, E. S. Goldenberg, A. Ia. Saveliev, K. A. Mironova* „Sverchprovodiatschie linii elektroperedatchi", Inst. G. M. Krjijanovski, Moscow, *39*, 9 (1975); c) *E. L. Blinkov, L. L. Guglina, E. S. Goldenberg*, ibid., *39*, 22 (1975); d) *E. L. Blinkov, I. V. Iakimetz, I. A. Alexeyev*, Trans. on Magnetics, *15* (1) 159 (1979).
12. *J. Lafay*, Int. J. Heat Mass Transfer, *17*, 815 (1974).
13. *C. Stamatescu et al.* „Tehnica frigului", 2nd vol., Ed. Tehn., Bucharest, 1979.
14. *A. P. Colburn*, Trans. Am. Inst. Chem. Eng., *29*, 174 (1933).

15. *H. Jones*, Handb. d. Phys., XIX, Springer Verlag, Berlin, 1956.
16. *D. Iordache, Vl Iancu, Gh. Lăzărescu, I. Pop, L. Iftode, C. Mocuța*, Bul. Inst. Pol. Bucharest, Electr. S., *43* (2) (15 (1981).
17. *F. Schauer*, Cryogenics, *20* (8) 472 (1980).
18. *P. Perroud, J. Rebière, L. Weil* „Convection forcée de l'azote et de l'hydrogène liquide'' in „Pure and Applied Cryogenics'', 4th vol., Pergamon Press, London, 1966.

Probleme fizice în proiectarea cablurilor criogenice

II. Metoda de calcul a distribuției longitudinale a temperaturii în cabluri răcite în contracurent pentru stări staționare (îmbunătățire a metodei Edney-Fox-Gilbert)

Sînt prezentate ecuațiile generale, iar aproximațiile polinomiale sînt analizate, estimînd contribuția diferiților termeni. Sînt, de asemenea, discutate distribuția căldurii disipate între canalele de răcire interior și exterior, precum și variația sa longitudinală. Aproximația de ordinul doi este complet dezvoltată, fiind evidențiat faptul că soluția Edney-Fox-Gilbert nu este selfconsistentă (datorită termenilor neglijați). Coeficienții aproximației de ordinul doi sînt evaluați pentru cabluri criorezistive Al/LN_2 în c.a. cu simetrie interioară cilindrică, rezultatele numerice obținute fiind, de asemenea, prezentate.

C.Z.: 621.3.012.0
538.551
513.83

O NOUĂ METODĂ DE ANALIZĂ A CIRCUITELOR ELECTRICE BAZATĂ PE CALCULUL ITERATIV AL FUNCȚIILOR DE TRANSFER HIBRIDE

M. PREDA, P. CRISTEA, G. IONESCU *

În lucrare se propune o nouă metodă de analiză a circuitelor electrice. Metoda este bazată pe o teoremă de variație a oricărei funcții de rețea, în cazul în care se introduce în circuit o sursă comandată.

Metoda constă în calculul succesiv al tablourilor funcțiilor de rețea hibride.

1. Introducere

Metodele clasice de analiză a circuitelor electrice [1] cum sînt metoda curenților de buclă și metoda potențialelor nodurilor, implică formarea și rezolvarea unor sisteme de ecuații. Metodele topologice de analiză a circuitelor electrice [2, 4] evită formarea și rezolvarea unor sisteme de ecuații, dar implică rezolvarea unor probleme laborioase de topologie cum sînt determinarea tuturor arborilor unor grafe date sau alte probleme echivalente cu aceasta. Metodele mai noi de analiză diacoptică [5] și de construire a matricei impedanțelor sau admitanțelor [6] de transfer nu sînt încă suficient de generale și necesită inversarea unor matrice de ordin superior.

Pentru a evita dezavantajele metodelor amintite mai sus, în această lucrare se prezintă o nouă metodă de analiză a circuitelor electrice bazată pe o teoremă generală de variație a funcțiilor de transfer.

Metoda folosește calculul iterativ al funcțiilor de transfer hibride, întîi pentru un circuit auxiliar simplu și apoi pentru circuite auxiliare din ce în ce mai complicate pînă se ajunge la circuitul complex de analizat. Recalcularea funcțiilor de transfer pe baza teoremei de variație amintite, ce se exprimă printr-o formulă simplă și unică, face ca metoda propusă să fie versatilă, eficientă și adecvată metodelor numerice de calcul.

Metoda se poate aplica în formă literală pentru funcțiile de transfer operaționale, dar prezintă un interes deosebit la calculul numeric al funcțiilor de transfer ce intervin în analiza circuitelor rezistive și de curent alternativ.

Manuscris primit la data de 19 februarie 1982

* Prof. dr. ing.; Conf. dr. ing.; Șef lucrări, dr. ing. Catedra Electrotehnică

Pentru generalitate considerațiile teoretice ce urmează se referă la funcțiile de transfer operaționale din metodele operaționale de analiză a regimurilor tranzitorii.

2. Teorema generală de variație a funcțiilor de transfer hibride

Modificarea unui circuit prin introducerea în circuit a unei surse comandate produce o variație (creștere algebrică) a funcției de transfer operaționale $H_{\alpha\beta}$, de la o poartă β la poarta α a circuitului :

$$\Delta H_{\alpha\beta} = H'_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta} \tag{1}$$

în care $H'_{\alpha\beta}$ și $H_{\alpha\beta}$ sînt valoarea funcției de transfer respective după și înainte de introducerea sursei comandate.

În anexa 1 se demonstrează că această variație $\Delta H_{\alpha\beta}$ se exprimă prin formula

$$\Delta H_{\alpha\beta} = \frac{H_{\alpha j} \cdot H_{k\beta}}{\dfrac{1}{P_{jk}} - H_{kj}} \tag{2}$$

Este important de subliniat că funcțiile de transfer din formula (2) se referă la mărimi adecvate de intrare și ieșire, adică corespunzătoare mărimilor de intrare și ieșire ale porților α, β, j, k.

De exemplu, pentru o poartă β cu mărimea de intrare t.e.m. E_β, o poartă α cu mărimea de ieșire o intensitate I_α și o sursă de tensiune cu t.e.m. $E_j = b_{jk} U_k$ comandată de o tensiune U_k formula (2) devine :

$$\Delta Y_{\alpha\beta} = \frac{Y_{\alpha j} B_{k\beta}}{\dfrac{1}{b_{jk}} - B_{kj}} . \tag{3}$$

În anexa 1 se mai demonstrează că formula (1) este valabilă pentru orice valori ale indicilor α, β, j, k ai porților, (corespunde deci atît pentru imitanțe de intrare, cît și pentru funcții de transfer propriu-zise) și deci constituie o teoremă generală de variație a funcțiilor de transfer (trasmitanțelor) hibride.

3. Modificarea transmitanțelor externe ale unui multiport cînd la porțile acestuia se adaugă uniporți pasivi sau surse comandate

Fie un multiport la care poarta j are ca mărime de intrare o t.e.m. E_j.

Completarea în serie a porții j cu un uniport pasiv de impedanță Z_j este echivalentă (figura 1, a) cu introducerea în serie la această poartă a unei surse de tensiune comandate chiar de curentul acestei porți, cu $E = - Z I$.

Fie un multiport la care poarta j are ca mărime de intrare un curent J_j. Dual, completarea în paralel a porții j cu un diport pasiv de admitanță Y_j este echivalent (figura 1, b) cu introducerea în paralel a unei surse de curent comandate chiar de tensiunea acestei porți, cu $J = Y\ U$.

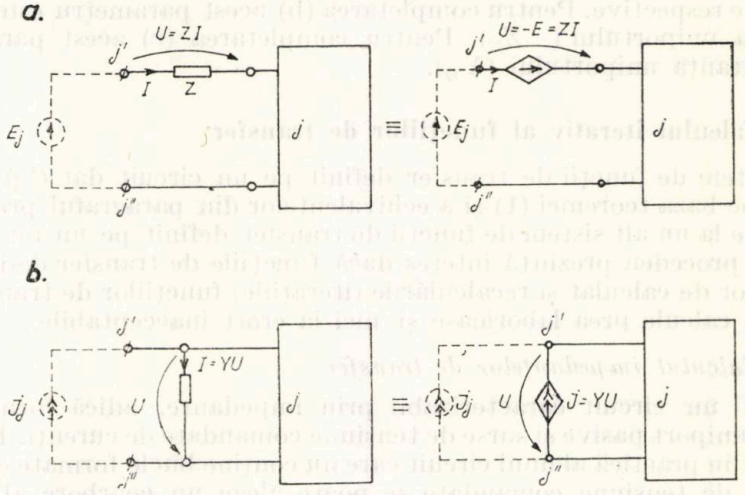


Fig. 1

Mai general, completarea unei porți a unui multiport cu o sursă comandată, a cărei mărime comandată se compune aditiv cu mărimea externă de intrare a porții (fig. 2, a, b) se numește *completare omogenă* a multiportului.

Sursele echivalente considerate mai sus pentru uniportul pasiv realizează completări omogene ale multiporților respectivi.

Se observă că, pentru completările omogene ale unui multiport cu surse comandate de mărimi de ieșire ale porților multiportului, poate fi aplicată teorema generală de variație a transmitanțelor hibride (1).

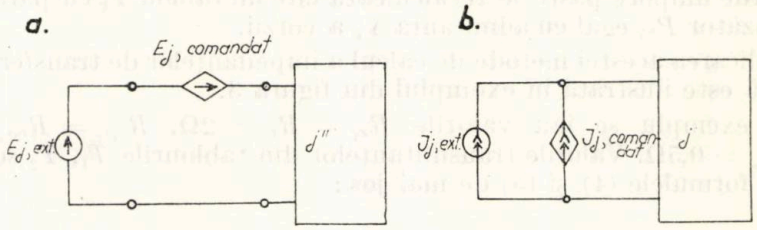


Fig. 2

În concluzie modificarea transmitanțelor externe ale unui multiport (corespunzătoare unor surse externe conectate la porți) poate fi calculată cu teorema (1) de variație a funcțiilor de transfer hibride dacă multipolul se completează la porți :

(a) omogen,, cu surse comandate de mărimi de ieșire ale unor porți ;

(b) în serie cu un uniport pasiv la porți având ca mărime de intrare o t.e.m. ;

(c) în paralel cu un uniport pasiv la porți avînd ca mărime de intrare un curent.

Parametrii în raport cu care se face aplicarea formulei (1) pentru completările respective corespund parametrului de comandă al sursei comandate respective. Pentru completarea (b) acest parametru este minus impedanța uniportului ($-Z_{jj}$). Pentru completarea (c) acest parametru este admitanța uniportului (Y_{jj}).

4. Calculul iterativ al funcțiilor de transfer

Un sistem de funcții de transfer definit pe un circuit dat C poate fi obținut, pe baza teoremei (1) și a echivalentelor din paragraful precedent pornind de la un alt sistem de funcții de transfer definit pe un alt circuit C_0. Acest procedeu prezintă interes dacă funcțiile de transfer definite pe C_0 sînt ușor de calculat și recalculările (iterațiile) funcțiilor de transfer nu conduc la calcule prea laborioase și nici la erori inacceptabile.

a) *Calculul impedanțelor de transfer*

Fie C un circuit caracterizabil prin impedanțe, adică format din elemente uniport pasive și surse de tensiune comandate de curenți. În cazul important în practică al unui circuit care nu conține bucle formate exclusiv din surse de tensiune comandate se poate alege un coarbore al circuitului format exclusiv din elemente uniport pasive. Impedanțele de transfer se calculează simplu pentru un sistem de porți format din cîte o poartă la bornele fiecărei coarde a coarborelui menționat.

Se consideră ca tablou inițial T_0, tabloul impedanțelor de transfer în circuitul avînd cîte o sursă de curent independentă în locul fiecărei coarde (uniport pasiv)a circuitului dat. Impedanța $Z_{\alpha\beta}$ a acestui tablou este evident suma algebrică a impedanțelor Z care produc căderi de tensiune în bucla coardei α de către curentul buclei β. Semnul care precede impedanța Z este cel din expresia căderii respective de tensiune pentru sensul de referință din buclă opus sensului coardei ei. Pentru fiecare reintroducere a unei coarde uniport pasiv se recalculează cîte un tablou T_k cu parametrul corespunzător P_{kk} egal cu admitanța Y_k a corzii.

Aplicarea acestei metode de calcul a impedanțelor de transfer coardă — coardă este ilustrată în exemplul din figura 3.

În exemplu se iau valorile $R_{r_1} = R_{r_2} = 2\Omega$, $R_{r_1r_2} = R_{r_3r_4} = 1\Omega$, $G_{c_1} = G_{c_2} = 0{,}5\Omega$. Valorile transmitanțelor din tablourile T_1, T_2 se calculează cu formulele (4) și (5) de mai jos :

$$R^{(1)}_{c_\alpha c_\beta} = R^{(0)}_{c_\alpha c_\beta} + \frac{R^{(0)}_{c_\alpha c_1} R^{(0)}_{c_1 c_\beta}}{\frac{1}{G_{c_1}} - (-R_{r_1} - R_{r_2})} \tag{4}$$

$$R^{(2)}_{c_\alpha c_\beta} = R^{(1)}_{c_\alpha c_\beta} + \frac{R^{(1)}_{c_\alpha c_2} \cdot R^{(1)}_{c_2 c_\beta}}{\frac{1}{G_{c_2}} - \left(-\frac{11}{7}\right)} \tag{5}$$

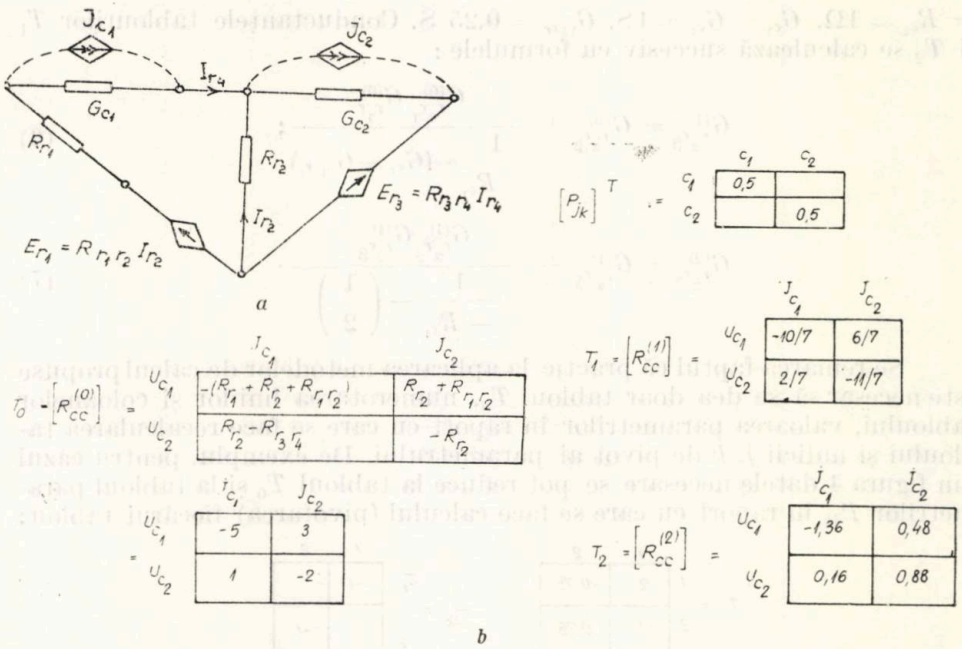


Fig. 3

(b) *Calculul admitanţelor de transfer*

Fie un circuit caracterizabil prin admitanţe, adică format din elemente uniport pasive şi surse de curent comandate de tensiuni.

În cazul important în practică al unui circuit care nu conţine secţiuni formate exclusiv din surse de curent comandate se poate alege un abrore al circuitului format exclusiv din elemente uniport pasive.

Admitanţele de transfer se calculează simplu pentru un sistem de porţi format din cîte o poartă în serie pe fiecare ramură a arborelui menţionat.

Se consideră ca tablou iniţial T_0 tabloul admitanţelor de transfer în circuitul avînd cîte o sursă de tensiune în locul fiecărei ramuri, (uniport pasiv) a circuitului dat. Admitanţa $Y^0_{\alpha\beta}$ a acestui tablou este evident suma algebrică a admitanţelor Y care produc curent în secţiunea ramurii α de către tensiunea electromotoare a ramurii β. Semnul care precede admitanţa Y este cel din expresia intensităţii curentului pentru sensul de referinţă din secţiune opus sensului de referinţă al ramurii ei. Pentru fiecare reintroducere a unei ramuri uniport pasiv se recalculează cîteva un tablou T_k cu parametrul corespunzător P_{kk} egal cu minus impedanţa Z_k a ramurii.

Această metodă de calcul a admitanţelor de transfer ramură-ramură este ilustrată în exemplul din figura 4. În exemplu se iau valorile $R_{c_1} =$

$= R_{c_2} = 1\Omega$, $G_{c_1} = G_{c_2} = 1\text{S}$, $G_{c_1 r_r} = 0{,}25$ S. Conductanțele tablourilor T_1 și T_2 se calculează succesiv cu formulele:

$$G^{(1)}_{r_\alpha r_\beta} = G^{(0)}_{r_\alpha r_\beta} + \frac{G^{(0)}_{r_\alpha r_1} G^{(0)}_{r_1 r}}{\frac{1}{-R_{c_1}} - (G_{c_1} - G_{c_1 r_2})}; \tag{6}$$

$$G^{(2)}_{r_\alpha r_\beta} = G^{(1)}_{r_\alpha r_\beta} + \frac{G^{(1)}_{r_\alpha r_2} G^{(1)}_{r_2 r_\beta}}{\frac{1}{-R_{r_2}} - \left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Se remarcă faptul că practic la aplicarea metodelor de calcul propuse este necesar să se dea doar tabloul T_0, numerotarea liniilor și coloanelor tabloului, valoarea parametrilor în raport cu care se face recalcularea tabloului și indicii j, k de pivot ai parametrului. De exemplu, pentru cazul din figura 4 datele necesare se pot reduce la tabloul T_0 și la tabloul parametrilor P_{jk} în raport cu care se face calculul (pivotarea) fiecărui tablou:

T_0 =

	1	2
1	2	-0,75
2	-1	0,75

P_{jk} =

	1	2
T_1	-1	
2		-1

$T_0 = \left[G^{(0)}_{rr}\right]$ =

	E_{r_1}	E_{r_2}
I_{r_1}	$G_{c_1} + G_{c_2}$	$-G_{c_1} + G_{c_1 r_2}$
I_{r_2}	$-G_{c_1}$	$G_{c_1} - G_{c_1 r_2}$

	E_{r_1}	E_{r_2}
I_{r_1}	2	-3/4
I_{r_2}	-1	3/4

$[P_{jk}]^T$

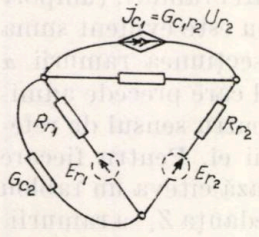
	r_1	r_2
r_1	-1	
r_2		

$T_1 = \left[G^{(1)}_{rr}\right]$ =

	E_{r_1}	E_{r_2}
I_{r_1}	2/3	-1/4
I_{r_2}	-1/3	1/2

$T_2 = \left[G^{(2)}_{rr}\right]$ =

	E_{r_1}	E_{r_2}
I_{r_1}	11/18	-1/6
I_{r_2}	-2/9	1/3



a *b*

Fig. 4

Așa cum rezultă din relația (2) pentru a evidenția poziția pivoților este util să se folosească transpusa matricei $[P_{jk}]$.

(c) Calculul unui sistem complet de transmitanțe hibride

În acest paragraf se consideră un caz limită, ce simplifică la maxim primul tablou T_0 de la care se începe calculul iterativ al funcțiilor de transfer dintr-un tablou final T.

În acest caz se consideră un circuit la care : 1) ramurile sînt caracterizate prin impedanțe proprii Z_{rr} impedanțe de transfer $Z_{rr'}$ ale unor surse de tensiune $E_r = Z_{rr'} I_{r'}$, comandate de curenții unor ramuri și de amplificări în tensiunea A_{rc} ale unor surse de tensiune comandate de tensiunile unor coarde $E_r = A_{rc} U_c$:

2) coardele sînt caracterizate prin admitanțe proprii Y_{cc}, admitanțe de transfer $Y_{cc'}$ ale unor surse de curent comandate de tensiunile unor coarde $J_c = Y_{cc'} U_{c'}$, și de amplificări în curent B_{cr} ale unor surse de curent comandate de curenții unor ramuri $J_c = B_{rr} I_r$.

Tabloul T_0 se alege corespunzător circuitului în care atît ramurile cît și coardele sînt înlocuite cu cîte o sursă independentă de tensiune respectiv curent. Ca urmare tabloul T_0 are forma

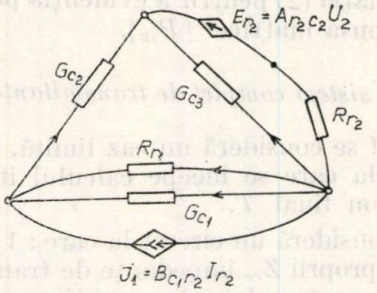
$$T_0 = \begin{array}{c|cc} & \dot{J}_{c_1} \cdots \dot{J}_{c_c} & E_{r_1} \cdots E_{r_r} \\ \hline U_{c_1} \\ \vdots \\ U_{c_c} & [0] & [C_{B_c r}] \\ I_{r_1} \\ \vdots \\ I_{r_r} & [C_{B_c r}]^T & [0] \end{array}$$

în care matricea $[C_{B_c r}]$ este matricea de incidență fundamentală a ramurilor r la buclele B_c ale coardelor c.

Fiecare reintroducere a unui parametru necesită o recalculare a unui tablou T_{jk}, parametrul tabloului T_{jk}. este de forma P_k pentru parametrii proprii Y, $-Z$ corespunzător unui element de pe diagonala principală și de forma P_{jk} pentru un parametru de transfer A_{jk}, B_{jk}, Z_{jh}, Y_{jh} corespunzător unui element nesituat pe diagonala principală.

Tabloul final T obținut după reintroducerea tuturor parametrilor conține transmitanțele hibride

$$T = \begin{array}{c|cc} & \dot{J}_{c_1} \cdots \dot{J}_{c_c} & E_{r_1} \cdots E_{r_r} \\ \hline U_{c_1} \\ \vdots \\ U_{c_c} & [Z] & [A] \\ I_{r_1} \\ \vdots \\ I_{r_r} & [B] & [Y] \end{array}$$



a

$T_0 =$

	$\dot{J}_{c_1}$	$\dot{J}_{c_2}$	$\dot{J}_{c_3}$	E_{r_1}	E_{r_2}
U_{c_1}				-1	
U_{c_2}				1	-1
U_{c_3}					-1
I_{r_1}	-1	1			
I_{r_2}		-1	-1		

$[P_{jk}]^T =$

	c_1	c_2	c_3	r_1	r_2
c_1	2				
c_2		2			1/4
c_3			2		
r_1				-1	
r_2	3				-1

$T_1(B_{c_1 r_2}) =$

	c_1	c_2	c_3	r_1	r_2
c_1				-1	
c_2				1	-1
c_3					-1
r_1	-1	4	3		
r_2		-1	-1		

$T_2(A_{r_2 c_2}) =$

	c_1	c_2	c_3	r_1	r_2
c_1				-1	
c_2				4/5	-4/5
c_3				-1/5	-4/5
r_1	-1	4	3		
r_2		-1	-1		

$T_7 =$

	c_1	c_2	c_3	r_1	r_2
c_1	-0,2	-0,267	-0,067	-0,2	-0,533
c_2	0,114	-0,343	-0,229	0,114	0,114
c_3	-0,086	-0,076	-0,162	-0,086	-0,419
r_1	-0,2	0,267	0,067	0,8	-0,533
r_2	-0,057	-0,162	-0,219	-0,057	-0,609

b

Fig. 5

Un exemplu de calcul al unui sistem complet de transmitanțe hibride este indicat în figura 5 unde pentru exemplificarea calculelor s-au luat valorile $R_{r_1} = R_{r_r} = 1\Omega$, $G_{c_1} = G_{c_2} = G_{c_3} = 2S$ și $B_{c_1 r_2} = 3$, $A_{r_r c_2} = \frac{1}{4}$.

Prin prima pivotare, pentru elementul $A_{r_2 c_3}$ corespunzător elementului $H^{(0)}_{c_3 r_2}$ se obține tabloul T_1. Efectuînd a doua pivotare pentru elementul $B_{c_1 r_2}$ corespunzător elementului $H^{(1)}_{r_2 c_1}$ rezultă tabloul T_2. În final se obține tabloul transmitanțelor căutate T.

4. Concluzii

Teorema generală de variație a funcțiilor hibride de transfer (1) este un instrument eficient și versatil de analiză, în special numerică, a circuitelor electrice complicate. Pe baza acestei teoreme se pot elabora eficiente metode numerice de analiză a circuitelor electrice în regim sinusoidal și a circuitelor rezistive. Astfel de probleme de analiză intervin în analiza regimurilor trazitorii prin metoda variabilelor de stare și analiza unor circuite neliniare. Aceste metode prezintă avantajul că nu necesită formarea unor sisteme de ecuații și nici rezolvarea acestora. Implementarea datelor numerice poate fi redusă, de exemplu, la indicarea elementelor matricei incidențelor esențiale (incidențele ramurilor la buclele coardelor) și la indicarea valorilor numerice ale parametrilor elementelor circuitului.

Calculul tablourilor dreptunghiulare poate fi redus în cazul circuitelor reciproce la calculul unor tablouri triunghiulare obținute prin eliminarea elementelor situate sub diagonala principală a tablourilor dreptunghiulare.

În cazul în care se urmărește calculul unei singure funcții de transfer tablourile succesive pot fi simplificate suprimînd la fiecare tablou linia și coloana corespunzătoare elementului (pivotului) H_{jk}.

Metodele de calcul ilustrate constituie elemente de bază ce deschid noi perspective în abordarea diacoptică a circuitelor cu număr foarte mare de elemente.

Anexa 1

Demonstrația teoremei generale de variație a funcțiilor operaționale hibride de transfer extern.

Funcțiile operaționale de transfer hibride $T_{\alpha\beta}$ la un circuit liniar cu parametri constanți în timp se definesc la condiții inițiale de zero :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{M^{(\beta)}_{o,\alpha}}{M_{i,\beta}} \tag{8}$$

cu : $T_{\alpha\beta}$ funcția operațională de transfer de la poarta β la poarta α ;

$M^{(\beta)}_{o,\alpha}$ imaginea operațională a mărimii de ieșire a porții α în cazul în care mărimile de intrare sînt nule la porțile diferite de poarta β ;

$M_{i,\beta}$ imaginea operațională a mărimii de intrare a porții β

Pe baza teoremei superpoziției, cu ajutorul acestor funcții operaționale de transfer, imaginea mărimii de ieșire, în cazul mai multor mărimi de intrare nenule, se exprimă

$$M_{o,\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n_i} T_{\alpha,\beta} M_{i,\beta} \tag{9}$$

cu n_i numărul mărimilor de intrare nenule.

În graful de fluență de tip Mason fiecare funcție operațională de transfer $H_{\alpha\beta}$ este transmitanța unei laturi orientată de la nodul $M_{i,\beta}$ la nodul $M_{o,\alpha}$.

În cele ce urmează interesează cazul cînd numai două mărimi de intrare $M_{i,\beta}$ și $M_{i,k}$ sînt nenule și se consideră două mărimi de ieșire $M_{o,\alpha}$ și $M_{o,j}$. Funcțiile operaționale de transfer extern se definesc referitor la mărimile externe $N_{i,\beta}$ și $N_{i,k}$ ale surselor conectate la porțile respective. Graful de fluență corespunzător este cel reprezentat în figura 6, a. Se remarcă relația :

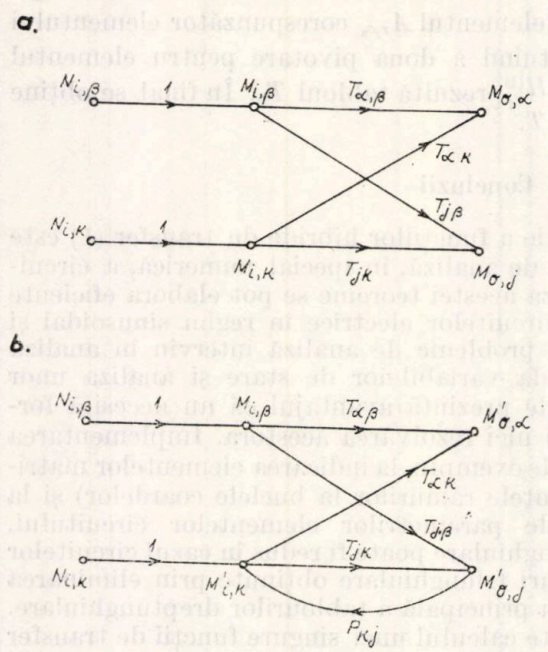


Fig. 6

$$M_{i,k} = N_{i,k} \tag{10}$$

Funcțiile de transfer extern definite prin relațiile (10) sînt egale cu transmitanțele respective ale circuitului $H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$

$$H_{\alpha\beta} \overset{d}{=} \frac{M^{(\beta)}_{o,\alpha}}{N_{i,\beta}}, \qquad H_{j\beta} \overset{d}{=} \frac{M^{(\beta)}_{o,j}}{N_{i,\beta}}$$

$$H_{\alpha k} \overset{d}{=} \frac{M^{(k)}_{o,\alpha}}{N_{i,k}}, \qquad H_{jk} \overset{d}{=} \frac{M^{(k)}_{o,j}}{N_{i,k}} \tag{11}$$

La completarea omogenă a circuitului la poarta k cu o sursă comandată de mărimea de ieșire a porții j, fig. 6, b, funcțiile de transfer extern (a) se modifică datorită modificării de la poarta k :

$$M'_{ik} = N_{i,k} + P_{kj} + M'_{oj} \tag{12}$$

Calculînd transmitanțele echivalente ale grafului din figura 6 b, rezultă :

$$H'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{T_{\alpha k} T_{j\beta}}{\dfrac{1}{P_{kj}} - H_{jk}} = H_{\alpha\beta} + \frac{H_{\alpha k} H_{s\beta}}{\dfrac{1}{P_{kj}} - H_{jk}} \tag{13}$$

$$H'_{jk} = \frac{T_{jk}}{1 - T_{jk} P_{kj}} = \frac{H_{jk}}{1 - H_{jk} P_{kj}} \tag{14}$$

$$H'_{\alpha k} = \frac{T_{\alpha k}}{1 - T_{jk} P_{kj}} = \frac{H_{\alpha k}}{1 - H_{jk} P_{kj}} \tag{15}$$

$$H'_{j\beta} = \frac{T_{j\beta}}{1 - T_{jk} P_{kj}} = \frac{H_{j\beta}}{1 - H_{jk} P_{kj}} \tag{16}$$

Dînd valori adecvate indicilor α și β din relația (13) rezultă relațiile (14), (15) și (16). Ca urmare relația (13) este relația generală din care se pot calcula funcțiile operaționale de transfer pentru valori ale indicilor.

BIBLIOGRAFIE

1. *Chua, L., Lin, P. M.*, Computer anideal analysis of electronic circuits, Prentice-Hall., Englewood Cilffs, New-Jersey, 1975.
2. *Chen, W. K.*, Applied Graph Theory, Amsterdam, North-Holland, 1971.

3 *Mason, S. J., Zimmermann, H. I.*, Electronic Circuits, Signals an Systems, New York, J. Wiley, 1960.
4 *Preda, M., Cristea, P., Dorobanțu, I.*, Analiza topologică a circuitelor electrice, București, Editura Tehnică, 1979.
5 *Happ, H. H.*, Diokoptiks and networks, New York, Academie Press, 1971.
6 *Brown, H.*, Solution of large networks by matrix methods., A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New-York.

A New Method for the Analyse of the Electrical Networks, Based on the Iterative Computation of the Hybrid Transfer Functions

The present paper proposes a new method for the analyse of the electrical circuits. This method is based on a variation theorem of any network function, for the case when a controlled source is introduced in the network.

The method consist in the successive computation of the tables of the hybrid network functions.

C.Z.: 621.3.013

INFLUENȚA NEUNIFORMITĂȚII ÎNTREFIERULUI ASUPRA DETERMINĂRII INDUCȚIEI MAGNETICE REZULTANTE LA UN CUPLAJ CU CURENȚI TURBIONARI, ÎN CONSTRUCȚIA CU POLI APARENȚI (Partea II)

GABRIELA SPINEANU *

Lucrarea își propune și realizează determinarea constantelor complexe de integrare $\underline{C}_n$ ce intervin în soluția inducției magnetice rezultante din indusul unui cuplaj cu curenți turbionari, ținînd seama de întrefierul neuniform.

Se stabilește expresia densității pînzei curenților turbionari de la suprafața indusului precum și modul în care ordinul armonicii influențează asupra valorii acesteia.

1. Determinarea coeficienților de reacție longitudinală și transversală

În prima parte a lucrării [2] s-au pus în evidență coeficienții de reacție longitudinală și transversală k_d și k_t ce intervin în expresia armonicilor inducției magnetice rezultante în indus datorate curenților turbionari.

Se consideră aceștia ca fiind coeficienți Fourier pentru

$$\Lambda'(x')\cos \pi n x' \quad \text{și} \quad \Lambda'(x')\sin \pi n x' :$$

$$K_{dn}\int_0^{0,5} \cos^2 \pi n x'\, dx' = \int_0^{0,5} \Lambda'(x') \cos^2 \pi n x'\, dx' \tag{1}$$

$$K_{tn}\int_0^{0,5} \sin^2 \pi n x'\, \mathrm{d}x' = \int_0^{0,5} \Lambda'(x') \sin^2 \pi n x'\, \mathrm{d}x' \tag{2}$$

Pentru întrefierul cazului tratat, expresiile permeanței fiind determinate în [2], rezultă prin integrarea expresiilor (1) și (2):

$$K_{dn} = g_1 + \frac{\sin \pi n g_1}{\pi n} \tag{3}$$

$$K_{tn} = g_1 - \frac{\sin \pi n g_1}{\pi n} \tag{4}$$

Manuscris primit la data de 24 octombrie 1981

* Asist. ing., Catedra Electrotehnică

2. Determinarea constantelor de integrare

Ne propunem să determinăm constantele complexe de integrare $\underline{C}_n$ date de relația (13) din [2] prin aplicarea principiului superpoziției, deoarece se poate imagina cîmpul rezultant în indus, ca o superpoziție a cîmpului de excitație, notat cu indicele „0" și a cîmpului datorat curenților turbionari.

$$\left.\begin{aligned} \underline{B}_{xn} &= \underline{B}_{0xn} + B_{txn} \\ \underline{B}_{zn} &= \underline{B}_{0zn} + \underline{B}_{tzn} \end{aligned}\right\} g_3 \geqslant z' \geqslant 0 \tag{5}$$

unde $\underline{B}_{zn}$ și $\underline{B}_{xn}$ sînt date de relațiile (21) și (27) din [2].

Inducția magnetică de excitație la suprafața indusului fiind determinată în [1], imaginile în complex ale armonicilor de ordinul „n" ale componentelor acesteia sînt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{B}_{0xn} &= jB_0C_{0n}\frac{\operatorname{ch}\pi n(g_3 - z')}{\operatorname{sh}\pi n g_3} \\ \underline{B}_{0zn} &= B_0C_{0n}\frac{\operatorname{sh}\pi n(g_3 - z')}{\operatorname{sh}\pi n g_3} \end{aligned}\right\} g_3 \geqslant z' \geqslant 0 \tag{6}$$

În întrefierul cuplajului cu curenți turbionari, imaginile în complex ale armonicilor de ordinul „n" ale componentelor inducției magnetice datorată curenților turbionari în aproximația întrefierului uniform, sînt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{B}_{t\delta xn} &= -j\underline{K}_n\frac{\operatorname{sh}\pi n(g_2 + z')}{\operatorname{sh}\pi n g_2} \\ \underline{B}_{t\delta zn} &= \underline{K}_n\frac{\operatorname{ch}\pi n(g_2 + z')}{\operatorname{sh}\pi n g_2} \end{aligned}\right\} -g_2 \leqslant z' \leqslant 0 \tag{7}$$

unde: $g_2 = \dfrac{\delta}{\tau}$

$\underline{K}_n$ se determină, ținînd cont de conservarea componentelor tangențiale ale intensității cîmpului magnetic H_{tx} la $z = 0$

$$\frac{\underline{B}_{t\delta xn}}{\mu_0} = \frac{\underline{B}_{txn}}{\mu_e} \tag{8}$$

$$\underline{K}_n = -\frac{1}{\mu_{re}}(\underline{C}_n\gamma'_n \operatorname{cth}\pi n\gamma'_n g_3 - B_0C_{0n}\operatorname{cth}\pi n g_3) \tag{9}$$

Întrefierul real fiind neuniform, vom introduce coeficienții de reacție longitudinală și transversală K_{dn} și K_{tn} determinați anterior.

Aceştia se aplică fiecărei armonici $\underline{B}_{t\delta zn}$ în sensul atenuării componentei transversale a cîmpului de inducţie în raport cu componenta longitudinală.

$$\underline{B}^*_{t\delta zn} = K_{dn} B_{t\delta znr} + jK_{tn} B_{t\delta zni} \tag{10}$$

unde : $B_{t\delta znr}$ şi $B_{t\delta zni}$ sînt părţile reale şi imaginare ale componentei complexe $\underline{B}_{t\delta zn}$ iar $\underline{B}^*_{t\delta zn}$ reprezintă imaginile în complex ale armonicilor de ordinul „n" ale componentelor inducţiei magnetice datorată curenţilor turbionari pentru întrefierul real, neuniform.

Ne propunem să determinăm pe $B_{t\delta znr}$ şi $B_{t\delta zni}$.

Utilizînd relaţiile (7) şi (9), obţinem :

$$\underline{B}_{t\delta zn} = A_n(B_0 C_{0n} - \underline{C}_n \gamma^{*\prime}_n) \tag{11}$$

în care

$$A_n = \frac{1}{\mu_{rC}} \operatorname{cth} \pi n g_2 \operatorname{cth} \pi n g_3 \tag{12}$$

$$\gamma'^*_n = q^*_n + j\xi^*_n = \gamma'_n \frac{\operatorname{th} \pi n g_3}{\operatorname{th} \pi n \gamma n g_3} \tag{13}$$

Efectuînd calculele, se obţine :

$$q^*_n = \frac{q_{1n} \operatorname{sh} 2\pi n q_n g_3 + \xi_n \sin 2\pi n \xi_n g_3}{\operatorname{ch} 2\pi n q_n g_3 - \cos 2\pi n \xi_n g_3} \operatorname{th} \pi n g_3 \tag{14}$$

$$\xi^*_n = \frac{\xi_n \operatorname{sh} 2\pi n q_n g_3 + q_n \sin 2\pi n \xi_n g_3}{\operatorname{ch} 2\pi n q_n g_3 - \cos 2\pi n \xi_n g_3} \operatorname{th} \pi n g_3 \tag{15}$$

Din relaţia (11) separăm părţile reale şi imaginare :

$$B_{t\delta znr} = A_n(B_0 C_{0n} + \xi^*_n(C_{ni} - q^*_n C_{nr}) \tag{16}$$

$$B_{t\delta zni} = -A_n(C_{nr}\xi^*_n + C_{ni} q^*_n), \tag{17}$$

unde :

$$\underline{C}_n = C_{nr} + jC_{ni} \tag{18}$$

La suprafaţa de separaţie dintre întrefier şi indus ($z = 0$), punînd condiţia de continuitate, se găseşte :

$$\underline{C}_n = \underline{B}^*_{t\delta zn} + \underline{B}_{0zn} \tag{19}$$

Relațiile (10), (16) și (17) conduc prin urmare la expresiile :

$$\left.\begin{aligned} C_{nr} &= K_{dn}A_n(B_0C_{0n} + \xi_n^*C_{ni} - q_n^*C_{nr}) \\ C_{ni} &= -K_{tn}A_n(q_n^*C_{ni} + \xi_n^*C_{nr}) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Sistemul de ecuații (20) fiind linear în C_{nr} și C_{ni}, soluțiile acestuia sînt :

$$C_{nr} = B_0C_{0n}\frac{(1 + A_nK_{dn})(1 + A_nq_n^*K_{tn})}{(1 + A_nq_n^*K_{tn})(1+A_nq_n^*K_{dn}),+ A_n^2\xi_n^{*2}K_{dn}K_{tn}} \tag{21}$$

$$C_{ni} = -B_0C_{0n}\frac{A_n\xi_n^*K_{tn}(1 + A_nK_{dn})}{(1 + A_nq_n^*K_{tn})(1 +A_nq_n^*K_{dn})+ A_n^2\xi_n^{*2}K_{dn}K_{tn}} \tag{22}$$

Ele permit determinarea constantelor complexe de integrare $\underline{C}_n$:

$$C_n = \sqrt{C_{nr}^2 + C_{ni}^2}; \qquad \varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{C_{ni}}{C_{nr}} \tag{23}$$

3. Calculul densității pînzei curenților turbionari

Densitatea pînzei curenților turbionari, notată în lucrarea [2] cu $I_s(x')$ se determină cu ajutorul relației :

$$I_s(x') = \int_0^{g_3} J'(x',z')\mathrm{d}z' \tag{24}$$

Folosind expresia valorii raportate a densității curenților turbionari dată de relația (31) din [2] , se poate deduce :

$$I_s(x') = \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1,3,..} \frac{\pi\lambda_V}{\mu_0}\cdot\frac{\underline{C}_n}{\pi n\gamma_n'}\operatorname{th}\frac{\pi n\gamma_n' g_3}{2}\right\} \tag{25}$$

$$I_s(x') = \sum_{n=1,3,...} \frac{\lambda_V C_n}{\pi\mu_0|\gamma_n'|}Z_{0n}\cos(\pi nx' + \varphi_n + \psi_n - \Theta_{0n}), \tag{26}$$

cu :

$$\operatorname{tg}\theta_{0n} = \frac{\sin\pi n\xi_n g_3}{\operatorname{sh}\pi nq_n g_3}; \qquad Z_{0n} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\pi nq_n g_3 - \cos\pi n\xi_n g_3}{\operatorname{ch}\pi nq_n g_3 + \cos\pi n\xi_n g_3}}$$

notațiile fiind cele utilizate în lucrarea [2]

S-a notat cu λ_v, variabila dinamică a cărei expresie este :

$$\lambda_v = \frac{\mu_0 v\tau}{\pi\rho} \tag{27}$$

4. Concluzii

Constantele complexe de integrare C_n fiind deduse, soluția cîmpului stabilită sub forma componentelor inducției magnetice din indusul cuplajului cu curenți turbionari, este complet determinată.

Se poate observa că în regim static, cînd $v \to 0$, $q_n \to 1$, $\xi_n \to 0$, $C_{nr} \to B_0 C_{0n}$, $C_{ni} \to 0$.

Se observă, de asemenea, că armonicele densității pînzei curenților turbionari scad cu ordinul „n", de o manieră mai accentauată decît ale lui B_z.

Astfel, dacă $q_n g_3 \gg 1$,

$$I_{sn} = \frac{\lambda_v C_n}{n\mu_0 \sqrt{q_n^2 + \xi_n^2}} Z_{0n} \simeq \frac{\lambda_v C_n}{n\mu_0 \lambda_n'} = C_n \sqrt{\frac{\lambda_v}{n\mu_0 \mu_{cr}}}, \tag{28}$$

cu $\lambda_n' \gg 1$,

λ_v fiind dat de relația (27) iar :

$$\lambda_n'^2 = \frac{\mu_{rc}}{n} \lambda_v \tag{29}$$

BIBLIOGRAFIE

1 *Spineanu Gabriela*, Buletinul Institutului Politehnic București (seria Electrotehnică), tomul 43, nr. 2, — 1981.

2 *Spineanu Gabriela*, Buletinul Institutului Politehnic București, (seria Electrotehnică), tomul 44, nr. 1, — 1982.

The Influence over Air-gap Nonuniformity Concerning the Determination of Magnetical Resultant Induction on an Eddy—Currents Coupling, Made in Apparent Poles. (Part II).

This paper proposes and realises the determination of the complex constants of integration C_n who intervene in the solution of the magnetic induction resulting in the armature of an eddy-currents coupling, talking into account the uneveness of the air-gap.

The eddy-currents density from the armature is calculated and the mode how the order of the harmonic influence her value is determined.

C.Z.: 621.396

DIAGRAMA FRECVENȚEI DE REZONANȚĂ A REZONATORULUI DIELECTRIC PLACA

G. RULEA *

Se folosesc relațiile pentru determinarea lungimii unui rezonator dielectric de tip placă, terminat cu plane perfect conductoare, normale pe direcția de propagare, spre a se trasa diagrama în funcție de parametrul de mod sau diagrame directe. Se arată dezavantajele acestora. Se determină apoi diagrama triunghiulară $\frac{l}{n\lambda_p} = f\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_p}\right)$ cu parametru constanta dielectrică. Se arată caracteristicile și avantajele acesteia.

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] a fost prezentat modelul rezonatorului dielectric placă, limitat pe direcția de propagare de două suprafețe plane, nelimitate, normale la axul rezonatorului, ax care coincide cu direcția de propagare, axa z. Suprafețele sînt metalice ideale, adică componenta electrică a cîmpului electromagnetic, tangențială la suprafața metalică perfect conductoare este nulă. Prin utilizarea metodei reflexiilor se determină distribuția componentelor cîmpului electromagnetic în interiorul dielectricului și în exterior; apoi se stabilesc relațiile ce dau frecvența de rezonanță funcție de lungimea rezonatorului, sau reciproc, pentru unda E, cazul modului impar, fundamental. Întrucît relațiile obținute sînt implicite, rezolvarea problemei se obține grafic. Prezentarea diagramelor ce permit determinarea frecvenței de rezonanță, pentru o lungime dată a rezonatorului și pentru un ordin dat al modului de oscilație (0, 1 —2, n) formează obiectul prezentei lucrări.

2. Diagrama de rezonanță cu parametrul de mod

Din condițiile la limită și condiția de rezonanță se obțin relațiile [1]

$$\left(\frac{n\lambda_p}{2l}\right) = q\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\operatorname{ctg}^2 q\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \tag{1}$$

Manuscris primit la data de 14 ianuarie 1982
* Prof. dr. ing. Catedra Radiocomunicații.

$$\left(\frac{2f}{c_0}\frac{\lambda_p}{2}\right) = q\left(1+\frac{1}{\varepsilon_r^2}\operatorname{ctg}^2 q\,\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \tag{2}$$

unde q este parametrul de mod pentru unda E_1 (q variază între 1 și 2 cînd frecvența f variază între frecvența prag f_p și o frecvență infinit de mare), ε_r constanta dielectrică, λ_p lungimea de undă prag, $\lambda_p = 2a\sqrt{\varepsilon_r - 1}$, unde

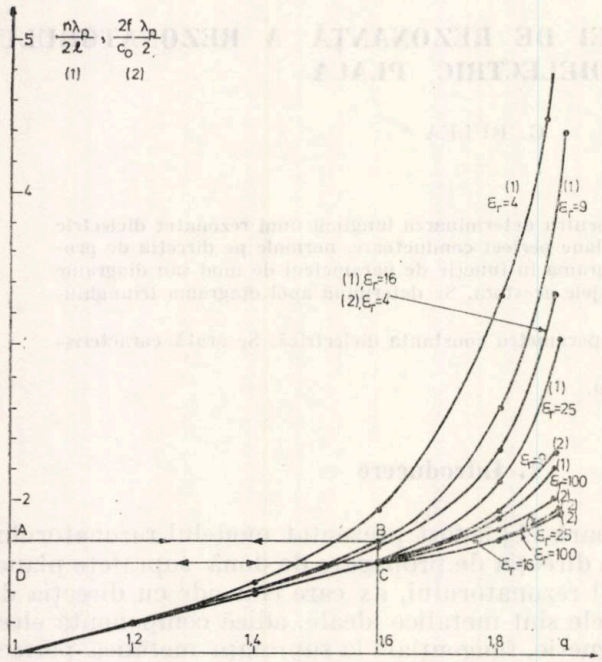


Fig. 1. Diagrama de rezonanță cu parametru de mod

a este grosimea plăcii de dielectric, n un număr întreg $n = 1, 2, 3, \ldots, l$ lungimea rezonatorului dielectric placă terminat pe două suprafețe metalice ideale, normale pe axul longitudinal al plăcii, ce coincide cu direcția de propagare.

Ecuațiile (1) și (2) sînt implicite și se rezolvă grafic.

În fig. 1 se prezintă diagrama de rezonanță calculată cu ajutorul parametrului de mod. Curbele corespunzătoare relațiilor (1) și (2) s-au notat cu (1), respectiv cu (2) și s-au considerat avînd drept parametru constanta dielectrică ε_r. Întrucît parametrul de mod variază între 1 și 2 s-au considerat valorile corespunzătoare. Dacă se dă lungimea rezonatorului, punctul A pe diagramă spre exemplu, se găsește punctul B pe curba (1), de ε_r dat și rezultă q. Pentru acesta se găsește punctul C pe curba (2) (de același ε_r dat) și apoi în punctul D se determină frecvența de rezonanță.

Diagrama are două neajunsuri: nu prezintă bine frecvențele mari și este incompletă. Pentru a extinde domeniul de lucru se prezintă în fig. 2 diagrama cu scară dilatată, în gama $q = 1{,}9 - 2$.

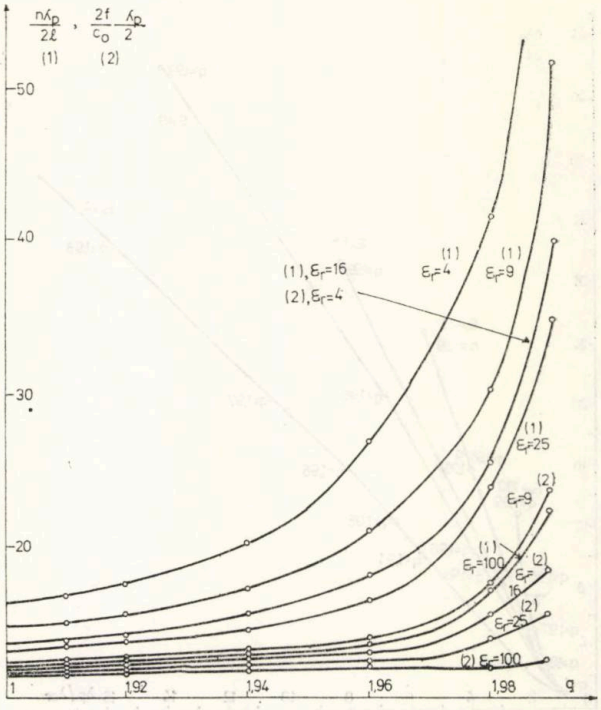


Fig. 2. Diagrama cu scară dilatată

După cum se constată și aici domeniul nu este complet acoperit. Totodată prezența parametrului q nu este totdeauna necesară. De aceea păstrînd variabilele de lucru frecvența f normată și inversul lungimii rezonatorului s-a trasat o diagramă $\frac{n\lambda_p}{2l} = F\left(\frac{f_{0r}}{f_p} = \frac{\lambda_p}{\lambda_{0r}}\right)$, denumită diagrama directă.

3. Diagrama directă

În fig. 3 se prezintă diagrama directă, (parametrul q apare numai în puncte ale curbei) avînd drept parametru constanta dielectrică ε_r.

Diagrama nu este închisă (completă) și deci regiunile extreme (frecvențe foarte mari, lungimi de rezonator mici) nu sînt reprezentate. Diagrama are avantajul citirii directe.

4. Dreptele limită. Diagrama triunghiulară

Dacă se notează

$$\frac{l}{n\lambda_p} = y \tag{3}$$

și

$$\frac{\lambda_0}{2\lambda_p} = x \tag{4}$$

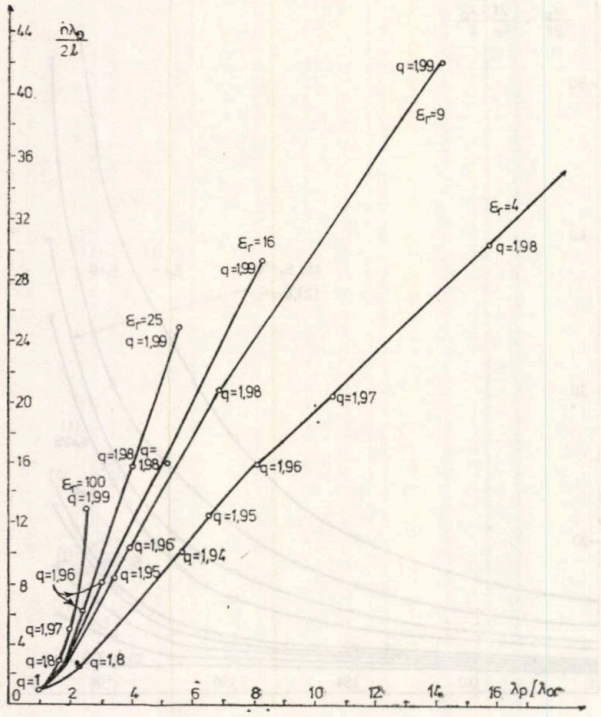


Fig. 3. Diagrama directă.

și se utilizează ecuațiile caracteristice și condiția de rezonanță, rezultă

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2x}\cos\theta\right)=-\frac{1}{\varepsilon_r}\operatorname{ctg}\theta \tag{5}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{y}\sqrt{\frac{\varepsilon_r y^2-x^2}{\varepsilon_r-1}} \tag{6}$$

sau eliminînd $\cos\theta$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2xy}\sqrt{\frac{\varepsilon_r y^2-x^2}{\varepsilon_r-1}}\right)=\frac{1}{\varepsilon_r}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{1}{y}\sqrt{\frac{\varepsilon_r y^2-x^2}{\varepsilon_r-1}}\right) \tag{7}$$

Dacă $x=y$, adică $l=\lambda_0/2$, rezultă cea mai mare lungime posibilă a rezonatorului la frecvența prag; aceasta reprezintă bisectoarea planului x, y și deci diagrama este triunghiulară, întrucît în domeniul superior bisectoarei nu există soluții. Pentru orice ε_r curba $y=f(x)$ pentru valoarea $x=0{,}5$ are valoarea $y=0{,}5$.

Ecuația (7) devine

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{\varepsilon_r}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$$

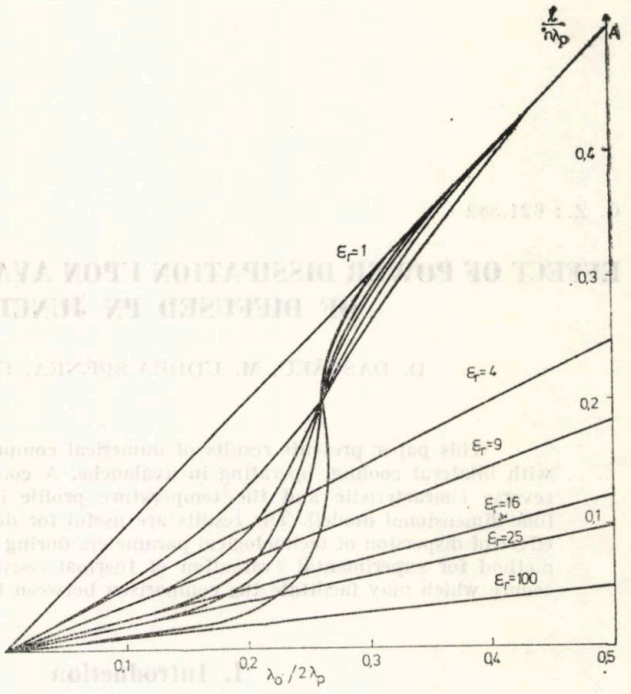


Fig. 4. Diagrama triunghiulară

și deci $x = y = 0{,}5$ independent de valoarea constantei ε_r. Pe de altă parte cea mai mică valoare pentru λ_0 și l este zero, astfel încît la frecvențe foarte mari curba ajunge în origine, dar tinzînd către valori egale cu jumătatea lungimii de undă în dielectric, astfel încît curba $y = f(x)$ la valori mari ale frecvenței este tangentă la dreptele de pantă $1/\sqrt{\varepsilon_r}$, dreptele limită. Domeniul de existență pentru ε_r dat este între bisectoare și dreapta limită.

Reprezentarea curbelor este similară curbei în S; de altfel și ecuația (7) este o ecuație a tangentelor cu argument modificat. Curbele au puncte de inflexiune destul de apropiate în jurul valorilor $x = 0,\ 2,\ y = 0{,}255$.

Diagrama este completă. Curbele au fost reprezentate în fig. 4, avînd ca parametru constanta dielectrică ε_r.

BIBLIOGRAFIE

1. *Rulea G.*, Bul. Inst. Politeh., București, seria Electrotehnică, nr. 4, 1981.

Frequency Resonance Diagram of a Dielectric Plate Resonator

The paper presents a set of diagrams for the frequency resonance of a dielectric plate resonator.

The triangular diagram is represented in the coordinates $l/n\lambda_p$, $\lambda_0/2\,\lambda_p$.

C. Z.: 621.382

EFFECT OF POWER DISSIPATION UPON AVALANCHE BREAKDOWN OF DIFFUSED PN JUNCTIONS

D. DASCĂLU, M. UDREA-SPENEA, E. POPA*

This paper presents results of numerical computations for power devices with bilateral cooling, operating in avalanche. A computer program yields the reverse characteristic and the temperature profile inside the semiconductor (one-dimensional model). The results are useful for device design, including the effect of dispersion of technological parameters during fabrication process. A new method for experimental evaluation of thermal resistance is presented, a procedure which may facilitate the comparison between theory and experiment.

1. Introduction

The breakdown phenomena in pn junctions were intensively studied. The breakdown voltage of plane, cylindrical or spherical pn junctions may be found in a number of textbooks [1]. The planar junctions as well as multijunction mesa devices were intensively studied by computer techniques [2]—[4]. The reader should be aware of the fact that experimental breadkown voltages are still influenced by parameters such as semiconductor deffects and surface conditions which are difficult to control and almost impossible to introduce in the theoretical model.

Recent interest in breakdown [5]—[7] is determined by devices operating in avalanche, i.e. IMPATT diodes [8]—[9] or reference diodes [10]. Here it is essential to compute the effect of power dissipation, since the ionization rates of avalanche mutiplication are temperature-sensitive. A computer model is presented in this paper.

2. Theoretical computations

The basic assumptions are:
— one-dimensional model (plane junctions, mesa devices)
— negligible generation-recombination current.

Manuscript received November 6, 1981.

* Associate Prof., Electronics Dept.; Eng.; Eng., I.P.R.S.-Băneasa

The breakdown voltage was first computed by assuming *uniform temperature* within the device. The corresponding model is described with reference to Fig. 1. The basic equations are

$$j(x) = en(x)\,\mu_n(E)\cdot E(x) \tag{1}$$

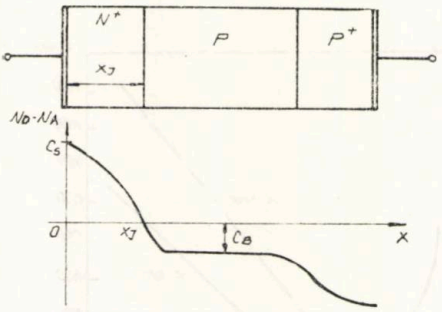


Fig. 1. One-dimensional model of the semiconductor diode : doping profile.

$$j_p(x) = ep(x)\,\mu_p(E)\cdot E(x) \tag{2}$$

$$\frac{dj_p}{dx} = \alpha_p(E, T)\,j_p(x) + \alpha_n(E, T)\,j_n(x) \tag{3}$$

$$j = j_n(x) + j_p(x) \tag{4}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e}{\varepsilon}\,[p(x) - n(x) + C(x)] \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &j_p(x_1) = j_{p_1}, && E(x_1) = E_1 \\ &j_{p_1} < 0.001\ j, && E_1 \leqslant 1\ \text{kV/cm} \\ &j_p(x_2) = j - j_{p_2}, && E(x_2) < E_1 \\ &j_{p_2} < 0.001\ j \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$C(x) = C_S \exp\left(\frac{-x^2 \ln (C_S/C_B)}{x_J^2}\right) - C_B \tag{7}$$

In the above equations j_n, j_p are the electron and hole current densities; μ_n, μ_p — electron and hole mobilities; n, p — electron and hole densities; E — the electric field; C, C_B and C_S — total impurity concentration, bulk concentration (acceptors), surface concentration (donors).

The field and temperature-dependence of ionization rates α_p and α_n for the range of electric field intensities encountered in our study were reported by Grant [11] and are used in computer calculations.

The limits of the space-charge region x_1 and x_2 are defined somewhat arbitrarily, through the intensity of the electric field. The electric field E_1 may be considered negligible small when compared with the maximum electric field at breakdown (a few hundreds of kV/cm).

The system (1)—(7) is solved iteratively, as follows. One assumes a value for $x_1 < x_J$ as a first guess. By assuming (6)valid the differential equations (written by using finite differences) are solved in the following order. Equation (1) yields $j_{n(i+1)}$ as a function of E_i and $j_{n(i)}$. Equation (3) yields $j_{p(n+1)}$ by using $j_{p(i)}$ and E_i. Then p_{i+1}, n_{i+1}, E_i are found from equation (2). By using P_{i+1}, n_{i+1}, E_i in equation (5) one finds E_{i+1}, etc. As soon as E falls below E_1, $|j - j_p| \leqslant j_{p2}$ should be verified. If it is not, then another

x_1 will be chosen. If $j_p - j \leqslant j_{p2}$ when $E \leqslant E_1$ then x_1 will be reduced. If $j - j_p > j_{p2}$ when $E \leqslant E_1$ then x_1 will be enhanced.

It was found that the particular conditions specified in (6) are not essential for the final result of the numerical coputations.

The above program was used to compute the breakdown voltage V_B, of diodes 1N 3044B...1N3017B and PL7V5Z...PL36Z manufactured

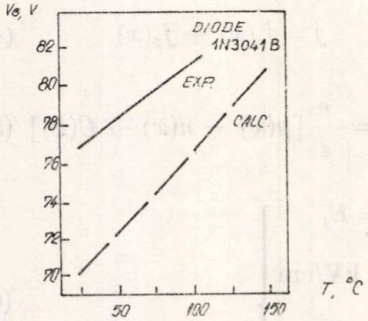


Fig. 2. Temperature dependence of the breakdown voltage V_B(experimental and calculated)

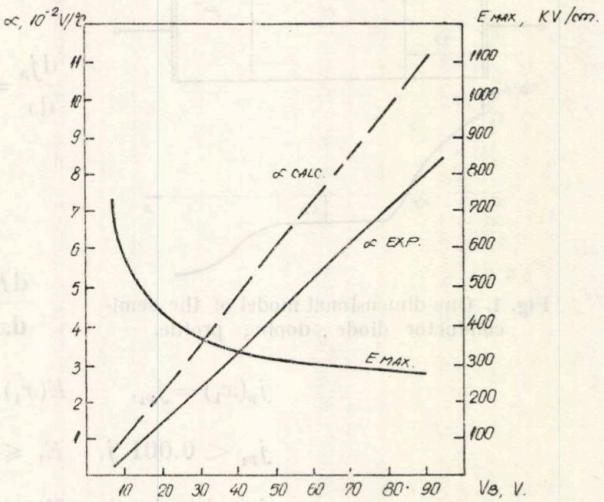


Fig. 3. Maximum electric field intensity at breakdown (calculated) and temperature coefficient $\alpha = dV_B/dT$ (calculated and experimental) *versus* breakdown voltage, V_B.

by IPRS-Băneasa. Fig. 2 shows the temperature dependence of V_B measured and computed for 1N3041B. The input data for the computing program were $C_S = 1 \cdot 1 \times 10^{21}$ cm^{-3}; $C_B = 3 \times 10^{16}$ cm^{-3}, $x_J = 50\mu$m.

Fig. 3 shows the computed maximum field at breakdown, E_{MAX}, and temperature coefficient of V_B, $\alpha = dV_B/dT$, as a function of breakdown voltage, V_B. The experimental α is also shown.

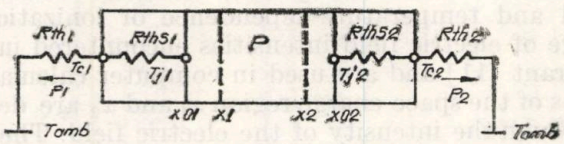


Fig. 4. Thermal model (steady-state) of a one-dimensional device with bilateral cooling.

The effect of *temperature distribution* within the diode due to power dissipation was then taken into account. The model is indicated in Fig.4. The central region is described by the following equations :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) = - q_v(x) \qquad (8)$$

$$q_v(x) = j\,E\,(x) \tag{9}$$

$$T(x_{01}) = T_{j_1} \tag{10}$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x_{01}} = \frac{T_{j_1} - T_{c_1}}{x_{01}} \tag{11}$$

$$T_{j_1} = T_{amb} + (R_{th_1} + R_{ths_1})\,P_1 \tag{12}$$

$$T_{j_1} = T_{amb} + (R_{th_2} + R_{ths_2})\,P_2 \tag{13}$$

$$P = P_1 + P_2 \tag{14}$$

where $T = T\,(x)$ is the local temperature , T_{amb} — temperature of the ambient, λ — thermal conductivity of silicon, q_v — bulk density of power dissipation, P — power dissipation, R_{th} — thermal resistance (Fig. 4).

The "thermal" equations (8)—(14) should be solved alternatively with the "electrical" ones (1)(—(7) as follows. First, the temperature is assumed uniform and the "electrical" problem is solved. Then, with $j(x)$ and $E(x)$ found as above the thermal problem is solved and $T = T\,(x)$ in the region between x_0 and x_{02} (Fig. 4) is found. This temperature dependence is used in the "electrical" problem, a.s.o. This iterative procedure continues until the differences between succesive solutions are sufficiently low.

Note the fact that the model considers a flow of dissipated power through *both* contacts (a resonable model for *power* devices). This fact introduces a complication in the computer program because we do not know *a priori* the distribution of the total dissipated power between the contacts. Therefore, we shall assume a certain value for P_1, find T_{c1} and T_{j1}, integrate equation (8) and verify the value of T_{j2} found in this way by using equations (13) and (14). An interation procedure will be followed until this verification is indeed achieved.

Certain results are indicated in Table 1.

Table 1

j A/cm^2	R_{th1} (°C/W)	R_{th2} (°C/W)	λ W/°C m	T_{max} (°C)	V_R (V)	P_1 (W/cm^2)	P_2 (W/cm^2)
2	30	30	$\lambda_0 = 0.015$	377.4	98.78	99	98
2	15	15	λ_0	377	94.14	95	94
4	5	15	λ_0	377.5	94.14	281	95
4	5	15	$\lambda_0\left(\frac{273}{T}\right)^2$	377.5	94.14	281	95

3. A method for experimental determination of the junction to case thermal resistance

The usual methods for determination of junction-to-case thermal resistance, $R_{th,\,j-c}$, is based upon the estimation of junction temperature at a given operating current by using the temperature dependence of

breakdown voltage (i.e. the value of $\alpha = dV_B/dT$ determined at low operating current, with the diode at a known temperature, in a thermostat). A precise determination requires also the high-frequency diode resistance or the differential (space-charge) resistance of the "isothermal" characteristic measured by using short current pulses [12], [13].

An alternative is described below. This procedure is again based upon the concept of a uniform semiconductor temperature and an overall thermal-resistance of the device, proved by detailed calculations of previous section. Let assume that the diode operates at I_1 and V_1 in an oven with the controlled temperature, T_{a1}. We have:

$$T_{j1} - T_{a1} = R_{thj-c} V_1 I_1 \tag{15}$$

Let us decrease T_a to $T_{a2} < T_{a1}$. The voltage will also decrease. By neglecting the effect of the very small dynamic resistance, we shall have the same junction temperature if the current is raised to I_2 in order to increase the power dissipation and determine $V_2 = V_1$ ($T_{j2} = T_{j1}$), i.e.

$$T_{j2} - T_{a2} = R_{th,\,j-c} V_2 I_2 \tag{16}$$

$$R_{tk,\,j-c} = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{V_1 (I_1 - I_2)}. \tag{17}$$

If the dynamic *high-frequency* diode resistance, r_D. is taken into account then V_2 will be given by:

$$V_2 = V_1 + r_D(I_2 - I_1) \tag{18}$$

and equation (20) will be replaced by

$$R_{th,\,j-c} = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{V_1 (I_2 - I_1) + r_D I_2 (I_2 - I_1)} \tag{19}$$

In practice, with T_a decreased to the new value $T_{a2} < T_{a1}$, I should be increased until $\Delta V = V_2 - V_1$ equals $r_D \Delta I = r_D(I - I_1) = r_D(I_2 - I_1)$.

The advantage of this method consists in the fact that it is not longer necessary to determine $\alpha = dV_B/dT$, which may be temperature-dependent and even current-dependent [14]. The thermal resistance, which may be also temperature-dependent (the thermal conductivity of silicon is a strong function of temperature) may be th s determined more precisely, closer to the operating conditions. However, since the controlled tempenature of the oven is usually above the room temperature, care should be taken in order to maintain the semiconductor at a temperature which does not exceed the maximum junction temperature.

An automatization of this method may be also imagined. For example, the device under test is transported through two recipients chara-

terized by different temperatures. In the first one, at T_{a1}, V_1 is measured for a given I_1. In the second one, the bias current is changed automatically until the voltage reaches V_1, etc.

4. Design of breakdown voltage

The breakdown voltage computed in section 2 is sensitive to changes in impurity profile. For the design of practical devices it is important to know how much will affect the breakdown voltage changes in technological parameters, such as junction depth.

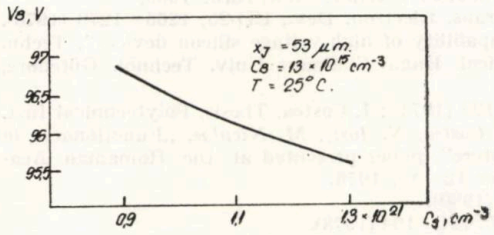


Fig. 5. Breakdown voltage *versus* surface concentration (calculated).

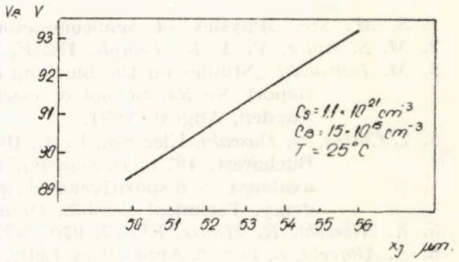


Fig. 6. Breakdown voltage *versus* junction depth x (calculated).

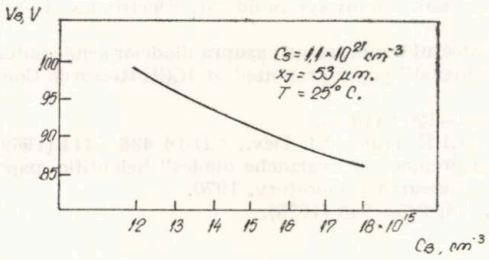


Fig. 7. Breakdown voltage *versus* bulk doping, C_B (calculated)

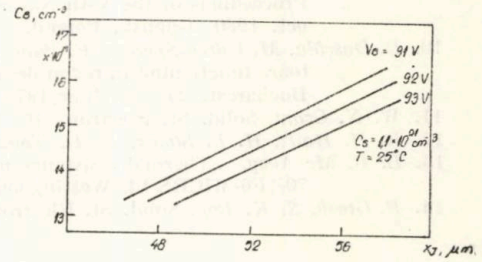


Fig. 8. V_B = const. curves in the $C_B - x_J$ plane (calculated)

Fig. 5—8 represent results of such calculations. Fig. 5 shows the effect of surface concentration at a given bulk doping and junction depth. Fig. 6 indicates the increase in V_B with junction depth. Fig. 7 shows th e decrease of V_B with increasing bulk doping at a given surface concentration and junction depth.

Fig. 8 shows V_B = const. curves in a $C_B - x_J$ plane (given surface concentration). Such families of constant voltage curves should be useful for corrections during the technological process. For example, in order to obtain reference diodes with a precise breakdown voltage, the diffusion time (and therefore x_J) should be ajdusted in order to compensate for variation in semiconductor resistivity).

5. Conclusions

The computer program reported in this paper is useful for investigation of the termal problem in power devices with bilateral cooling. This program was utilized in the design of new devices as well as in evaluation of the effect of technological dispersion upon the value of electrical parameters. The computer time is about 60 sec. (Felix 256) and precision — 0.2%.

REFERENCES

1. *S. M. Sze*, „Physics of semiconductor devices", Wiley, New-York, 1969.
2. *M. S. Adler, V. A. K. Temple*, IEEE, Trans. Electron. Dev., ED-25, 1266—1270 (1978).
3. *M. Bakowski* „Studies on the blocking capability of high-voltage silicon devices", Techn. Report No 52, School of electrical Eng., Chalmers Univ. Technol. Göteborg, Sweden, August, 1974.
4. *I. Costea, D. Dascălu*, Electron. Lett., 10, 129 (1974); I. Costea, Thesis, Polytechnical Inst. Bucharest, 1975; *D. Dascălu, I. Costea, N. Iosif, M. Niculae*, „Funcționarea în avalanșă a dispozitivelor de putere", paper presented at the Romanian Academy, Technical Session, October 12—13, 1976.
5. *A. Albrecht, R. Müller*, ED-27, 970—977 (1980).
6. *A. Albrecht, L. Lerach*, Appl. Phys. Lett., 16, 191—194 (1978).
7. *V. Anantharam, K. N. Bhat*, IEEE Trans. El. Dev., ED-27, 939—945 (1980).
8. *D. Dascălu, N. Marin, I. Costea, T. Tebeanu* „Realizarea în țară a diodelor IMPATT pentru microunde și utilizarea lor în aparatura de navigație", paper published in research reports vol. I 31—36, Inst. de Marină Mircea cel Bătrîn, Constanța.
9. *N. Marin, D. Dascălu* „Low-cost fabrication and testing of power silicon IMPATT diodes", Proceedings of the V-th National Conf. Microwave Solid. St. Electronics, 27—30 oct. 1980, Gdansk, Poland.
10. *D. Dascălu, M, Udrea-Spenea, E. Popa* „Efectul temperraturii asupra diodelor semiconductoare funcționînd în regim de avanlanșă" paper presented at ICCE Research Conf. Bucharest, 24—25 June/1976.
11. *W. N. Grant*, Solid. St. Electron., 16, 1189—1203 (1973).
12. *R. H. Haitz, H. L. Stover, N. D. Tolar*, IEEE Trans. El. Dev., ED-16 438—444 (1969).
13. *B. R. Mc Avoy*, „Thermal resistance measurement of avalanche diodes" Scientific paper 70-1F6-MICRS-Pl, Westinghouse Research Laboratory, 1970.
14. *R. Grosh, S. K. Roy*, Solid. St. Electron., 18, 945—948 (1975).

„Efectul disipării de putere asupra străpungerii prin multiplicare în avalanșă la joncțiunile pn difuzate"

Articolul prezintă rezultate ale calculelor numerice pentru dispozitivele de putere cu răcire bilaterală, funcționînd în avalanșă. Un program de calcul furnizează caracteristica inversă și profilul de temperatură în interiorul semiconductorului (model unidimensional). Rezultatele sînt utile pentru proiectarea dispozitivelor, în particular prin estimarea efectului dispersiei parametrilor tehnologici în timpul fabricației. Se prezintă și o metodă de evaluare experimentală a rezistenței termice, procedeu care poate ușura comparația între teorie și experiență.

C.Z.: 621.396.662.3

SWITCHED CAPACITOR FILTERS IMPLEMENTATION

M. L. DRAGOMAN, I. ARDELEAN *

The equivalence between resistor-capacitor (RC) filtering circuits and circuits containing switches and ratiod capacitors is examined. For the theoretical description, and as a design aid, attention is drawn to the general equivalence between a resistor and a circuit element consisting of a capacitor and two switches Synthesis methods of switched-capacitors filters (SCF) are also discussed. An experimental SCF is presented. The posibility of monolithic implementation of a SCF is discussed.

1. Introduction

The implementation of filters using operational amplifiers (op amps) MOS analog switches and capacitors, pulls a trigger on using them in communications, because of the advantages they offer :

1. it can be integrated monolithically on one chip ;
2. it can simulate any passive or active filter structure up to 40 kHz in the range of frequencies ;
3. the cut-off frequencies (for low-pass and high-pass filters) may be modified like the frequency bandwidth (for band-pass filters), too, through variation of the clock frequencies for the MOS switches of any structure.

In this paper the fundamental concepts of the switched-capacitor filters are analized and the design methods of this kind of filters are indicated, with the experimental results obtained by the implementation of a third-order Bessel switched-capacitor filter.

An analysis of the possibility of total integration of a switched-capacitor filter is presented with the purpose of using it in a fast frequency shift keying (FFSK) modem.

2. Analysis and Design of Switched-Capacitor

2.1 *The Concept of Switched-Capacitor*

For the last several years the development of MOS technology permitted the realization of the analog LSI circuits.

Manuscript received 2 December 1981.

* Assoc. Assist. eng., Chair of Radiocommunications ; Researcher eng. I.C.S.I.T.E.

An important research trend is the obtainig of the switched-capacitor filters. These filters are known as switched-capacitor filters (SCF) because they use a capacitor and MOS switches to simulate the circuit behaviour of a resistor as shown in fig. 1

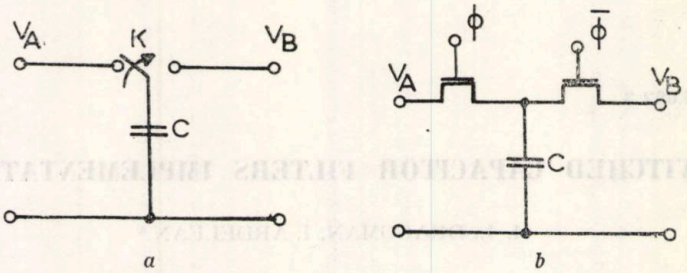


Fig. 1. — (a) A sfwitched-capacitor which in many cases can simulate the function of a resistor (b) An MOS implementation of circuit shown in part (a)

The operation of this "resistor" is as follows : the switch is initially in the left hand position so that the capacitor C is changed to the voltage V_A. The switch is then thrown to the right and the capacitor is discharged to the voltage V_B. The amount of charge which flows into (or from) V_B is thus

$$Q = C(V_B - V_A) \tag{1}$$

If the switch is thrown back and forth at a clock rate f_c then the average current flow i from V_A into V_B will be :

$$i = Cf_c(V_B - V_A) \tag{2}$$

Thus the size of an equivalent resistor which would give the same average current as this circuit is

$$R = 1/C \cdot f_c \tag{3}$$

As (3) shows the "resistor" value depends on clock frequency f_c, which means that the resistence R is controlled by switch rate. This permits to obtain variable-band filters structures. The clock frequency must be much larger then the signal frequencies of interest as dictated by the sampling theorem.

It must be mentioned that the clocks Φ and $\overline{\Phi}$ of the MOS switches (fig. 1b) must not overlap for avoiding the shortcircuit V_A to V_B.

2.2. *The Design of the SCF*

The realization of passive or active filters requires the use of an adequate synthesis method. In the case of the SEF we can choose between two different synthesis methods :

1. The synthesis that uses op amps as integrators for the simulation of the behaviour of a passive RLC circuit [1].

2. The usual synthesis in {s} domain; in the end every element is simulated with switched-capacitors and op amps [2]. In both cases the simulation of the R, L or C element is not unique. There are much more possibilities of simulating the passive circuit elements which lead to the same final result, the distinction between several criteria being the measure of the maximum signal, frequency and the influence of the parasitic capacitances.

Any filter we like to simulate with switched-capacitors can be defined by the impedance of the simulated element [3]:

$$Z_R(z) = R;\ Z_C(z) = R;\ Z_L(z) = R \tag{4}$$

where R determinated by (3). is a function of Z, which can take different forms [3], depending on the requirements of the filters like the maximum signal frequency of the input of the circuit, the value of the clock frequency f_C and the effects of the parasitic capacitances.

A third order low-pass Bessel filter has been realised with the switched-capacitors implementation shown in fig. 2.

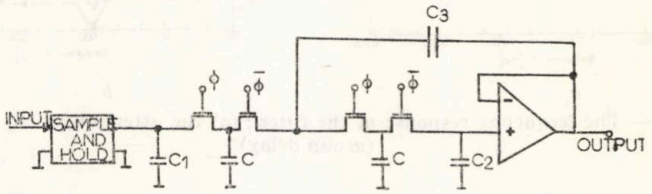


Fig. 2. —The implementation with switched-capacitor of a third order low-pass Bessel filter

2.3. *Experimental Results*

The experimental studies consisted in the practical implementation of the Bessel filter previously proposed.

The denormalized values of the circuit elements are given in table 1.

The calculations were made for a filter with the cut-off frequency $f_t = 2.4$ kHz.

The clock frequency was of 100 kHz, with a pulse duty factor of 1/2. The signal amplitude was 5 V.

The MOS transistors that were used as switches were ROM 01.

The integrator op amp was μA 741.

Table 1

Denormalized values of the third order low-pass Bessel filter

C_1 [nF]	C_2 [nF]	C_3 [nF]	C
5.23	1,33	7,5	1.40

Changing the clock frequency filtering characteristics have been obtained with different cut-off frequencies (table 2).

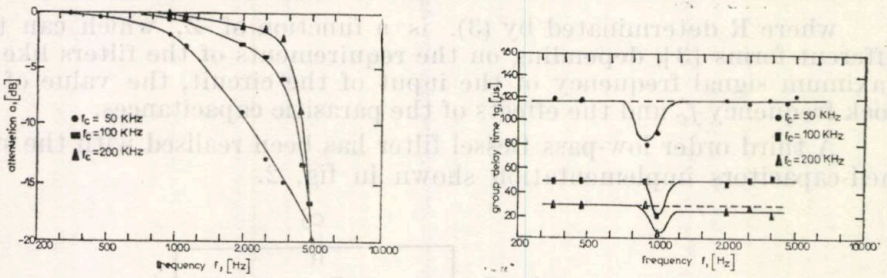
The frequency response of the filter is presented in fig. 3.

The experimental results confirmed satisfactorily the initial design rules.

Table 2

The performances of the third order low-pass Bessel filter implemented with switched-capacitors

fc [KHz]	filter slope [dB]	cut-off frequency [Hz]	stop-band [KHz]	attenuation in the stop-band [dB]
50	20	1200	10÷40	30
100	20	2400	20÷84	24,5
200	20	4800	20÷180	27,5



a *b*

Fig. 3 — The frequency response of the filter : (a) the attenuation (b) the phase (group delay)

The cut-off frequency of the simulated filter normally depends on the clock frequency.

We observe that the phase of the filter (group delay time) has an oscillation near the frequency of 1 kKHz due to the parasitic capacitances at the circuits mount with discrete devices.

This experimented filter may be used in a FFSK moden with variable semnalisation rate [4], (fig. 4).

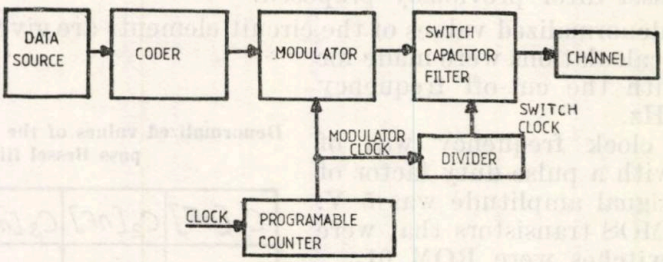


Fig. 4 — A FESK modem with variable bit rate

3. Monolithic implementation of the SCF. s

The MOS technologies for realisation of LSI digital circuits and subsystems such as memories and microprocessors are well established. Until recently very little has been done to evaluate the the potential of

MOS. technologies for analog circuit application. One motivation for consideration of MOS analog circuits came with the developement of the MOS LSI microprocessor, bipolar transistor integrated circuit technology being strongly entrenched in the analog circuit world.

The use of microprocessors in certain automative, consumer and industrial application requires interfacing to analog inputs and outputs.

In some case the economic advantages of incorporating in MOS technology some specific functions usually realized in bipolar technology as analog-digital (A/D) and digital-analog (D/A) conversion, PCM codec-s, data acquisitions systems, telecommunication filters could be very significant.

3.1. *Relization of the SCF Components in MOS Technology*

As we previously said in § 2, SCF require matched capacitors, MOS analog switches and op amps.

3.1.1. *Matched MOS Capacitors*

The range of capacitor values typically employed is from 0,1 to 100 pF.

In standard MOS processes, the capacitors may be realized either between metal and heavily doped silicon, or between two layers of heavily doped silicon. In either case a thermally grown oxide is used as the dielectric.

In order to achieve a small voltage coefficient (say, smaller then 1% per Volt, the MOS capacitor must be operated 5 ÷ 10 V into accumulation or inversion.

This is a difficult constraint from standpoint of circuit design. Generally, however, most capacitors having bulk, CMOS well, or depletion implated region as bottom plate will show nonlinearities of 0,1% per V or much more. As much they are not useful in precision D/A convertors, nor in precision frequency filters [5].

Improvements of the capacitor ratios may be obtained by a proper design of the capacitor's structure (the metal edge defines the capacitor area, thus taking advantage of the better resolution of some positive photo-

Table 3

Component Matching Data

Component	Fabrication technique	Matching	Temperature coefficient	Voltage coefficient
Resistors	Diffused (W = 50μ)	± 0.4 %	+2000 ppm/°C	~200ppm/V
	bn - implanted (W = 40μ)	± 0.12 %	+400 ppm/°C	~ 800ppm/V
Capacitors	MOS (t_{ox} = 0.1μ, L ≃ 250μ)	± 0.06 %	26ppm/°C	10ppm/V

resists and with surrounding fleating redundant metal strips to mantain a relatively constant etchant concentration at every capacitor edge) [6], or by technological hits (the size of the capacitor is determined by the thin oxide mask, which has an excellent lithographic precision) [7].

Table 3 shows some comparative characteristics of integrated resistors and capacitors.

3.1.2. *Analog Switches*

In standard MOS transistor performs like a nearly ideal zero-offset analog switch.

Total leakage current to source, drain or gate in the OFF state is usually under 1 pA. In the ON state the switch aparates as a pure nonlinear resistance without any dc offset voltage. The ON resistance is typically a few thousand ohms, for a small area device. The relatively high ON resistance of the MOS transistor analog switch is not a major limitation when charging on-chip capacitors.

This capacitors range roughly from 0,1 pF to 100pF in value. A 1000 ohm switch charging a 100 pF capacitor has a time constant of 100 ns; this is adeqauately fast for a very braod range of applications.

The parasitic capacitances of a small area MOS transistor switch are small, in the range of 0,01 pF to 0,1 pF/terminal pair. However, errors due to parasitic capacitances may be eliminated or minimized through proper circuits design [5].

3.1.3. *Operational Amplifiers*

There have been numerous barriers to the development of useful all-MOS op amps compared to bipolar transistor technology, MOS yields matched pairs of transistors with an order of magnitude higher offset voltage and an order of magnitude lower tranconductance/stage. MOS transistor equivalent input noise is much higher, particularly the 1/f component.

Despite recent improvements in every area, MOS op amps cannot compete with the performance characteristics of their bipolar transistor counterparts; stand alone MOS op amps are unlikely to challenge the position of general-purpose bipolat transistor op amps as small- scale integrated circuits.

Nevertheless, the MOS amplifiers are very attractive as components on LSI integrated MOS circuits, as analog and digital functions of the same chip. Improvements in MOS process control have reduced the typical input-offset voltage of MOS matched pairs to order of $5 \div 10$ mV. This is still to high for many critical analog applications. Several, relatively complicated, methods for offset cancellation can provide 1—4 orders of magnitude reduction in effective offset.

Maximum practical voltage game/stage has been increased substantially to the range of 100—1000 by use of depletion load devices and complementary MOS methods. Two cascaded MOS gain stages can provide voltage games of 1000 to 10 000 while still being amenable to simple on-chip phase-compensation. Gains at the higher and of this range are achieved

at some sacrifice in other parameters such as slew-rate, die area and/or output impedance, so voltage gain in the range 1000 to 3000 often results in best overall circuit or subsistent characteristics.

Unity gain bandwidth for complete op amps is typically in the range $1 \div 5$ MHz. The practical realized op amps (in various MOS technologies) have been designed for specific dedicated applications (filters, codec-s, etc.) Depending on the kind of load, necessary gain, etc. Finally we must say that the realization of MOS op amps represents „The Gordian Knot" of producing analog MOS circuits, i.e. SCF.

3.2. *Implementation of SCF*

Audiofrequency filters are easily realized using all-MOS analog sample-data techniques. [7], [8], [9], by the use of an adequate technology.

A detailed and rigorous analysis of these filters must be done using z-transform technique, since this is a sampled data system.

By using delays, multiplication by fixed coefficients, and summing operations, recursive sampled-data filters may be synthesized using the direct form [10]. This technique realizes transmissions zeroes as well as poles. A major drawback to this form of recursive filter is that sensitivity of filter response to capacitance ratio errors is high, and increases rapidly as the ratio of the clock-frequency to band edge frequency is increased. An alternative simpler filter approach, known as the state-variable technique employs sample-data integrators (SCF) [11].

This type of filter was described and the results were given in this paper. Transmission poles are realized directly. Realization of finite transmission zeroes required feedforward and summation in the manner of recursive filters. A major advantage of the state-variable approach is that sensitivity of filter response to capacitance-ratio errors is low and independent of clock frequency. The filter presented in this paper may be implemented on-chip as we reduce the capacitors values (the maximum realizable capacitor value is 100 pF). But a reduction on capacitora values requires the increase of clock frequency in the same proportion which determines enhance of the parasitic capacitances. The relatively high values used in the experimented circuit was dictated in order to diminish the influence of the parasitic capacitances between the discrete components (for breed-boarding circuits). In practice we cannot implement a Bessel filter of identical characteristics with those of the analized filter. Thus filters with other characteristics can be implemented.

The most proper MOS technologies for those filters would be Al or Silicon-gate NMOS processes, the Si-gate technology being more indicated for the advantage for minimum parasitic capacitances (for the auto-alignement of the Si-gate mask and the diffusion mask) and of the minimum die area. An op amp mask has been experimented on Al-gate NMOS process.

4. Conclusions

The paper demonstrates the possibility of replacing RC filter in audiofrequency range with MOS/LSI circuits, using switched-capacitors arrays instead of resistance. It is possible to change the filter characteris-

tics as again, cut-off frequency or resonance frequency and the selectivity through the variation of either the clock-frequency or the values of the capacitors or both.

The simulated circuit demonstrates the validity of the theory and of the used model.

REFERENCES

1 *M. S. Lee, C. Chang*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS/27 p. 475 (June 80)
2 *R. W. Brodersen, P. R. Gray, D. A. Hodges*, Proceedings IEEE, vol. *67*, p. 61 (Jan. 1979).
3 *A. Fettweis*, Anch. Elektron. u. Übertragungstechnik, vol. *33* (1979), p. 13
4 *I. Marghescu, M. Dragoman*, MSK Communication System, Summer Symposion of Circuits Theory, Prague, July 1982
5 *D. A. Hodge*, Analog Switches and Passive Elements in MOS/LSI, Analog MOS Integrated Circuits, IEEE Press, p. 14
6 *G. L. McCreavy, P. R. Gray*, part 1, IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC *10* p. 371 (dec. 1975)
7 *G. Smărăndoiu, D. A. Hodge, P. R. Gray, G. Landsburg*, IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC *13* p. 504, (aug. 1978)
8 *Y. Tsividis, P. R. Gray*, IEEE Solid-State Circuits, vol. SC *11* p. 748, (dec. 1976)
9 *D. Senderowicz, D. A. Hodges, P. R. Gray*, IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC *13*, p. 760 (dec. '78)
10 *I. A. Young, D. A. Hodges, P. R. Gray*, Analog MOS Sample-Data Recursive Filters, ISSCC, Dig. Tech. Papers, p. 156
11 *B. J. Hosicka, R. W. Brodersen, P. R. Gray*, IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC *12* (dec. 1977)

Implementarea filtrelor cu capacităţi comutate

În lucrare este prezentată legătura între filtrele RC şi filtrele cu comutatori analogici şi capacităţi.

Se prezintă principalele rezultate teoretice şi practice cu privire la echivalenţa dintre o rezistenţă şi un circuit care conţine doi comutatori şi o capacitate.

În continuare se investighează principalele metode de sinteză şi se realizează practic un filtru care conţine numai comutatori şi capacităţi.

Se studiază în final posibilitatea integrării unui astfel de filtru.

C.Z.: 621.311.22/.23

CONTRIBUȚII LA ANALIZA FUNCȚIONĂRII ECONOMICE A CENTRALELOR TERMOELECTRICE CU ABUR

N. DĂNILĂ, D. GOLICI*

Lucrarea prezintă o metodă de analiză și control a funcționării economice a centralelor termoelectrice cu abur, prin analiza de postcalcul a consumului specific de căldură. Metoda a fost aplicată în exploatarea centralelor termoelectrice cu abur.

1. Introducere

Aprecierea funcționării economice a unei centrale termoelectrice cu abur se face de obicei cu ajutorul indicatorului *consum specific de căldură mediu* realizat într-o perioadă de funcționare (raportul dintre căldura combustibilului consumat și energia electrică produsă în perioada de funcționare), exprimat în kJ/kJ sau kcal/kWh. Simpla comparare a consumului specific de căldură mediu realizat, cu valoarea de proiect sau cea nominală, nu este însă concludentă, deoarece condițiile reale de exploatare diferă de cele luate în considerare la calculul valorii de proiect sau nominale.

De aceea, pentru a putea aprecia, respectiv controla funcționarea economică a unei centrale electrice, este necesară o analiză a consumului specific de căldură, cunoscînd valorile de referință și luînd în considerare condițiile reale de funcționare. Aceste analize au nu numai rolul de a explicita consumul specific mediu realizat, ci și de a evidenția funcționarea sau starea necorespunzătoare a unor elemente din instalație. Pentru analiza consumului specific de căldură în exploatare, au fost elaborate diferite metode care stabilesc, în condițiile de funcționare impuse (externe exploatării), consumul specific optim realizabil și determină abaterile consumului specific real față de valoarea prescrisă, precum și cauzele care au condus la aceste abateri.

Manuscris primit la data de 22 ianuarie 1982

* Prof. dr. ing.; Dr. ing., Catedra Centrale electrice.

2. Contribuții la calculul abaterilor de consum specific de căldură

Pentru calculul corect al consumului specific de căldură este necesară o distincție între abaterile acestuia. Astfel unele abateri pot fi calculate direct în valoare absolută, independente de alte abateri sau cu o dependență explicitabilă. Cele mai importante abateri din această categorie sînt : — abaterea datorită sarcinii electrice a_e — abaterea datorită pierderilor de apă-abur a_p, — abaterea datorită naturii și calității combustibilului a_c. Abaterile dependente, a căror interdependență este greu explicitabilă, sînt în general toate abaterile datorate parametrilor ciclului termic și se determină sub formă relativă ε_i. Se mai definesc abaterile pentru opriri și porniri a_{op} ca abateri în afara funcționării grupurilor.

Consumul specific de căldură mediu se calculează cu relația :

$$q_{pc} = q_0 \prod_1^m (1 + \varepsilon_i) + a_{op} = q_{ob} + \sum_1^n a_i \cong q_{real}, \tag{1}$$

unde :

$$q_o = q_{ob} + a_c + a_e + a_p. \tag{2}$$

Pentru determinarea exactă a valorii absolute a abaterilor dependente, se deduce termenul general :

$$a_i = \varepsilon_i \cdot q_o \frac{\prod_1^m (1 + \varepsilon_i) - 1}{\sum_1^n \varepsilon_i}. \tag{3}$$

Problema care se pune este determinarea abaterii consumului specific de căldură mediu realizat q_r pe o perioadă de funcționare față de consumul specific de căldură optim q_{opt} evitînd metoda împărțirii timpului de funcționare pe paliere de sarcină constantă, operație extrem de anevoioasă. Pentru aceasta este necesară integrarea consumului de căldură Q al grupului pe perioada de funcționare considerată în care a produs cantitatea de energie electrică E.

În acest scop se utilizează caracteristica energetică liniarizată, care în forma cea mai generală — cu punct de frîngere la sarcina optimă P_{opt} — reprezentată în figura 1 are expresia [5, 6] : $Q = Q_o + bP$ [kJ/s], în domeniul $O - P_{opt}$ și : $Q = Q_o + bP + (b_s - b)\ (P - P_{opt})$ [kJ/s], în domeniul $P_{opt} - P_n$, unde : b este creșterea relativă a consumului de căldură în domeniul $P_{opt} - P_n$, în kJ/kWh, iar b_s — idem, în domeniul $P_{opt} - P_n$.

Notînd cu : $b_Z = b_s - b$; T_f — timpul total de funcționare al grupului, în s ; T_{opt} — timpul de funcționare cu puteri mai mari decît P_{opt}, în s — consumul de căldură al grupului în T_f este :

$$Q = \int_0^{T_f} (Q_o + bP)\,\mathrm{d}T + b_Z \int_0^{T_{opt}} (P - P_{opt})\,\mathrm{d}T = Q_o T_f +$$

$$+ bE + b_Z(E - E_{opt}),\ [\mathrm{kJ}] \tag{4}$$

unde E_{opt} este energia produsă cu puteri mai mici, sau egale cu P_{opt}.

Datorită neliniarității și neregularității curbelor diagramei de regim a grupurilor de termoficare, exprimarea analitică exactă a curbelor în tot domeniul de sarcini este o problemă dificilă pentru calculul manual sau cu un calculator de birou [7, 8]. Astfel s-a recurs la tronsonarea diagramelor de regim pe zone de puteri care să corespundă cu domeniile cele

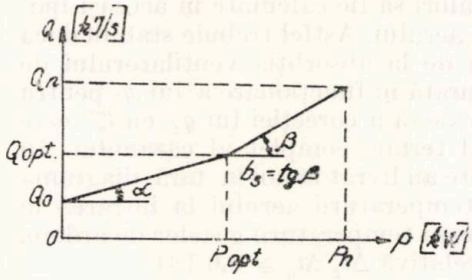


Fig. 1. Caracteristica energetică liniarizată cu două zone

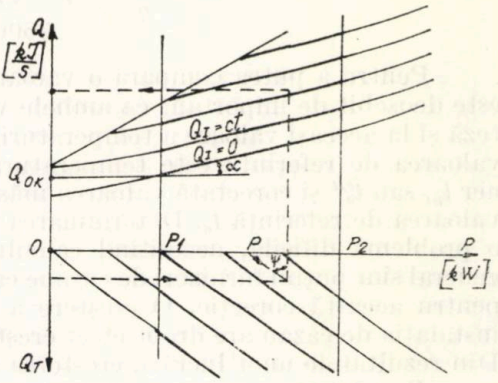


Fig. 2. Reprezentarea grafică a ecuației de consum pentru grupul cu două prize reglabile

mai frecvente de sarcină electrică realizată de grup. Condiția este ca în aceste domenii curbele să poată fi considerate liniare.

Datorită liniarității curbelor în limitele tronsonului, calculul cu puterea și cu căldura medie livrată este echivalent cu integrarea consumului turbinei pe timpul de funcționare. Reprezentarea grafică a unui tronson din diagrama de regim (exprimată caloric) este redată în figura 2.

Ecuația consumului de căldură se exprimă astfel:

$$Q = Q_o + b_K\,(P - P_l + \Delta P_K), \tag{5}$$

în care: Q_o este de forma: $Q_o = Q_{oKl} + b\,(Q_I - Q_{II})$; Q_{oKl} este ordonata caracteristicii la $Q_T = Q_{Tl}$ și $P = P_l$; $b_K = \Delta Q/\Delta P$ la Q_T și Q_I const.; $b = \Delta Q/\Delta Q_l$ la $P = \text{const}$ și $Q_T = \text{const.}$; Q_I este căldura livrată pe priza de abur industrial, în kJ/s; Q_T — idem, pentru încălzire, în kJ/s; ΔP_K este pierderea de putere ca urmare a căldurii livrate pe priza de abur pentru încălzire:

$$\Delta P_K = \text{tg}\psi \cdot Q_T[\text{kW}],$$

unde ψ este unghiul dintre dreapta de putere constantă și verticala din cadranul inferior al diagramei de regim (vezi figura 2).

Dacă se notează cu $c = b_K \cdot \text{tg}\psi$, consumul total de căldură se mai poate exprima sub forma:

$$Q = Q_{oK} + b\,(Q_I - Q_{II}) + cQ_T + b_K(P - P_l) \quad [\text{kJ/s}]. \tag{6}$$

Q_{oK}, b, c, b_K pot fi considerate cu suficientă aproximație ca fiind constante în cadrul unui tronson de diagramă de regim. Pentru un număr mare de cazuri analizate cu condiția alegerii corespunzătoare a tronsonării, erorile

la determinarea lui Q cumulat pe perioada de funcționare s-au situat în domeniul $0{,}5 \div 1\%$.

Cunoscînd pe Q, determinat cu relațiile (5) și (6), consumul specific de bază se calculează cu relația generală:

$$q_b = \frac{Q - Q_I - Q_T}{3600\ P}. \tag{7}$$

Pentru a putea compara o valoare q_2 de referință cu o valoare reală este deosebit de important ca ambele valori să fie calculate în aceeași ipoteză și la aceeași valoare a temperaturii aerului. Astfel trebuie stabilit dacă valoarea de referință este temperatura de la absorbția ventilatorului de aer t_{al} sau t_a^{ext} și corectată valoarea măsurată în funcționare a lui q_2 pentru valoarea de referință t_a. Determinarea exactă a corecției lui q_2 cu t_a^{ext} este o problemă dificilă, necesitînd calculul termic complet al cazanului. În general sînt puțini furnizori de cazane care au livrat la noi în țară diagrama pentru această corecție. O creștere a temperaturii aerului la intrarea în instalația de cazan are drept efect creșterea temperaturii gazelor de ardere. Din rezultatele unor lucrări, creșterea relativă $\Delta t_g/\Delta t_a \cong 0{,}6$ [8].

Rezultatele unor încercări pe cazane de tip TGM-84 de 420 t/h pe gaze naturale, pentru determinarea acestui raport [6], au condus la o valoare medie de 0,62. Pentru cazanul 4 o determinare printr-un calcul mai exact a condus la valoarea de 0,655. La cazane utilizînd drept combustibil cărbune pulverizat (tip PK-10 p de 230 t/h și tip MAN de 500 t/h) de la noi din țară, s-a făcut o determinare analitică a raportului $\Delta t_g/\Delta t_a$ obținînd, de asemenea, valori apropiate de 0,6.

Pentru că valoarea raportului este influențată de starea de etanșeitate a preîncălzitorului de aer (stare nu foarte corespunzătoare la cazanele încercate) și pentru că valoarea medie obținută analitic și experimental este foarte aproape de cea a VTI, se consideră că se poate adopta cu suficientă aproximație: $\Delta t_g/\Delta t_a \cong 0{,}6$.

Variația randamentului cazanului este dată de relația:

$$\Delta\eta_{ic} = \frac{V_g c_{pg}(1-K)(t_{ao}^{ext} - t_a^{ext})}{P_{ci}} \cdot 100\ [\%], \tag{8}$$

unde: t_{ao}^{ext} este temperatura aerului, valori de referință; t_a^{ext} — idem, într-o situație diferită de cea de referință; raportul $K = \Delta t_g/\Delta t_a$.

Determinarea corecției necesită un calcul complex și exact al ciclului termic, inclusiv al destinderii în turbină, ceea ce reprezintă un volum foarte mare de calcul [2, 4, 9]. Pentru o rezolvare mai simplă a problemei se propune un artificiu de transformare a variației temperaturii t_s, respectiv a presiunii din condensator p_K, în variație echivalentă de temperatură de apă de răcire la intrarea în condensator t_{lR}. Cu aceasta din urmă se poate determina abaterea de consum specific prin intermediul curbelor de corecție pentru variația temperaturii apei de răcire, curbe uzuale, livrate de constructori [6].

Cu ajutorul caracteristicii condensatorului (figura 3) se găsește la debitul de abur real D_K, variația lui t_{lR} corespunzătoare unei variații de t_s. Astfel influența murdăririi suprafețelor de schimb de căldură și pătrunderilor de aer asupra temperaturii de saturație se obțin analog, prin deter-

minarea lui t_{lf} (din figura 3), corespunzător temperaturii reale de saturație t_{sr}. În consecință, această influență este redată de diferența $t_{lf} - t_{lR}$ corespunzător variației temperaturii de saturație de la $t^{cor}_{s(D)}$ la t_{sr}. Abaterea totală datorită condițiilor de exploatare ale condensatorului (debit de apă, murdărire și pătrundere de aer) se calculează pentru diferența $t_{lf} - t_{lR}$ echivalentă cu variația temperaturii de saturație de la $t_{s(D)}$ la t_{sr}.

Pentru calcule exacte se determină analitic t_s sau t_{lR} pornind de la relația cunoscută:

$$t_s = t_{lR} + \frac{e^B}{e^B - 1} \Delta t, \tag{10}$$

unde: $B = KS/W = KS \cdot \Delta t / D_K \cdot \Delta i_K$, S fiind suprafața de schimb de căldură, iar K —coeficientul global de schimb de căldură. Singurul element necunoscut este K ce se poate determina conform metodei propuse de Schaaf [6].

În general, constructorii de turbine de abur furnizează curbe de corecții pentru variația principalilor parametri ai ciclului termic, exprimate în variație de putere ΔP a turbinei; în rare excepții se furnizează corecțiile exprimate în variație de consum de căldură a ciclului ΔQ. Problema care se pune este determinarea corectă a abaterilor de consum specific de căldură pentru producerea energiei electrice pornind de la variația puterii grupului ΔP.

Ținînd seama de condiția necesară la calculul abaterilor de consum specific, ca puterea și căldura livrată să rămînă constante, abaterea consumului total de căldură al grupului se determină cu relația:

$$\Delta Q_e = Q'_e - Q_e = \Delta Q_o + b_K \cdot (\Delta P_D + \Delta P_I + \Delta P_T), \tag{11}$$

unde: ΔP_D este variația de putere dată de diagramele de corecție ale constructorului; ΔP_I, ΔP_T este variația de putere datorită variației parametrilor la priza de abur industrială, respectiv priza de abur pentru încălzire; ΔQ_o este variația consumului total de căldură la variația parametrilor ciclului termic fără menținere constantă a puterii și căldurii livrate. În calcule simplificate se pot neglija termenii ΔP_I și ΔP_T.

Pentru determinarea abaterii datorită variației temperaturii apei de alimentare la turbinele de termoficare cu priză reglabilă pentru încălzire, s-a calculat o diagramă de variație a abaterii relative de consum specific prin ocolirea preîncălzitorului de înaltă presiune PIP — ε_{PIP}. Diagrama este calculată pentru turbinele de 125 MW, cu parametrii aburului de 141 ata, 535/535°C, pe baza a 11 regimuri de funcționare date de constructor (figura 4).

Metoda de postcalcul a consumului specific de căldură pentru grupurile de termoficare aplicată în exploatarea centralelor termoelectrice sub forma de instrucțiune [6], aduce următoarele contribuții principale:
— determinarea consumului specific de bază la grupurile de termoficare;
— calculul abaterilor de consum specific de căldură la grupurile de termoficare. Pe baza acestor elemente principale noi s-a elaborat o nouă metodă pentru controlul funcționării economice a grupurilor de termoficare.

Structura consumului specific de căldură calculat se păstrează asemănătoare cu aceea din vechea metodă:

$$q_{pc} = q_b + \Sigma a_i, \tag{12}$$

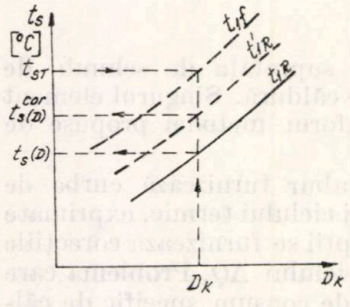


Fig. 3. Diagrama principială a caracteristicii condensatorului de abur

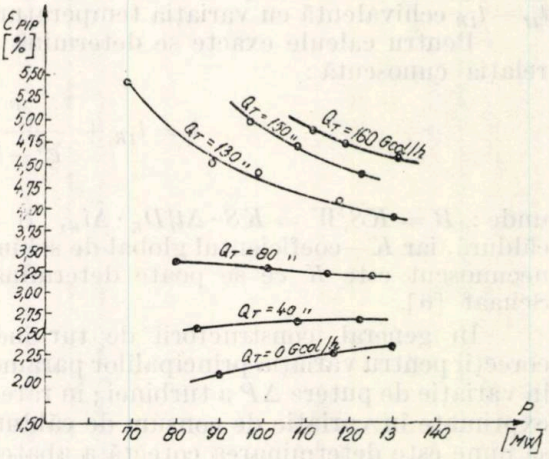


Fig. 4. Abaterea relativă pentru ieşirea din funcţiune a preîncălzitorului de înaltă presiune pentru turbinele Skoda de 125 MW

indicele i însemnînd numărul grupului sau blocului în cadrul etapei. Modelul matematic pentru postcalculul consumului specific de căldură la grupurile de condensaţie cu una sau două prize reglabile de termoficare se arată în lucrarea [6].

3. Aplicaţii ale metodelor de postcalcul propuse

Rezultatele postcalculului consumului specific de căldură pe baza abaterilor, pentru 15 centrale termoelectrice de condensaţie şi de termoficare pe un interval de trei luni au fost analizate ca o primă aplicaţie a metodei propuse. Sinteza abaterilor de consum specific de căldură determinate în perioada amintită şi exprimate ca procente ale consumului specific de referinţă este redată în tabelul centralizator. Abaterile relative maxime şi minime reprezintă media valorilor maxime, respectiv minime rezultate pe centrale.

Din analiza rezultatelor acestei aplicaţii se constată următoarele: — importanţa cantitativă a diferitelor abateri; — valoarea ridicată a abaterilor nenominalizate la grupurile de termoficare — imprecizii datorită stării necorespunzătoare a aparatajului existent în centrale şi în mod special cel pentru măsura parametrilor gazelor de ardere la coş şi a combustibilului; — lipsa unor probe de performanţă corespunzătoare la agregatele de bază. Dificultăţile întîmpinate pot fi înlăturate la grupurile existente şi evitate la grupurile noi prin dotare corespunzătoare cu aparataj de măsură şi executarea la timp a probelor de garanţie.

Modelul matematic prezentat a fost testat cu date de exploatare la o etapă de termoficare de 300 MW, pe timp de 31 de zile. Schema termică

Tabel centralizator de abateri de consum specific de căldură calculate prin medierea rezultatelor obținute pentru 15 centrale termoelectrice

Denumirea abaterii	Simbol	Valoarea abaterilor în % din consumul specific de referință		
		maximă	minimă	medie
I. Abateri datorită cauzelor externe				
Variația sarcinii electrice (la grupuri de condensație)	ε_e	3,3	0,11	2,0
Variația temperaturii apei de răcire	ε_{tR}	1,7	-0,6	1,0
Consum pentru opriri - porniri	ε_{op}	0,9	0,04	0,5
Influența consumului propriu asupra consumului specific de referință	ε_{si}	9,0	4,5	7,0
II. Abateri datorită cauzelor interne				
Pierderi suplimentare la coș	ε_{q2}	2,5	0,17	0,8
Pierderi suplimentare prin nearse mecanice	ε_{q4}	10,5	0,17	1,5
Variația temperaturii aburului viu	ε_{to}	2,4	0,37	0,75
Variația presiunii aburului viu	ε_{po}	0,95	0	0,3
Variația temperaturii aburului supraîncălzit intermediar	ε_{tsi}	0,77	0,2	0,3
Depuneri și pătrunderi de aer în condensator	ε_{ma}	5,0	0,27	2,0
Variația debitului de apă de răcire	ε_w	1,4	0,27	0,3
Pierderi suplimentare de apă - abur	ε_p	5,0	0,4	2,25
Abaterea temperaturii apei de alimentare	ε_{al}	2,8	0,1	0,5
Consum propriu de energie electrică suplimentar	$\varepsilon_{\Delta SI}$	1,0	0,2	0,6
Total abateri	ε_Σ	15,5	2,1	6,6
Abateri nenominalizate	ε_{nen}	8,3	0	2,3

de principiu a etapei este cu bare colectoare pe partea de abur viu și de apă de alimentare. Ciclul termic este cu supraîncălzire simplă a aburului viu, avînd parametrii aburului la cazane : 140 bar, 570°C.

Analizînd calculul și valorile rezultate se pot face următoarele aprecieri : — datele medii de exploatare au fost preluate din statistica curentă a centralei electrice, cu care se lucrează la raportările periodice de post-calcul ; rezultă astfel că nu este necesară colectarea sau măsurarea unor date suplimentare ; — schema și condițiile relativ complicate de funcționare, alese în mod deliberat astfel, nu au condus la dificultăți de calcul ;

— valoarea relativă a abaterilor nenominalizate, 2,4% din consumul specific de căldură realizat, confirmă o precizie de calcul satisfăcătoare pentru grupurile de termoficare.

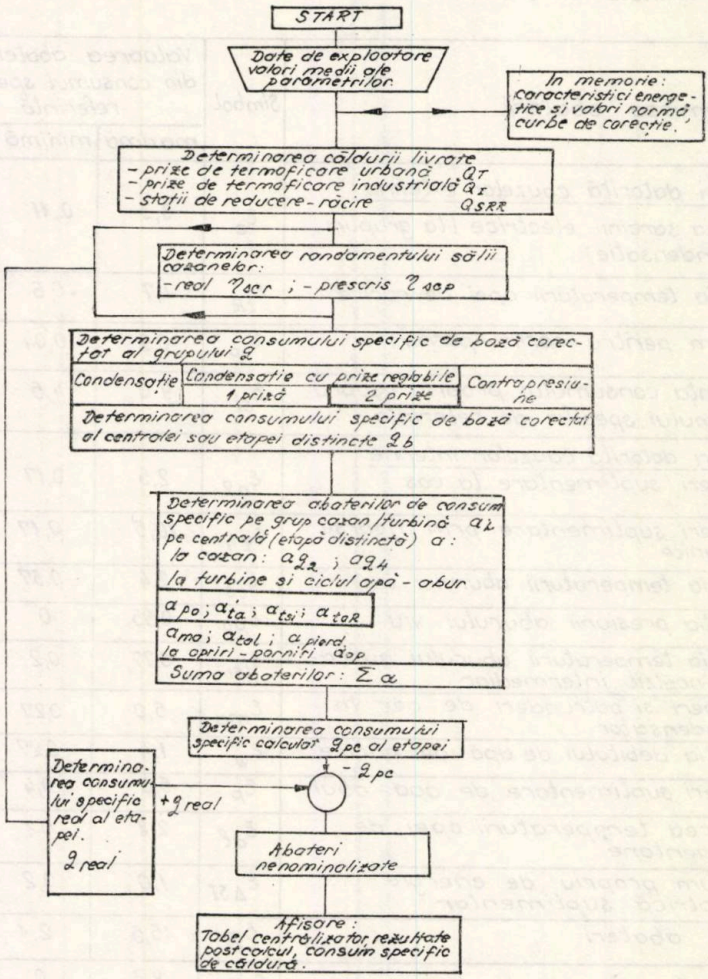


Fig. 5. Schema generală de calcul pentru consumul specific de căldură al unei centrale termoelectrice sau al unei etape distincte dintr-o CTE

Pentru blocurile instalate în țara noastră de 315 și 330 MW, funcționînd pe cărbune (lignit) pulverizat s-a elaborat un program de calcul pe calculatorul universal IBM — 360. Programul elaborat în limbaj Fortran a fost testat, confirmînd posibilitatea programării metodei și introducerea în memoria calculatorului a tuturor caracteristicilor necesare calculului.

Pentru un grup de centrale termoelectrice făcînd parte dintr-un sistem energetic, se poate utiliza un singur calculator central la care se transmit datele de exploatare și care execută calculele centralizat. În figura 5 se prezintă schema generală de calcul a programului elaborat pentru cazul

cel mai general al unei etape distincte de agregate cazan — turbină și pentru toate tipurile uzuale de turbină din țara noastră. Sub această formă calculul este general, cuprinzînd toate situațiile întîlnite, atît pentru o centrală termoelectrică, cît și pentru un grup de centrale dintr-un sistem energetic.

Concluzii

Lucrarea prezintă o metodă de analiză și control a funcționării economice a centralelor termoelectrice cu abur, prin analiza de postcalcul a consumului specific de căldură, aplicată în exploatarea centralelor termoelectrice cu abur din țara noastră. Astfel, atît modelul matematic propus pentru postcalculul consumului specific de căldură la grupurile de condensație și de termoficare, cît și contribuțiile la calculul abaterilor, sînt utilizate la controlul funcționării economice pe bază de postcalcul care se execută lunar în exploatarea centralelor termoelectrice din țară. Rezultatele obținute se utilizează, de asemenea, la implementarea programelor de calcul pentru controlul funcționării economice pe calculatoare de proces la blocurile de 315 și 330 MW funcționînd pe lignit pulverizat și pe păcură sau gaze. Automatizarea postcalculului cu calculatorul universal poate fi executată la un centru de calcul. De asemenea, a fost elaborat un sistem informatic pentru urmărirea funcționării economice a tuturor centralelor electrice din țară.

BIBLIOGRAFIE

1. *Dinculescu C., Dănilă N., Pimsner V.*, Analiza termodinamică a schemelor centralelor electrice, Ed. Academiei RSR, București, 1967.
2. *Dănilă N.*, Centrale nucleare electrice, Ed. Academiei RSR, București, 1973.
3. *Dănilă N.*, Centrale nucleare electrice. Probleme, Ed. Didactică și Pedagogică, 1980.
4. *Dolezal R.*, Grosskessel Feuerungen, Ed. Springer Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
5. *Goliciu D., Apolzan S., Popovici M.*, Energetica, nr. 7, 1973, pag. 303—314.
6. *Goliciu D.*, Contribuții la analiza consumului specific de căldură al centralelor termoelectrice cu abur, Teză de doctorat, IPB, 1980.
7. *Gornostaev L. S.*, Elektriceskie Stanții, nr. 11, 1972, pag. 80—82.
8. *Bennenson E. I., Ioffe S. I.*, Teplofikaționnîe parovîe turbinî, Ed. Energia, Moskva, 1976.
9. *Krieb K. H., Zimmermann F.*, BWK, nr. 3, 1969, pag. 120.

Contributions to the Analysis of the Economical Operation of the Thermal Power Stations

This paper presents a method of analysis and control of the thermal power stations using a post-analysis of the specific heat consumption. This method has been applied successfuly to the currently operating thermal power stations.

C.Z.: 621.315.211

MODEL MECANO-ELECTRIC PENTRU STUDIUL VIBRAȚIILOR UNUI ANSAMBLU CONDUCTOR-AMORTIZOR ÎN CAZUL LINIILOR ELECTRICE AERIENE

A. ARIE, P. POSTOLACHE, E. DUMITRESCU *

Vibrația conductoarelor liniilor electrice aeriene contribuie la îmbătrînirea prematură și ruperea acestora, producînd întreruperi în alimentarea cu energie electrică a consumatorilor și daune economiei naționale.

Deși cunoscut de mult timp și studiat sub diferite aspecte, fenomenul vibrației conductoareolor este încă departe de a fi perfect elucidat și deci bine controlat.

În lucrare se propune un model electro-mecanic de studiu integrat al ansamblului conductor-amortizor, model în care amortizorul este asimilat unui filtru.

În scopul determinării frecvențelor proprii de oscilație ale amortizorului s-au efectuat măsurători care au pus în evidență cele două moduri de vibrație ale acestuia: translație și rotație.

1. Efectele oscilațiilor conductoarelor liniilor electrice aeriene

Problema vibrației conductoarelor este tot atît de veche ca și cea a transportului energiei electrice cu ajutorul liniilor aeriene primele studii sistematice fiind efectuate în anii 1926—1927 [1], [2].

Vibrațiile conductoarelor liniilor electrice aeriene sînt, în general oscilații provocate de vînt. În mod uzual acestea sînt clasificate în două categorii:

— oscilații cu amplitudini ridicate și de joasă frecvență (galopul conductoarelor);

— oscilații cu amplitudini reduse și de înaltă frecvență.

Oscilațiile de joasă frecvență — a căror lungime de undă este cuprinsă între 10 și 400 m — apar în cazul vînturilor puternice (5—30 m/s) și care suflă în rafale. Ele au amplitudini mari: 0,3—6 m, ajungînd uneori la 10 m [3], [4]. Ca urmare, pe lîngă eforturile mari care apar în conductoare în dreptul punctelor lor de prindere, pot să apară apropieri periculoase sau atingeri între conductoare, fapt ce determină apariția de scurtcircuite și, în consecință, deconectarea liniei electrice.

Oscilațiile de înaltă frecvență — a căror lungime de undă este cuprinsă între 0,5 și 10 m — apar în cazul vînturilor slabe (0,5—5 m/s) și

Lucrare prezentată la Sesiunea jubiliară dedicată aniversării a 100 de ani de la înființarea Școlii naționale de poduri și șosele — București, decembrie 1981

* Prof. dr. ing; Șef lucrări ing., Catedra Rețele electrice; Șef lucrări ing., Catedra Rezistența materialelor

uniforme. Ele au amplitudini mici : de regulă 3—10 mm, rareori 30—50 mm [4]. Oscilațiile de înaltă frecvență — care în limbaj curent se numesc vibrația conductoarelor — conduc la obosirea conductorului în punctele de suspensie (cleme) fapt ce are ca efect ruperea lui.

Vibrația conductoarelor, a fost cercetată în multe țări, atît sub aspect teoretic cît și experimental, la scară reală sau pe modele. Astfel W. Bruckner, G. Diana, A. Bourgine ș.a. au încercat să determine modele matematice pentru a stabili modurile de vibrație ale conductoarelor, frecvențele proprii, energiile înmagazinate de conductoare în vibrație, eforturile maxime datorită fenomenului de obosire a materialului, eforturile care apar pe reazeme și sînt transmise structurilor, precum și influența amortizoarelor, distanțierilor și a pieselor mecanice de amortizare a vibrațiilor [5], [6], [7],

Interesul pe care îl prezintă problema vibrației conductoarelor în ansamblul măsurilor luate pentru creșterea fiabilității liniilor electrice explică numărul mare de lucrări publicate pe această temă, în particular la Sesiunea CIGRE din anul 1978, și, mai recent, la Simpozionul organizat de CIGRE la Stockholm în iunie 1981 pe tema relației reciproce instalație energetică — mediu înconjurător.

2. Analogia electro-mecanică pentru studiul oscilației conductoarelor

Ecuațiile care descriu vibrația transversală a unui conductor de masă specifică m, întins sub acțiunea efortului H_0, avînd coeficientul de frecare între spire k_0 și coeficientul de pierderi aerodinamice D_0, mișcîndu-se pe direcție verticală cu viteza intstantanee v sub acțiunea forței instantanee f sînt [8] :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= m\frac{\partial v}{\partial t} + k_0 v \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{H_0}\frac{\partial f}{\partial t} + D_0 f \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Pe de altă parte, ecuațiile care descriu funcționarea unei linii electrice cu constante uniform distribuite avînd parametrii specifici R_0 — rezistență, G_0 — conductanță transversală, L_0 — inductanță și C_0 — capacitate fu și i fiind valorile instantanee ale tensiunii și intensității curentului) au (orma :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0\frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Analogia între ansamblul ecuațiilor diferențiale (1) și (2) este evidentă, corespondența (analogia electromecanică) ce se poate stabili fiind următoarea :

$$u \leftrightarrow f; \quad i \leftrightarrow v; \quad L_0 \leftrightarrow m;$$
$$C_0 \leftrightarrow H_0^{-1}; \quad R_0 \leftrightarrow k_0; \quad G_0 \leftrightarrow D_0.$$

Vibrațiile mecanice ale conductorului unei linii electrice aeriene pot fi analizate deci cu un sistem de ecuații diferențiale de tipul celor care descriu fenomenele electrice pe liniile lungi. Acest fapt este de mare importanță practică, deoarece permite aplicarea directă în studiul vibrațiilor mecanice ale conductoarelor a teoriei și concluziilor cunoscute din studiul fenomenelor de propagare pe linii electrice lungi.

3. Amortizarea vibrațiilor

3.1. *Amortizorul Stockbridge*

În scopul reducerii vibrațiilor conductoarelor liniilor electrice aeriene se folosesc amortizoare cu disipare de energie, numite și amortizoare de tip dinamic. (Remarcăm că aceste dispozitive disipă energie și amortizează vibrațiile fapt pentru care denumirea lor corectă ar fi cea de AMORTIZOR-DISIPATOR.)

Amortizorul dinamic cel mai folosit este cel realizat de americanul George H. Stockbridge în anul 1925, amortizor care îi poartă numele. Deși nu a suferit practic nici o modificare de principiu din momentul de cînd a fost inventat și pînă astăzi, amortizorul Stockbridge mai păstrează încă secrete, unele din ele puse în evidență în lucrări relativ recente [9]. Alcătuit din două mase legate printr-un conductor flexibil, amortizorul Stockbridge formează un sistem mecanic elastic cu două grade de libertate. Deoarece fiecare masă poate avea o mișcare de translație și una de rotație, sistemul prezintă două moduri de oscilație, corespunzător celor două tipuri de mișcări, fiecare mod fiind caracterizat de o frecvență proprie de oscilație.

Cele două frecvențe sînt, în general, bine individualizate, frecvența joasă corespunzînd mișcării de translație, iar frecvența înaltă, mișcării de rotație. Astfel, pentru un amortizor Stockbridge — produs de firma Crompton Engineering Co. Ltd., Madras, s-au măsurat următoarele frecvențe proprii : 8,5 Hz pentru translație și 32 Hz pentru rotație [9].

Punctele nodale caracteristice celor două moduri de oscilație ale unui asemenea amortizor sînt prezentate în fig. 1, iar forțele și momentele care acționează asupra lui sînt date în fig. 2 (Punctul A reprezintă locul de fixare al amortizorului la conductor).

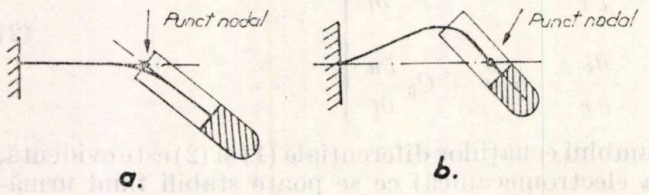


Fig. 1 — Pozițiile punctelor nodale care corespund celor două moduri de oscilație ale amortizorului Stockbridge [9]
a) translație b) rotație

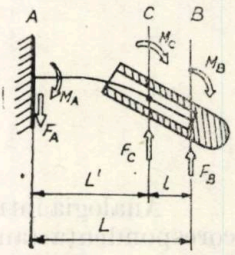


Fig. 2 — Forțele și momentele care acționează asupra amortizorului Stockbridge

O caracteristică (importantă pentru studiul analogic al ansamblului conductor-amortizor) este aceea că cele două moduri de oscilație sînt distincte, fapt ce permite ca — într-o primă aproximație — amortizorul Stockbridge să fie considerat, în vecinătatea rezonanței, ca un sistem mecanic cu un singur grad de libertate, corespunzînd modului de oscilație pentru care are loc rezonanța [9, 10].

3.2. — *Analogia electro-mecanică pentru studiul amortizorului Stockbridge*

Studiul efectelor de amortizare se poate face cu ajutorul analogiei electro-mecanice. Pe această bază se realizează un instrument de calcul unitar pentru analiza ansamblului conductor-amortizor.

În cele ce urmează se va considera numai modul de oscilație care corespunde mișcării de translație și este deci caracterizat prin frecvența proprie de valoare mai mică . Avînd în vedere cele de mai sus, în vecinătatea rezonanței pe această frecvență, amortizorul Stockbridge va fi considerat ca un sistem mecanic cu un singur grad de libertate. Cu aceste ipoteze schema mecanică echivalentă a amortizorului este cea din fig. 3, corespunzătoare unui sistem mecanic elastic cu frecare vîscoasă. S-au notat : m_1 — masa clemei de prindere a amortizorului la conductor ; m_2 — masa amortizorului, K — constanta elastică a resortului, R_v — amortizarea vîscoasă, f — forța de excitație instantanee.

Considerînd că vitezele instantanee ale maselor m_1, respectiv m_2 sînt v_1, respectiv v_2 se poate scrie că :

$$\left.\begin{aligned} f &= m_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \\ m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} &- R_v(v_1 - v_2) + K \int_0^t (v_1 - v_2)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Pe baza analogiei electromecanice menționate se poate construi schema electrică echivalentă a amortizorului în vecinătatea rezonanței de translație. Această schemă este prezentată în fig. 4, în care L_1 este induc-

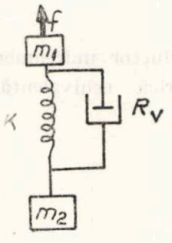


Fig. 3 — Schema mecanică echivalentă a amortizorului Stockbridge.

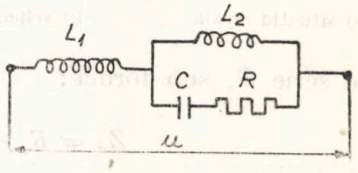


Fig. 4 — Schema electrică echivalentă a amortizorului Stockbridge

tivitatea corespunzătoare masei m_1, L_2 — inductivitatea corespunzătoare masei m_2, C — capacitatea corespunzătoare constantei elastice K și R — rezistența care corespunde amortizării vîscoase.

3.3. — *Ansamblul conductor-amortizor*

În cazul analizei ansamblului conductor-amortizor schema echivalentă a amortizorului se introduce în serie cu cea a conductorului liniei electrice. Se obține astfel o schemă electrică echivalentă formată din elemente uniform distribuite în serie cu elemente concentrate (fig. 5).

Deoarece viteza de deplasare a conductorului în clemă este nulă — respectiv curentul este nul la ieșire în schema electrică echivalentă — se poate considera că porțiunea de conductor l_0 lucrează ca o linie electrică în gol (l_0 fiind distanța între amortizor și stîlp).

Impedanța de mers în gol a unei linii de lungime l_0 este :

$$\underline{Z}_{gol} = -jZ_c \operatorname{cotg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_0} \tag{4}$$

Z_c fiind impedanța caracteristică a liniei considerată fără pierderi (ceea ce este suficient de corect din punct de vedere practic).

Admițînd că impedanța amortizorului este egală cu $\underline{Z}_a$ impedanța echivalentă $\underline{Z}_e$ la capătul liniei (bornele c—d) este :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_a - jZ_c \operatorname{cotg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_0} \tag{5}$$

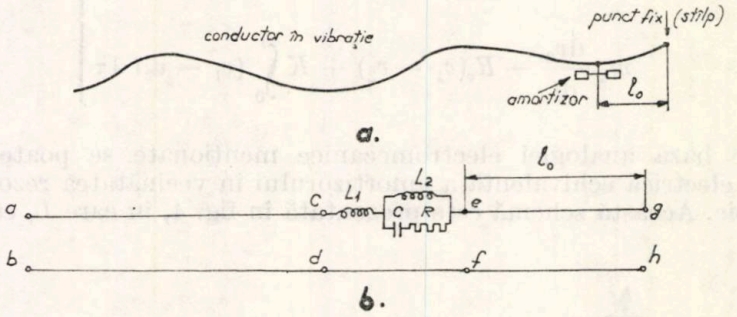


Fig. 5 — Analogia electrică a ansamblului conductor unic-amortizor.
a) situația reală b) schema electrică echivalentă

Dacă se scrie $\underline{Z}_a$ sub forma :

$$\underline{Z}_a = R_a + jX_c \tag{6}$$

egalitatea (5) devine :

$$\underline{Z}_e = R_a + j\left(X_a - Z_c \operatorname{cotg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_0}\right) \tag{7}$$

O reducere eficientă a vibrațiilor se realizează printr-un transfer maxim de putere de la conductorul în vibrație la amortizor. Acesta se obține atunci cînd linia electrică este adaptată:

$$\underline{Z}_e = Z_c \tag{8}$$

În acest caz din relația (7) rezultă că:

$$\left.\begin{aligned} R_a &= Z_c \\ X_a &= Z_c \operatorname{cotg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_0} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Din ultima relație se deduce:

$$\frac{R_a}{X_a} = \operatorname{tg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_0} \tag{10}$$

Deci, pentru a se determina distanța de amplasare a unui amortizor, este necesar să se cunoască rezistența și reactanța acestuia, precum și frecvența proprie a conductorului în vibrație.

Din schema echivalentă a amortizorului (fig. 4) se deduce:

$$R_a = \operatorname{Re}(\underline{Z}_a) = \operatorname{Re}\left[jL_1\omega + \frac{jL_2\omega\left(R - j\frac{1}{C\omega}\right)}{R + j\left(L_2\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \right] \tag{11}$$

$$X_a = \operatorname{Im}(\underline{Z}_a) = \operatorname{Im}\left[jL_1\omega + \frac{jL_2\omega\left(R - \frac{1}{jC\omega}\right)}{R + j\left(L_2\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \right] \tag{12}$$

4. Determinarea experimentală a frecvențelor proprii de oscilație a amortizorului Stockbridge

În scopul punerii în evidență a celor două frecvențe proprii de oscilație a unui amortizor Stockbrige, la Institutul politehnic București, a fost încercat, la vibrații, un amortizor de acest tip. Pentru măsurători a fost folosită schema de încercare prezentată în fig. 6. O vedere de ansamblu a dispozitivului de încercare și măsură este dată în fig. 7.

Au fost excitate, urmărite și înregistrate numai mișcările în plan vertical ale amortizorului. Pentru găsirea celor două frecvențe proprii de

oscilaţie a amortizorului, clema lui de prindere pe conductor a fost fixată rigid de o instalaţie de rezemare. Captorul de vibraţii a fost legat la osciloscop pentru urmărirea vizuală a amplitudinii. Apoi s-au căutat, începînd cu frecvenţa minimă de 2 Hz, frecvenţele proprii de oscilaţie a amortizorului. Datorită frecărilor interne foarte mari în braţele greutăţilor, regimul staţionar s-a stabilit cu o întîrziere relativ mare (4 — 8 secunde de

Fig. 7 — Instalaţie pentru determinarea frecvenţelor proprii de oscilaţie ale → amortizorului Stockbridge.

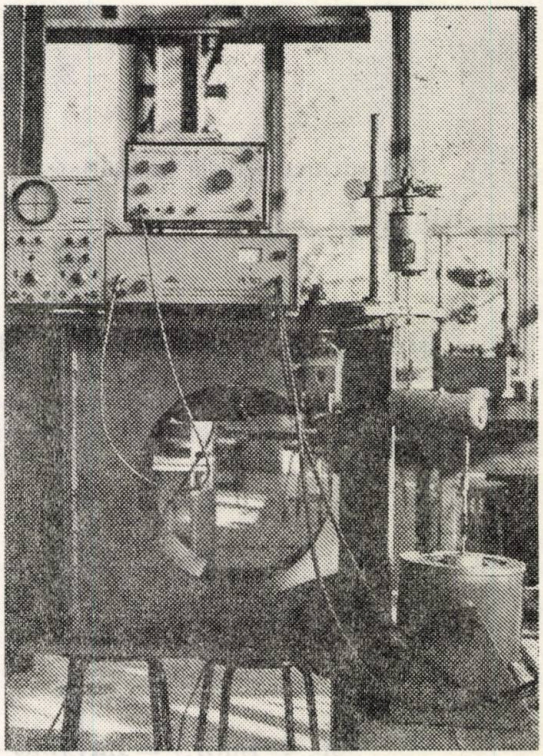
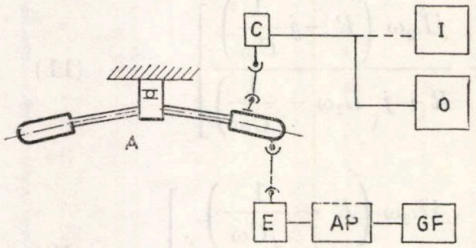


Fig. 6 — Schema instalaţiei de determinare a frecvenţelor proprii de oscilaţie a amortizorului Stockbridge: A — amortizor, GF — generator de semnal cu frecvenţă variabilă, AP — amplificator de putere, E — excitator (vibrator), C — captor de vibraţii, O — osciloscop, I — înregistrator.



funcţionare la o anumită frecvenţă de excitaţie), fapt care a îngreuiat mult stabilirea corectă a frecvenţelor proprii.

În jurul frecvenţei proprii, determinate cu ajutorul osciloscopului, au fost făcute cîteva înregistrări, pentru punerea în evidenţă a variaţiei amplitudinii vibraţiilor cu frecvenţa.

În timpul efectuării încercărilor s-a constatat că, datorită frecărilor interne pronunţate, amortizarea proprie a absorbitorului este foarte mare. Acest fapt conduce, pe de o parte, la o întîrziere apreciabilă în stabilirea regimului staţionar, iar pe de altă parte, nu permite determinarea precisă, cu aparatura folosită, a coeficientului de amortizare. În fig. 8 se prezintă, spre exemplificare, oscilograma înregistrată după întreruperea alimentării excitatorului la o fecvenţă a vibraţiilor de 50 Hz.

Cele două frecvențe proprii se situează în domeniul 15 —20 Hz pentru mișcarea de translație și 70 —80 Hz pentru mișcarea de rotație. S-a constatat că o pondere importantă au poziția punctului de excitare și a celui de măsurare a vibrațiilor, ca și nivelul de putere al excitației.

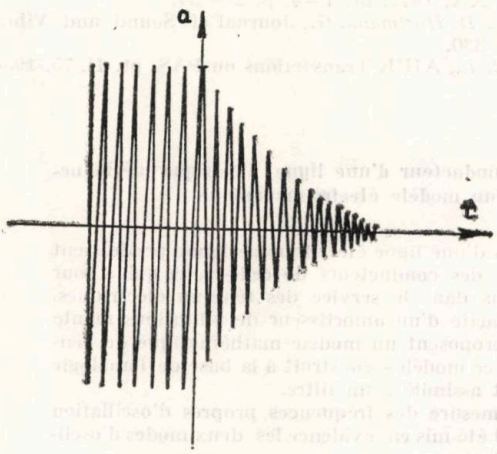


Fig. 8 — Amortizarea oscilațiilor având frecvența de 50 Hz,

5. Concluzii

Modelul mecano-electric prezentat facilitează studiul analitic al ansamblului conductor-amortizor de pe o linie electrică aeriană permițînd totodată o apreciere mai corectă a mecanismului amortizării vibrațiilor și a eficienței absorbitorului. Necesitatea cunoașterii gamei de frecvențe a vibrațiilor în care atenuarea este maximă impune determinarea experimentală a frecvențelor proprii de oscilație — în translație și în rotație — ale amortizorului.

Încercările efectuate au permis să se verifice experimental teoria privind comportarea la vibrații a amortizoarelor Stockbridge, rezultatele obținute fiind, calitativ și cantitativ, în concordanță atît cu rezultatele teoretice, cît și cu cele experimentale obținute în străinătate.

Frecvențele proprii ridicate (70 —80 Hz) pot fi reduse prin schimbarea constructivă a amortizorului.

Se consideră că pentru cunoașterea cît mai exactă a comportării amortizoarelor Stockbridge montate pe linii cu conductoare fasciculare, este necesar să se continue studiile și încercările începute, folosindu-se, în acest scop, amortizoare de diferite tipuri și dimensiuni, noi sau demontate de pe linii existente, amortizoarele vechi fiind utile pentru determinarea variației în timp a caracteristicilor mecanice ale absorbitoarelor.

BIBLIOGRAFIE

1. *Varney, Th.*, Trans. Amer. Inst. Electr. Eng., tome 45 (1926), p. 953—965.
2. *Draeger, K.*, El. und. Masch. Bau, tom 45 (1927), p. 185—188.
3. *Rissone, R. F. et al.*, Etude expérimentale de l'oscillation des conducteurs en faisceaux, Rap. CIGRE 23-02-1968.

4. *Leppers, P. H. et al.*, Electrical World, 1977, May, p. 70–72.
5. *Bruckner, W. et al.*, Contraints dans les conducteurs de lignes de transport aériennes auprès de la pince de suspension, Rap. CIGRE 23-07-1968.
6. *Claren, R., Diana, G.*, IEEE Transactions on PAS, 88, 1969, p. 1741–1771.
7. *Bourgine, A.*, Revue Française de Mécanique, 1968, no. 28, p. 15–23.
8. *Arie, A., Dumitriu, C.*, Buletinul ISPE, XX, 1977, nr. 1–4, p. 21–34.
9. *Wagner, H, Ramamurti, V, Sastry, R. V. R, Hartmann, G.*, Journal of Sound and Vibrations, 1973, 30 (2), p. 207–330.
10. *Tompkins, J. S., Merril, L. L,. Jones, B. L.*, AIEE Transactions on PAS, pt. II, 75, 1956, oct, p. 879–896.

Etude des vibrations de l'ensemble conducteur d'une ligne électrique aérienne-amortisseur á l'aide d'un modèle électro-mécanique

Les vibrations des conducteurs d'une ligne électrique aérienne produisent le vieillissement rapide et la cassure des conducteurs de celle-ci, ce qui a pour conséquence des graves perturbations dans le service des réseaux électriques.

Pour faciliter l'étude de l'efficacité d'un amortisseur de vibrations monté sur une ligne électrique les auteurs proposent un modèle mathématique de l'ensemble conducteur-amortisseur. Dans ce modèle—construit á la base de l'analogie électro-mécanique — l'amortisseur est assimilé à un filtre.

On présente l'installation de mesure des fréquences propres d'oscillation de l'amortisseur à l'aide de laquelle ont été mis en évidence les deux modes d'oscillation de celui-ci : translation et rotation.

C.Z.: 62–52: 681.3.04

CONSIDERENTE DE ÎMBUNĂTĂȚIRE A COMPORTĂRII TRANZITORII ÎN PROIECTAREA DIRECTĂ A SISTEMELOR AUTOMATE NUMERICE

S. CĂLIN, GH. PETRESCU, I. TĂBUȘ *

În lucrare sînt prezentate metodologii de îmbunătățire a comportării tranzitorii în cazul proiectării directe — în domeniul timp — a sistemelor automate numerice, îmbunătățirea referindu-se la asigurarea evoluției dorite a mărimii reglate și totodată la obținerea unui regim tranzitoriu cît mai bun al comenzii.

1. Efectele zerourilor din funcția de transfer a părții fixate asupra evoluției comenzii

În proiectarea sistemelor automate continue și discrete [1, 2] se consideră că partea fixată F conține toate elementele sistemului cu excepția regulatorului automat RA și a elementului de comparație, proiectarea avînd ca obiectiv obținerea structurii și parametrilor RA pentru asigurarea performanțelor impuse funcționării sistemului în buclă închisă.

Considerînd că funcția de transfer a blocului F are expresia

$$H_F(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{1}$$

— unde y_n este mărimea discretă reglată,
u_n — comanda,

$B(z^{-1})$, $A(z^{-1})$ — polinoame

— proiectarea directă în domeniul timp (prin impunerea răspunsului dorit y_{dn} la o treaptă discretă w_n și deci prin impunerea transformatei $Y_d(z^{-1})$ [2, 3, 4]) conduce la funcția de transfer a regulatorului

$$H_R(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{U(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{U(z^{-1})}{Y_d(z^{-1})} \cdot \frac{Y_d(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{1}{H_F(z^{-1})} \frac{Y_d(z^{-1})}{W(z^{-1}) - Y_d(z^{-1})} \tag{2}$$

Manuscris primit la data de 18 martie 1982

* Prof. dr. ing., Catedra Automatică II; Șef lucrări ing., Catedra Calculatoare; Ing. Fabrica de rulmenți Bîrlad.

avînd în vedere (1) și relația pentru eroarea ε_n:

$$\varepsilon_n = w_n - y_{dn} \tag{3}$$

Impunînd y_{dn} și deci polinomul $Y_d(z^{-1})$ sub forma

$$Y_d(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots + y_r z^{-r} + z^{-r-1} + z^{-r-2} + \ldots \tag{4}$$

— la pasul $r+1$ începînd regimul staționar, întrucît

$$y_{r+1} = y_{r+2} = \ldots = w_n = 1 \tag{5}$$

— rezultă

$$Y_d(z^{-1}) = \frac{y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1) z^{-2} + (y_3 - y_2) z^{-3} + \ldots + (1 - y_r) z^{-r-1}}{1 - z^{-1}} =$$

$$= \frac{R(z^{-1})}{1 - z^{-1}} \tag{6}$$

Deoarece

$$W(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{7}$$

și

$$Y_d(z^{-1}) = H_{od}(z^{-1}) \cdot W(z^{-1}) = \frac{H_{od}(z^{-1})}{1 - z^{-1}} \tag{8}$$

— unde $H_{od}(z^{-1})$ este funcția de transfer dorită a sistemului închis — rezultă

$$H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1}) \tag{9}$$

Înlocuind (1), (7), (8), (9) în (2) se obține

$$H_R(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \cdot \frac{H_{od}(z)}{1 - H_{od}(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \cdot \frac{R(z^{-1})}{1 - R(z^{-1})} \tag{10}$$

Dacă $H_F(z^{-1})$ are zerouri în semicercul stîng al cercului de rază unitară din planul z — deci $B(z^{-1})$ are rădăcini în acest semicerc — atunci din (10) rezultă (în ipoteza că $R(z^{-1})$ nu conține polinomul $B(z^{-1})$ ca factor) că în $H_R(z^{-1})$ apar poli în semicercul menționat, ceea ce determină un caracter oscilant al comenzii u_n.

Acest caracter este ilustrat și de relația (1), din care rezultă

$$U(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \cdot Y_d(z^{-1}) \tag{11}$$

întrucît

$$Y(z^{-1}) = Y_d(z^{-1}) \tag{12}$$

Astfel, considerînd că $B(z^{-1})$ are o rădăcină reală în semicercul stîng, deci conține un factor de forma

$$(1 + az^{-1}) \tag{13}$$

— cu $0 < a < 1$
— din (11) rezultă că în $U(z^{-1})$ va interveni un termen de forma

$$\frac{1}{1 + az^{-1}} = 1 - az^{-1} + a^2z^{-2} - a^3z^{-3} + a^4z^{-4} - \dots \tag{14}$$

Relația (14) atestă faptul că în cadrul comenzii u_n componenta corespunzătoare termenului de mai sus va avea un caracter oscilant, acest caracter fiind cu atît mai pronunțat cu cît valoarea a este mai apropiată de unitate, întrucît în acest caz coeficienții din (14) se micșorează în ritm mai lent și deci crește numărul de perioade de eșantionare în care comanda u_n oscilează cu amplitudini importante.

2. Dezavantajele caracterului oscilant al comenzii

Evoluția pronunțat oscilantă a comenzii este dezavantajoasă din mai multe puncte de vedere. Astfel, din punct de vedere al elementului de execuție — care primește comanda — schimbarea semnului comenzii la fiecare tact poate determina solicitări suplimentare pentru acest element.

Din punct de vedere al regimului tranzitoriu al sistemului automat este de dorit să se asigure un anumit timp finit impus și pentru comanda u_n, nu numai pentru mărimea reglată y_n, întrucît în caz contrar s-ar pierde în parte avantajele asigurării evoluției dorite y_{dn}. Dacă u_n continuă să oscileze după momentul $r+1$ impus pentru atingerea valorilor din (5), atunci mărimea reglată va continua să oscileze între momentele de eșantionare, avînd valorile din (5) numai în momentele respective.

O asemenea situație este ilustrată în figura 1, a pentru sistemul proiectat în cazul unui bloc F cu funcția de transfer continuă

$$H_F(s) = \frac{1}{(5s + 1)(2{,}5s + 1)} \tag{15}$$

și cu funcția de transfer discretă (obținută după includerea elementului de reținere)

$$H_F(z^{-1}) = \frac{0{,}033\, z^{-1} + 0{,}026\, z^{-2}}{1 - 1{,}49\, z^{-1} + 0{,}56\, z^{-2}} \tag{16}$$

conţinînd un zero în semicercul stîng; s-a adoptat perioada de eşantionare $T = 1s$, iar prin y_{dn} s-a impus $r=5$, deci încheierea regimului tranzitoriu în 5 paşi pentru mărimea discretă y_{dn}.

Din figurile 1, a şi 1, b (aceasta reprezentînd la o scară mărită porţiunea iniţială din fig. 1, a), rezultă că datorită oscilaţiei comenzii u_n (pen-

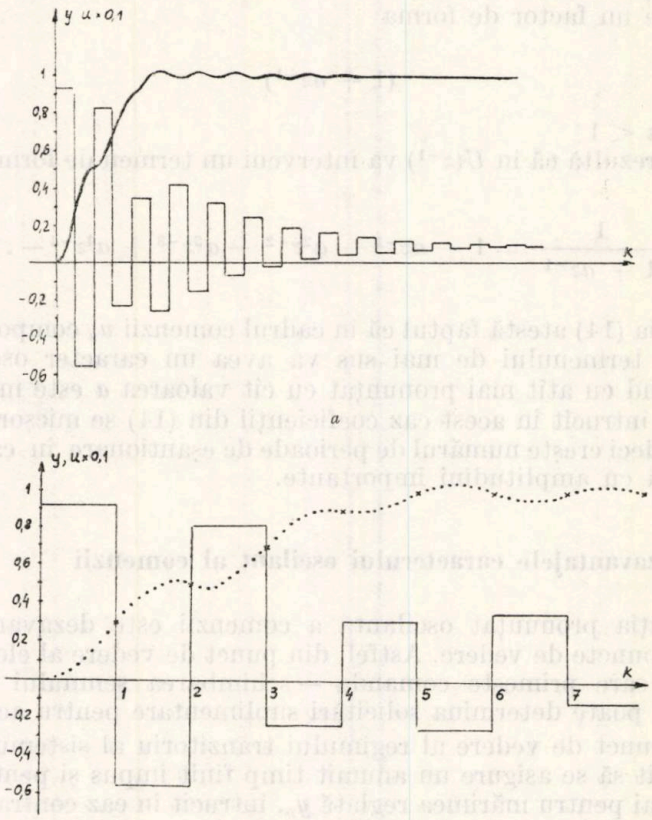


Fig. 1

tru $n > 5$), mărimea reglată continuă să oscileze între momentele de eşantionare, în momentele respective luînd valorile impuse.

Acelaşi efect este pus în evidenţă şi în figura 3, a, care corespunde unui sistem autoacordabil, descris la punctul 4.

Pentru eliminarea efectelor nefavorabile ale zerourilor din $H_F(s)$ este indicată luarea unor măsuri adecvate în stadiul de proiectare a sistemului.

3. Posibilităţi de compensare a efectelor zerourilor

Metoda proiectării directe în domeniul timp oferă bune posibilităţi pentru compensarea efectelor nedorite ale zerourilor. Aceste posibilităţi sînt ilustrate în continuare prin două metodologii de compensare a efectelor zerourilor.

Metodologia 1.

a). Se alege numărul r de pași care definesc durata regimului tranzitoriu, intrarea în regimul staționar avînd loc la pasul $r+1$ conform cu (4) și (5); ca urmare, din (6) și (9) rezultă pentru polinoamele $H_{od}(z^{-1})$ și $R(z^{-1})$ o expresie de forma

$$H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots h_{r+1} z^{-(r+1)} \tag{17}$$

sau, notînd

$$r + 1 = N \tag{18}$$

se obține

$$H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_N z^{-N} \tag{19}$$

relațiile între coeficienții h_k și coeficienții y_k (ai răspunsului impus) rezultînd din (4) și (6).

b) In (1) se pun în evidență polinoamele aferente zerourilor din semicercul stîng și din semicercul drept, scriind

$$H_F(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{B_1(z^{-1}) \cdot B_2(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{20}$$

unde $B_1(z^{-1})$ este polinomul aferent zerourilor din semicercul stîng (sau, mai general, zerourilor din semiplanul stîng);

$B_2(z^{-1})$ — polinomul aferent zerourilor din semicercul (semiplanul) drept;

$$B(z^{-1}) = B_1(z^{-1})\, B_2(z^{-1}); \tag{21}$$

polinomul $B_1(z^{-1})$ este deci cunoscut din datele inițiale ale proiectării, avînd forma

$$B_1(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m} \tag{22}$$

c) Din (10) și (22) se obține

$$H_R(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B_1(z^{-1}) \cdot B_2(z^{-1})} \cdot \frac{R(z^{-1})}{1 - R(z^{-1})} \tag{23}$$

și se constată că pentru ca polinomul $B_1(z^{-1})$ să nu mai intervină la numitorul funcției de transfer $H_R(z^{-1})$ este necesar ca $R(z^{-1})$ să se dividă cu $B_1(z^{-1})$ deci să existe o relație de forma

$$H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1}) = B_1(z^{-1}) \cdot Q(z^{-1}) \tag{24}$$

Deoarece zerourile aferente polinomului $B_1(z^{-1})$ sînt în semicercul (semiplanul) stîng, coeficienții acestui polinom sînt pozitivi și ca urmare este indicat ca și coeficienții polinomului $Q(z^{-1})$ să fie pozitivi, întrucît astfel vor rezulta toți coeficienții pozitivi în $R(z^{-1})$, ceea ce — conform cu (6) și (4) — asigură un regim tranzitoriu aperiodic pentru răspunsul dorit y_{dn}.

Din (4) și (6) se mai constată că în $Y_d(z^{-1})$ și $R(z^{-1})$ primul termen este $y_1 z^{-1}$, deci nu apare un termen constant, întrucît un sistem automat în ansamblu nu poate să ofere un răspuns nenul chiar în momentul aplicării semnalului de referință ; ca urmare, din (22) și (24) rezultă că primul termen din polinomul $Q(z^{-1})$ este tot un termen de forma $q_1 z^{-1}$.

d) Alegerea polinomului $Q(z^{-1})$ trebuie să țină seama de condiția de eroare staționară nulă (pentru semnal de referință treaptă) care poate fi exprimată prin relația necesară

$$H_{od}(1) = R(1) = 1 \tag{25}$$

din (24) și (25) rezultînd

$$Q(1) = \frac{H_{od}(1)}{B_1(1)} = \frac{1}{B_1(1)} \tag{26}$$

Pe de altă parte, gradul polinomului $Q(z^{-1})$ rezultă din (19), (22) și (24), acest polinom trebuind astfel să fie de forma

$$Q(z^{-1}) = q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_{N-m} z^{-(N-m)} \tag{27}$$

toți coeficienții fiind pozitivi și satisfăcînd relația (26).

Exemplu. Este dat

$$B_1(z^{-1}) = (1 + 0{,}9z^{-1})(1 + 2\,z^{-1}) = 1 + 2{,}9z^{-1} + 1{,}8\,z^{-2} \tag{28}$$

— deci $m = 2$ și

$$B_1(1) = 5{,}7 \tag{29}$$

— și se alege un răspuns în 5 pași respectiv

$$N = 5 \tag{30}$$

Conform condițiilor expuse anterior se poate alege

$$Q(z^{-1}) = \frac{1}{5{,}7 \cdot 3}(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = 0{,}0585(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) \tag{31}$$

și se obțin expresiile

$$H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1}) = B_1(z^{-1}) \cdot Q(z^{-1}) = 0{,}0585\,z^{-1} + \\ + 0{,}2281\,z^{-2} + 0{,}3333\,z^{-3} + 0{,}2748\,z^{-4} + 0{,}1053\,z^{-5} \tag{32}$$

și

$$Y_d(z^{-1}) = 0{,}0585z^{-1} + 0{,}2866\,z^{-2} + 0{,}6199z^{-3} +$$

$$+ 0{,}8947\,z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \ldots \tag{33}$$

Se verifică faptul că regimul tranzitoriu este aperiodic și se încheie în 5 pași ; relațiile între coeficienții b_k și y_k rezultă din (4) și (6).

Metodologia 2.

a) Se alege $Y_d(z^{-1})$ din care rezultă imediat — conform cu (6), (8) (9) — polinomul $H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1})$, care poate fi pus sub forma

$$H_{od}(z^{-1}) = R(z^{-1}) = h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \ldots + h_Nz^{-N} = z^{-1}P(z^{-1}) \tag{34}$$

și satisface condiția

$$H_{od}(1) = 1 \tag{35}$$

b) Considerînd

$$B_1(z^{-1}) = 1 + z_0z^{-1} \tag{36}$$

(deci cu un zero la $z = -z_0$) și notînd

$$z_\alpha = -z_0 \tag{37}$$

se obține forma

$$B_1(z^{-1}) = 1 - z_\alpha z^{-1} \tag{38}$$

și se alege un polinom $P'(z^{-1})$ definit de relația

$$P'(z^{-1}) = P(z^{-1}) - \frac{1}{1 - z_\alpha^{-1}} P(z_\alpha^{-1})(1 - z^{-1}) \tag{39}$$

care va înlocui polinomul $P(z^{-1})$ în (34).

Din (34), (35) și (39), se verifică relația

$$P'(1) = P(1) = 1 \tag{40}$$

și relația

$$P'(z_\alpha^{-1}) = 0 \tag{41}$$

care atestă faptul că polinomul $P(z^{-1})$ are rădăcina $z_\alpha = -z_0$

Notînd în (39)

$$\frac{1}{1 - z_\alpha^{-1}} \cdot P(z_\alpha^{-1}) = \beta \tag{42}$$

se obține

$$P'(z^{-1}) = P(z^{-1}) - \beta \cdot (1 - z^{-1}) \tag{43}$$

c) În (34) se înlocuiește $P(z^{-1})$ cu $P'(z^{-1})$ și se obține funcția de transfer modificată :

$$H'_{od}(z^{-1}) = z^{-1}P'(z^{-1}) = (h_1 - \beta)z^{-1} + (h_2 + \beta)z^{-2} +$$

$$+ h_3 z^{-3} + \ldots + h_N z^{-N} \tag{44}$$

— expresiile coeficienților $h_1 - \beta$ și $h_2 + \beta$ rezultînd din (43)
— și în mod corespunzător transformata răspunsului modificat

$$Y'_d(z^{-1}) = (y_1 - \beta)z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots + y_r z^{-r} + z^{-r-1} + z^{-r-2} + \ldots \tag{45}$$

constatîndu-se că se modifică numai valoarea răspunsului de la primul tact de eșantionare.

Metodologia 2 poate fi extinsă la cazul general al polinoamelor $B_1(z^{-1})$ cu mai multe rădăcini. Trebuie menționat faptul că această metodologie poate conduce la o valoare negativă a răspunsului la primul tact de eșantionare sau la o valoare mai mare decît cea de la tactul următor de eșantionare ; în asemenea cazuri este recomandabilă aplicarea metodologiei 1.

Exemplu. Blocul F are funcțiile de transfer (15) și (16), iar răspunsul impus inițial conduce la

$$Y_d(z^{-1}) = 0{,}3\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2} + 0{,}7\, z^{-3} + 0{,}9\, z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} \ldots \tag{46}$$

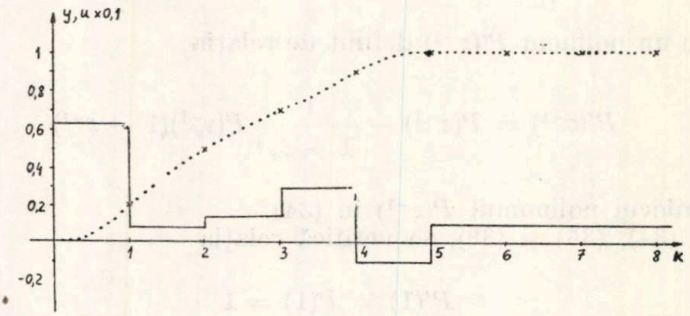


Fig. 2

ca în figurile 1, a și 1, b, în absența compensării efectelor zeroului.

Aplicînd metodologia 2 se obține

$$Y'_d(z^{-1}) = 0{,}204\, z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2} + 0{,}7\, z^{-3} + 0{,}9\, z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \ldots \tag{47}$$

însă comanda u_n și răspunsul continuu capătă aspectul din figura 2, sensibil îmbunătățit față de cel din figurile 1, a și 1, b.

4. Aplicarea metodei în cazul regulatoarelor autoacordabile

Metodologia 2 a fost aplicată în timp real la regulatoare autoacordabile [4]; rezultatele obținute sînt ilustrate în figurile 3, a și 3, b, proiectarea inițială a regulatorului fiind efectuată pentru o funcție de transfer estimată:

$$H_{Fe}(z^{-1}) = \frac{0{,}1\, z^{-1} + 0{,}05\, z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0{,}5\, z^{-2}} \tag{48}$$

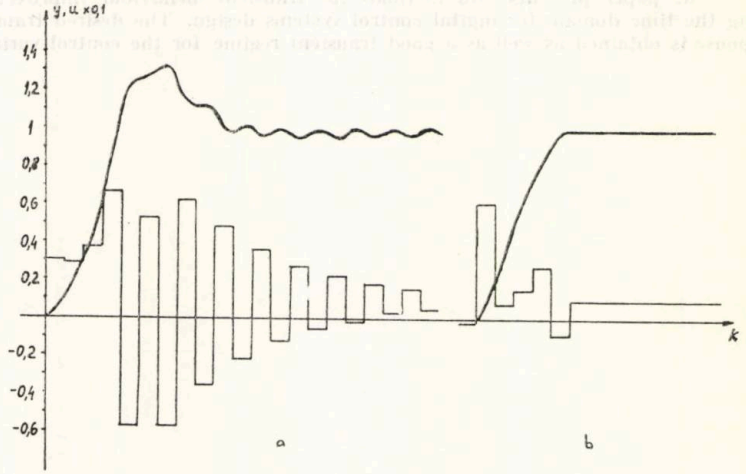


Fig. 3

în loc să se considere funcția reală (16).

În cadrul primului regim tranzitoriu (fig. 3, a) răspunsul și evoluția comenzii se deosebesc de cele dorite, dar datorită procesului de autoacordare în al doilea regim tranzitoriu (fig. 3, b) răspunsul și evoluția comenzii coincid practic cu cele dorite, din figura 2.

Concluzii

Metoda proiectării directe în domeniul timp oferă largi posibilități nu numai pentru optimizarea regimurilor tranzitorii și staționare ale mărimii reglate, ci și pentru optimizarea evoluției comenzii; are loc astfel o optimizare combinată, în care însăși obiectivele stabilite sînt optimizate.

În lucrare nu a fost tratată compensarea efectelor zerourilor din semicercul drept — polinomul $B_2(z^{-1})$ din (20) — deoarece o asemenea compensare ar necesita ca $R(z^{-1})$ — din (23) — să se dividă cu $B_2(z^{-1})$; ca urmare în $R(z^{-1})$ și $H_{od}(z^{-1})$ s-ar găsi rădăcini în semicercul drept, care ar determina modificarea polinomului $Y_d(z^{-1})$ astfel încît răspunsul y_{dn} nu ar mai avea o variație monotonă.

BIBLIOGRAFIE

1. *Călin, S.*, Regulatoare automate, E.D.P., Bucureşti, 1976.
2. *Călin, S.*, Buletinul I.P.B. tom XLIII, 1981, nr. 1, seria Electrotehnică.
3. *Călin, S., Petrescu, Gh.*, Buletinul I.P.B., tom XLIII, 1981, nr. 4, seria Electrotehnică.
4. *Călin, S., Petrescu, Gh., Tăbuş, I.*, Sistem de reglare numeric autoacordabil, „Al doilea simpozion naţional de teoria sistemelor" Craiova, 1982.

Transient Behaviour Improvement Using the Direct Method for Digital Control Systems Design

The paper presents two methods for transient behaviour improvement using the time domain for digital control systems design. The desired transient response is obtained as well as a good transient regime for the control variable.

C.Z.: 62—82./83

COMANDA DISCRETĂ A AMPLIFICATOARELOR ELECTROHIDRAULICE

I. CATANĂ *

În lucrare sînt prezentate unele probleme privind comanda în impulsuri modulate în durată a amplificatoarelor electrohidraulice. Sînt evidențiate caracteristicile de bază și performanțele acestor echipamente insistînd în mod deosebit asupra principiilor de realizare a echipamentelor electronice de comandă care funcționează pe baza convertoarelor tensiune-durată realizate cu circuite integrate.

1. Considerații preliminare

Comanda electronică a amplificatoarelor electrohidraulice s-a dezvoltat extrem de rapid în ultima perioadă de timp, fiind puternic influențată de dezvoltarea considerabilă a circuitelor integrate și mai recent de apariția microprocesoarelor [3].

Trecerea de la comanda continuă cu echipamente analogice la comanda discretă este însoțită de avantaje esențiale atît funcționale cît și constructive la nivelul elementelor componente și al sistemului în ansamblu.

După modul în care are loc prelucrarea discretă a semnalelor se deosebesc sisteme electrohidraulice cu eșantionare în care informația se prezintă sub forma unui tren de impulsuri modulate în amplitudine sau durată și sisteme numerice în care semnalele prelucrate într-unul sau mai multe blocuri funcționale sînt exprimate într-un cod numeric adecvat.

Dintre sistemele cu acțiune discretă o utilizare largă au primit-o cele cu impulsuri modulate în durată [2]. Funcționarea amplificatoarelor electrohidraulice în regim de impulsuri asigură o liniaritate foarte bună a caracteristicii statice în jurul punctului de zero, performanțe dinamice superioare, comportare satisfăcătoare în medii cu temperaturi înalte sau vibrații.

Influența forțelor hidrodinamice și a frecării uscate asupra sertarului sînt diminuate considerabil fiind eliminate complet posibilitatea înfundării

Manuscris primit la data de 6 noiembrie 1981

* Șef lucrări dr. ing., Catedra Automatică I

ajutajelor preamplificatorului din cauza fluidelor contaminate sau insuficient filtrate precum și fenomenele care apar în uleiurile minerale la temperaturi mai mari de 200°C.

2. Structura amplificatorului electrohidraulic cu comandă discretă

Amplificatorul electrohidraulic comandat în impulsuri modulate în durată diferă de cele cu acțiune continuă prin lipsa resoartelor de centrare a sertarului sau a reacției de poziție de la sertar la paleta preamplificatorului, figura 1.

Convertorul electromecanic este prevăzut în acest caz cu două bobine B_1 și B_2 în care se trimite un semnal de comandă sub forma unui tren de impulsuri modulate în durată.

Modulatorul de impulsuri din subsistemul de comandă este alcătuit dintr-un comparator care elaborează semnalul de eroare și un amplificator

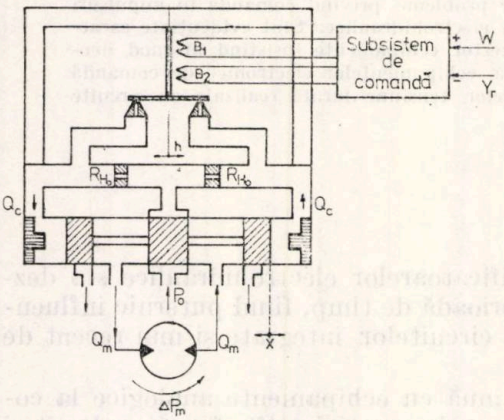


Fig. 1

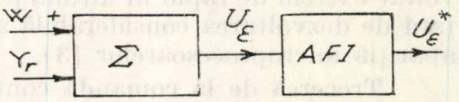


Fig. 2

formator de impulsuri la ieșirea căruia se obțin impulsurile modulate în durată, figura 2.

După principiul de funcționare al formatorului de impulsuri acestea sînt realizate în două variante așa cum se arată în figura 3.

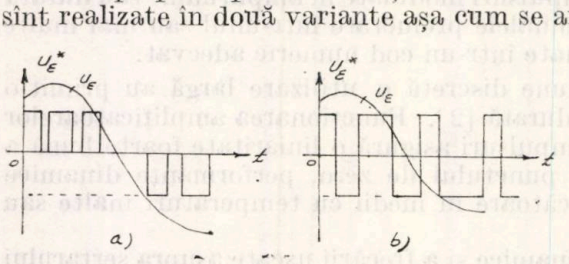


Fig. 3

În primul caz (fig. 3, a) în lipsa semnalului de eroare semnalul discret de la ieșirea formatorului de impulsuri este zero, în timp ce în cazul al doilea (fig. 3, b) semnalul de ieșire este format din impulsuri dreptunghiulare pozitive și negative de amplitudine constantă și durată egală. În prezența semnalului de eroare $U_\varepsilon(t)$ valoarea medie a semnalului de ieșire $U_\varepsilon^*(t)$ este proporțională în ambele cazuri, cu valoarea semnalului de eroare.

3. Structura sistemelor electrohidraulice discrete de reglare a poziției

Pe baza celor menționate anterior rezultă, pentrusi stemele electrohidraulice discrete schema de elemente din figura 4.

Elementul de extrapolare din cadrul acestor sisteme poate fi repre-

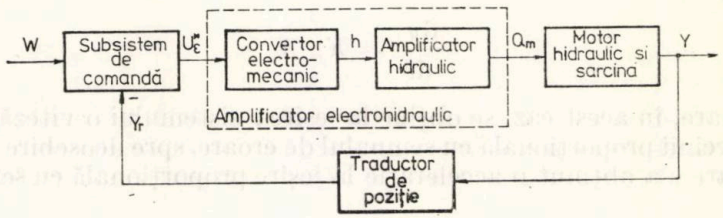


Fig. 4

zentat atît de convertorul electromecanic, cît și de amplificatorul cu sertar [1].

În primul caz se obține o deplasare a paletei în fața ajutajelor proporțională cu semnalul de eroare :

$$h = K \frac{1}{nT} \int_0^{nT} U_\varepsilon^* \mathrm{d}t = K_1 U_\varepsilon \tag{1}$$

Debitul de comandă al sertarului de putere va fi :

$$Q_c = K_{Q_0}^I h = A_c \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Rezultă deci ecuația liniarizată de funcționare a amplificatorului electrohidraulic sub forma :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K_A U_\varepsilon \tag{3}$$

unde :

$$K_A = \frac{K_{Q_0}^I}{A_c} K_1 \tag{4}$$

reprezintă factorul total de amplificare.

Dacă avem în vedere că motorul hidraulic este un element integral rezultă că pe calea directă a sistemelor de poziționare care folosesc aceste amplificatoare se găsesc doi poli în origine în funcția de transfer, fapt care asigură performanțe îmbunătățite la intrare rampă unitară.

În cazul în care elementul de exptraolare este reprezentat de amplificatorul cu sertar, rezultă pentru deplasarea sertarului o valoare proporțională cu semnalul de eroare :

$$X = K \frac{1}{nT} \int_0^{nT} U_\varepsilon^* \, \mathrm{d}t = K_2 U_\varepsilon \tag{5}$$

Debitul la motorul hidraulic, reprezentînd mărimea de ieșire din amplificator, este dat de relația:

$$Q_m = K_{Q_0}^{II} X = A_m \frac{dy}{dt} \tag{6}$$

Rezultă:

$$\frac{dy}{dt} = K_m X \tag{7}$$

Prin urmare, în acest caz, se obține la ieșirea sistemului o viteză de acționare a sarcinii proporțională cu semnalul de eroare, spre deosebire de primul caz, în care s-a obținut o accelerație la ieșire proporțională cu semnalul de eroare.

Se constată deci că pot fi realizate mai multe tipuri de sisteme hidraulice cu impulsuri modulate în durată, care se diferențiază după elementul de extrapolare.

Alegerea acestui element se face în funcție de scopul urmărit.

Se știe că funcționarea tranzistoarelor în regim de impulsuri în cadrul amplificatoarelor electronice de putere mărește stabilitatea caracteristicilor de lucru și fiabilitatea amplificatoarelor. Dacă acesta este singurul scop se va folosi ca extrapolator convertorul electromecanic.

Extinderea regimului discret de funcționare asupra convertorului electromecanic și amplificatorului cu sertar prezintă o serie de avantaje economice și funcționale remarcabile alături de simplificarea constructivă și tehnologică a amplificatoarelor electrohidraulice utilizate.

4. Echipamente electronice pentru comanda discretă a amplificatoarelor electrohidraulice

Vom prezenta în continuare structura echipamentelor electronice de comandă discretă a amplificatoarelor hidraulice în regim de impulsuri modulate în durată. Formatorul de impulsuri cel mai utilizat funcționează după principiul prezentat în figura 3-b. Pentru obținerea acestei caracteristici de funcționare se utilizează convertoare tensiune-durată.

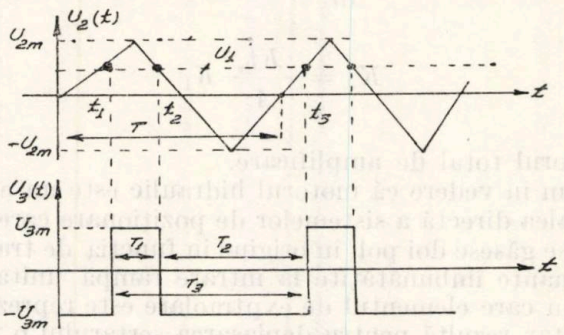


Fig. 5

Funcționarea convertorului tensiune-durată de impuls se bazează pe compararea tensiunii ce trebuie modulată cu un tren de impulsuri triunghiulare de amplitudine și frecvență constante, așa cum se prezintă în figura 5.

Tensiunea $U_2(t)$ are o variație triunghiulară, periodică, avînd perioada T și amplitudinea U_{2m}. Forma analitică a acestei tensiuni este dată de relația:

$$U_2(t) = 4U_{2m}\frac{t}{T}, \qquad \text{pentru } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \tag{8}$$

$$U_2(t) = 2U_{2m}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right), \quad \text{pentru } t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \tag{9}$$

$$U_2(t) = 4U_{2m}\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \text{pentru } t \in \left[\frac{3T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \tag{10}$$

și așa mai departe.

Folosind aceste relații se pot determina pe baza diagramelor din figura 5 momentele de timp în care are loc comutarea circuitului:

$$t_1 = \frac{T}{4U_{2m}}U_1 \tag{11}$$

$$t_2 = \frac{T}{4U_{2m}}(2U_{2m} - U_1) \tag{12}$$

De aici rezultă:

$$T_1 = t_2 - t_1 = \frac{T}{2U_{2m}}(U_{2m} - U_1) \tag{13}$$

și:

$$T_2 = T - T_1 = \frac{T}{2U_{2m}}(U_{2m} + U_1) \tag{14}$$

Se remarcă deci că pentru $U_1 = 0$ avem:

$$T_1 = T_2 = \frac{T}{2} \tag{15}$$

Prin urmare, valoarea medie a tensiunii de ieșire din convertor $U_3(t)$ este determinată de valoarea și polaritatea semnalului de intrare $U_1(t)$.

Pentru realizarea generatorului de tensiune triunghiulară al formatorului de impulsuri se folosește schema din figura 6.

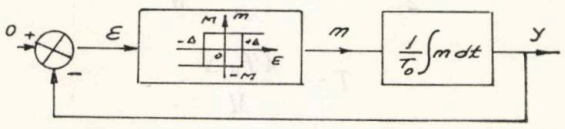


Fig. 6

Considerăm că în condiția inițială $t = 0$ avem $\varepsilon(0) = 0$ și $y(0) = 0$, iar releul este basculat la $m = M$. De aici rezultă:

$$y(t) = \frac{1}{T^0}\int_0^t M\,\mathrm{d}t = \frac{M}{T_0}\,t \tag{16}$$

iar:

$$\varepsilon(t) = -\,y(t) = -\,\frac{M}{T_0}\,t \tag{17}$$

La momentul t_1 considerăm $\varepsilon(t_1) = -\Delta$, de unde rezultă:

$$\frac{M}{T_0}\,t_1 = \Delta \quad \text{și} \quad t_1 = \frac{T_0\Delta}{M} \tag{18}$$

În acest moment releul comută, iar $m(t)$ devine $-M$. Ieșirea sistemului va fi:

$$y(t) = y(t_1) + \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^t (-M)\,\mathrm{d}t,$$

adică:

$$y(t) = 2M\,\frac{t_1}{T_0} - \frac{Mt}{T_0} \tag{19}$$

La momentul t_2 considerăm $\varepsilon(t_2) = \Delta$, adică:

$$\frac{Mt_2}{T_0} - 2M\,\frac{t_1}{T_0} = \Delta \tag{20}$$

Ținînd cont de relația (18) se obține:

$$t_2 = \frac{3\,T_0\,\Delta}{M} \tag{21}$$

Pe baza acestor relații se trasează diagrama de funcționare a circuitului ca în figura 7.

Perioada de oscilație a generatorului de tensiune triunghiulară rezultă direct din figura 7 și este dată de relația:

$$\frac{T}{2} = t_2 - t_1 = \frac{2\,T_0\,\Delta}{M} \tag{22}$$

Adică:

$$T = \frac{4\,T_0\,\Delta}{M} \tag{23}$$

Amplitudinea maximă a semnalului va fi:

$$y_{max} = \frac{M}{T_0} t_1 = \frac{M}{T_0} \cdot \frac{T_0 \Delta}{M} = \Delta \tag{24}$$

Pentru implementarea blocului sumator comparator se utilizează un circuit integrat de tipul CLB-2711, iar generatorul de impulsuri dreptunghiulare este prezentat în figura 8.

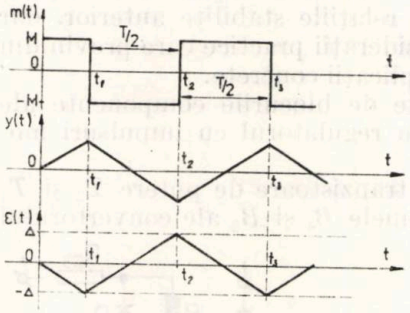


Fig. 7

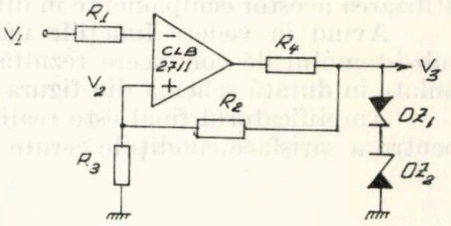


Fig. 8

Amplificatorul operațional prevăzut numai cu reacție pozitivă va funcționa saturat avînd tensiunea de ieșire $V_3^+ = V_3^-$, fixate prin diodele zener DZ_1 și DZ_2.

Cu ajutorul circuitului de reacție pozitivă (R_2, R_3) se fixează potențialul V_2 la valorile:

$$V_2^+ = \frac{R_3}{R_3 + R_2} V_3^+; \quad V_2^- = \frac{R_3}{R_3 + R_2} V_3^- \tag{25}$$

Comutarea circuitului are loc atunci cînd sînt îndeplinite condițiile $V_1 \geqslant V_2^+$ sau $V_1 \leqslant V_2^-$, așa cum rezultă din caracteristica de comutație reprezentată în figura 9.

Pentru lățimea zonei de histerezis rezultă valoarea:

$$\Delta = \frac{R_3}{R_3 + R_2} V_3^+ \tag{26}$$

Realizarea blocului integrator se face cu ajutorul amplificatoarelor operaționale liniare după o schemă clasică, ca în figura 10.

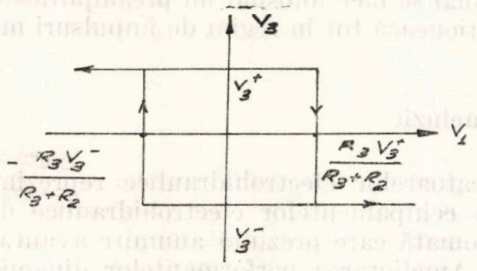


Fig. 9

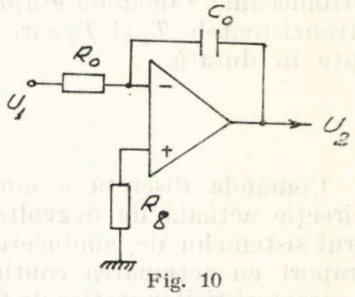


Fig. 10

Tensiunea de ieșire a integratorului este dată de relația:

$$U_2(t) = \frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t U_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{27}$$

De aici rezultă:

$$T_0 = R_0 C_0 \tag{28}$$

Proiectarea echipamentului electronic de comandă în impulsuri a amplificatoarelor electrohidraulice se bazează pe relațiile stabilite anterior, dar trebuie să se țină seama și de anumite considerații practice care provin din utilizarea acestor echipamente în diverse aplicații concrete.

Avînd în vedere funcțiile îndeplinite de blocurile componente ale subsistemului de conducere rezultă pentru regulatorul cu impulsuri modulate în durată schema din figura 11.

Amplificatorul final este realizat cu tranzistoare de putere T_3 și T_4 pentru a satisface condițiile cerute de bobinele B_1 și B_2 ale convertorului

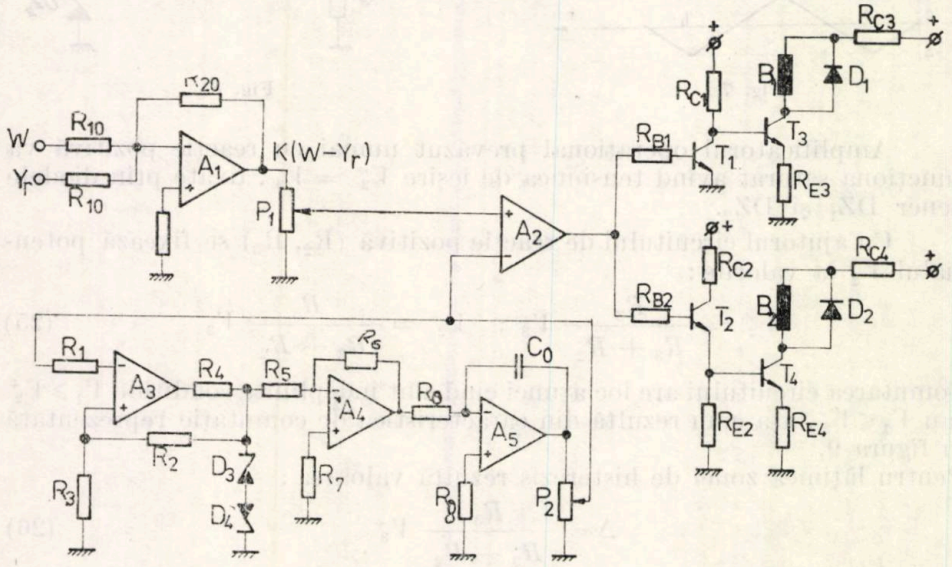


Fig. 11

electromecanic. Comanda etajului final se face folosind un preamplificator cu tranzistoarele T_1 și T_2 care funcționează tot în regim de impulsuri modulate în durată.

Concluzii

Comanda discretă a amplificatoarelor electrohidraulice reprezintă o direcție actuală de dezvoltare a echipamentelor electrohidraulice din cadrul sistemelor de conducere automată care prezintă anumite avantaje în raport cu acționarea continuă. Ameliorarea performanțelor dinamice și a caracteristicilor statice de funcționare se extinde atît la nivelul elemen-

telor electronice și hidraulice, cît și la nivelul întregului sistem reducînd în același timp efortul de cercetare și realizare tehnologică a unor elemente hidraulice care implică în mod obișnuit o tehnologie foarte pretențioasă. Se poate aprecia că această metodă de comandă valorifică în modul cel mai eficient elementele hidraulice caracterizate de limitările constructive inerente și neliniaritățile specifice.

Notații

$K_{Q_0}^{I}$ — factorul de amplificare în debit la preamplificatorul ajutaj paletă diferențial
$K_{Q_0}^{II}$ — factorul de amplificare în debit al sertarului
h — deplasarea paletei
X — deplasarea sertarului
p_0 — presiunea de alimentare
y — deplasarea sarcinii

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Florea, I. Cătană*, „Analiza și sinteza circuitelor hidraulice și electrohidraulice", I.P.B. 1981.
2. *B. A. Xoxlob*, „Electroghidravliceschie sledeascie sistemî" Mașinostroienie 1971.
3. *C. Bulucea, M. Vais, H. Profeta*, „Circuite integrate liniare" Ed. tehnică. 1975.

Pulse Control of Electrohydraulic Amplifiers

The paper presents some aspects concerning the time-modulated pulse-control of electrohydraulic amplifiers.

The basic characteristics of these components are outlined. Special attention is paid to the design principles concerning electronic control equipment based on voltage to pulse duration converters.

C. Z.: 681.32

O TEHNICĂ DE DEFINIRE A MODELELOR PENTRU MEMORIE

C. TĂNĂSESCU*

Lucrarea prezintă o tehnică de definire a modelelor pentru diferite tipuri de memorie, folosind limbajul teoriei automatelor, unde formalismul modelării și simulării este pus la punct. Aceasta constituie o primă etapă în incercarea de a defini modelul unui procesor care să interpreteze o clasă de limbaje de nivel înalt.

1. Introducere

Această lucrare este o parte a unui proiect care urmărește realizarea unui procesor care să interpreteze o clasă de limbaje de nivel înalt. Problema obținerii unui astfel de procesor afectează atît resurse hardware cît și software, spre deosebire de o problemă înrudită, aceea a „compilers compiler"-ului care a fost abordată numai prin angajarea resurselor software. În cazul limbajelor de nivel înalt noțiunea de procesor provine din abstractizări ale structurii calculatoarelor moderne și ale posibilităților de realizare a prelucrărilor de informații existente în limbajul respectiv (procesor FORTRAN, procesor BCPL, procesor ALGOL, etc.). În acest articol ne vom ocupa numai de partea de memorie a procesului.

Memoria este considerată ca fiind alcătuită din celule ordonate, accesibile prin nume sau adresa, în funcție de organizarea ei asociativă sau liniară. Celulele pot conține simboluri dintr-un alfabet M.

Definiția 1. Vom numi funcție de informație memorie orice aplicație g de la M* în sumbulțimi finite ale lui M*, care satisface condițiile :

$$g(\wedge) = \{\wedge\}$$

$\wedge \in g(m)$ dacă și numai dacă $m = \wedge$ ■

Definiția 2. Vom numi funcție de transformare memorie orice aplicație de la $M^* \times M^*$ în submulțimi finite ale lui M* supuse condițiilor :

$$f(m, \wedge) = \{m\}$$

$m' \in f(m, \tau)$ dacă și numai dacă m' apare simbol cu simbol în $m\tau$. ■

Manuscris primit la data de 13 mai 1980

* Ing., Oficiul de calcul al Institutului de Reactori nucleari energetici

Funcţiile f şi g realizează o descriere a lucrului cu memoria. Pentru fiecare tip de memorie se poate obţine o pereche bine definită (f, g). În cazul general însă un procesor este înzestrat cu mai multe tipuri de memorie (de exemplu o memorie stiva, o memorie liniară, o memorie pe disc, etc.). Dacă numărul tipurilor de memorie este n atunci se pot defini două funcţii F şi G astfel :

$$F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

$$G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

unde (f_i, g_i) caracterizează lucrul cu memoria de tip i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

Definiţia 3. Un automat secvential este un sextuplu $S = (X, Q, Y, \delta, \lambda; T)$ unde X este mulţimea finită a intrărilor, Q este mulţimea finită a stărilor, Y este mulţimea ieşirilor, $\delta : Q \times X \to Q$ este funcţia de transfer a stărilor, $\lambda : Q \to Y$ este funcţia de ieşire.

Automatul produce T ieşiri determinate de stare şi se spune că S execută T cicli. Automatul poate avea mai multe linii de intrare şi ieşire şi deci mulţimile X şi Y sînt mulţimi de stări ce pot exista pe liniile respective. Mai precis, X este o mulţime de instrucţiuni de la controlul finit (abstractizare a unităţii centrale a calculatorului real) la memorie, Y este mulţimea informaţiilor din memorie, selectate de funcţia de informaţie g către controlul finit. În continuare vom defini cîteva tipuri de memorie. Presupunem că memoria are o capacitate de $C = 2^k$ cuvinte, iar alfabetul de bază este $M_2 = \{0, 1\}$, ca $p \in (M_2)^k$ sînt reprezentările diadice ale întregilor $p = \{0, 1, \ldots, C-1\}$, iar $\hat{p} \in (M_2)^C$ sînt reprezentările poziţionale ale lui p, i.e. al $(p + 1)$-lea component al lui $\hat{p}$ este 1, restul fiind 0.

2. Model pentru memoria cu acces aleator

Memoria cu acces aleator este un automat secvenţial $S = (X_a, Q_a, Y_a, \delta_a, \lambda_a; T_a)$ unde T_a este arbitrar, iar Q_a este mulţimea de $(C+1)$-tuple $(m_0, \ldots, m_{C-1}, m_C)$, $m_j \in (M_2)^b$, unde $m_0, \ldots, m_{C-1}$ sînt cuvinte de memorie de cîte b biţi, m_C este cuvîntul de ieşire.

X_a este mulţimea tripletelor (s, a, m), $s \in (M_2)^2$, $a \in \{0,1,\ldots, C-1\}$ şi $m \in (M_2)^b$. Dacă $s = 00$ atunci starea internă rămîne neschimbată. Dacă $s = 01$, cuvîntul de la adresa a este „citit", adică selectat în cuvîntul de ieşire m_C. Dacă $s = 11$, cuvîntul de la adresa a ia valoarea m, valoare ce apare şi în cuvîntul de ieşire m_C.

Y_a este mulţimea $(M_2)^b$, adică mulţimea cuvintelor de ieşire.

δ_a se defineşte pe $Q_a \times X_a$ cu valori în Q_a astfel :

$$\delta_a(m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}, m_C; s, a, m) = \begin{cases} (m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}, m_C) & \text{dacă } s = 00 \\ (m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}, m'_C) & \text{dacă } s = 01 \\ (m'_0, m'_1, \ldots, m'_{C-1}, m'_C) & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

unde $m'_C = m_a$ si $m'_j = m_j$ $(0 \leqslant j \leqslant C-1)$ cu excepţia lui $j = a$, în care caz $m'_j = m$. De asemenea, putem defini λ_a pe Q_a cu valori în Y_a astfel :

$$\lambda_a(m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}, m_C) = m_C$$

Se observă că la orice cuvînt memorat putem avea acces în orice ciclu. Starea este caracterizată de conținutul memoriei plus cuvîntul de ieșire. O intrare în acest automat secvențial este de fapt o instrucțiune trimisă memoriei de controlul finit. Funcția de transformare memorie se obține din δ_a, iar funcția de informație memorie din λ_a. Astfel putem defini funcția de informație memorie :

$$g(m) = m_C$$

unde $m = m_0 m_1 \ldots m_{C-1} m_C$, $m \in (M_2)^{(C+1)b} \subseteq (M_2)^*$, iar funcția de transformare memorie :

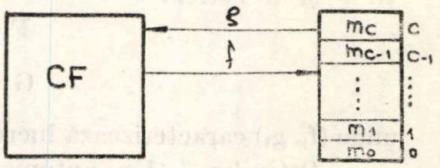


Fig. 1. Model pentru memoria cu acces aleator

$$f(m, \tau) = m'$$

unde $m = m_0 m_1 \ldots m_{C-1} m_C$, $m \in (M_2)^{(C+1)b}$, $\tau = saw$, $\tau \in (M_2)^{2+k+b}$ ($s \in (M_2)^2$, $a \in (M_2)^k$, $w \in (M_2)^b$), iar m' se obține în modul următor :

$$m' = \begin{cases} m_0 m_1 \ldots m_{C-1} m_C & \text{dacă } s = 00 \\ m_0 m_1 \ldots m_{C-1} m'_C & \text{dacă } s = 01 \\ m'_0 m'_1 \ldots m'_{C-1} m'_C & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

unde m'_i ($0 \leqslant i \leqslant C$) au aceeași semnificație ca mai sus.

3. Model pentru memoria bandă

Memoria bandă este un automat secvențial $S_b = (X_b Q_b, Y_b, \delta_b, \lambda_b; T_b)$ unde T_b este aleator, Q_b este mulțimea de $(C+2)$-tuple $(m_0, m_1, \ldots m_C, \hat{p})$, $m_j \in (M_2)^b$ ($0 \leqslant j \leqslant C$), unde $m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}$ sînt cuvinte de memorie, m_C este cuvîntul de ieșire și $p \in \{0, 1, \ldots, C-1\}$ este poziția capului de citire-scriere. X_b este mulțimea tripletelor $(s, e+2, m)$ $s \in (M_2)^2$ este comanda de citire-scriere, $e \in \{-1, 0, 1\}$ (deci $e+2 \in (M_2)^2$) este comanda de deplasare a capului $m \in (M_2)^b$ este cuvîntul de intrare. Y_b este mulțimea de perechi $(v, \hat{p}')$ de cuvinte de ieșire, unde $v \in (M_2)^b$ și $p' \in \{0, 1, \ldots, C-1\}$ este noua poziție a capului.

δ_b se definește astfel pe $Q_b \times X_b$ cu valori în Q_b :

$$\delta_b(m_0, m_1, \ldots, m_C, \hat{p}; s, e+2, m) = \begin{cases} (m_0, \ldots, m_{C-1}, m_C, \hat{p}) & \text{dacă } s = 00 \\ (m_0, \ldots, m_{C-1}, m'_C, \hat{p}') & \text{dacă } s = 01 \\ (m'_0, \ldots, m'_{C-1}, m'_C, \hat{p}') & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

unde $m'_C = m$, și $m'_j = m_j$ ($0 \leqslant j \leqslant C-1$) cu excepția cazului $j = p'$ în care $m'_j = m$, iar p' se obține astfel :

$$p' = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p + e \leqslant 0 \\ C-1 & \text{dacă } p + e \geqslant C-1 \\ p+e & \text{dacă } 1 \leqslant p + e \leqslant C-2 \end{cases} \qquad (1)$$

λ_b se definește pe Q_b cu valori în Y_b astfel :

$$\lambda_b(m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}, m_C, \hat{p}) = (m_C, \hat{p})$$

Se constată că, dacă $s = 00$, starea curentă este lăsată neschimbată. Dacă $s = 01$ se modifică eventual poziția capului de citire-scriere cu cel mult o poziție la dreapta sau la stînga. Noua poziție indicată de cap este celula de memorie accesibilă la ieșire (adică poate fi citită). Dacă $s = 11$ se modifică eventual poziția capului de citire-scriere cu cel mult o poziție la dreapta sau la stînga. În această poziție se înscrie cuvîntul m, furnizat prin instrucțiune de controlul finit. Starea memoriei este caracterizată de conținutul ei, plus cuvîntul de ieșire și poziția capului de citire-scriere care punctează către celula de memorie accesibilă în momentul respectiv. O intrare în acest automat secvențial este de fapt o instrucțiune trimisă memoriei de controlul finit. Funcția de informație memorie se definește :

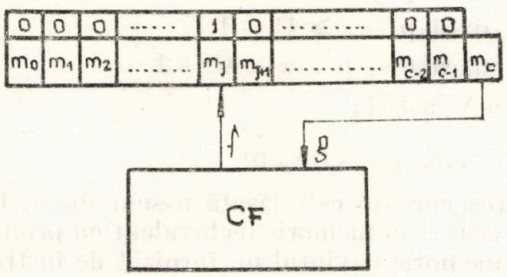


Fig 2. Model pentru memoria de tip bandă

$$g(m) = m_C \hat{p}$$

unde $m = m_0 m_1, \ldots, m_{C-1} m_C \hat{p}$, $m \in (M_2)^{(C+1)b+2} \subseteq (M_2)^*$,
iar funcția de transformare memorie :

$$f(m, \tau) = m'$$

unde $\tau = s, e + 2, m'', \tau \in (M_2)^{4+b}$, iar m' se obține astfel :

$$m' = \begin{cases} m_0 m_1, \ldots, m_{C-1}\, m_C \hat{p} & \text{dacă } s = 00 \\ m_0 m_1, \ldots, m_{C-1}\, m'_C \hat{p}' & \text{dacă } s = 01 \\ m'_0 m'_1, \ldots, m'_{C-1}\, m'_C \hat{p}' & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

unde $m'_C = m'_{p'}$, $m'_j = m_j$ $(0 \leqslant j \leqslant C - 1)$ cu excepția cazului $j = p'$ în care $m'_j = m''$, iar p' este furnizat de relația (1).

4. Model pentru memoria stivă

Memoria stivă este un automat $S_s = (X_s, Q_s, Y_s, \delta_s, \lambda_s; T_s)$ unde T_s este arbitrar. Q_s este mulțimea de $(C + 2)$-tuple $(m_0, m_1, \ldots, m_C, \hat{p})$, unde $m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}$ sînt cuvinte de memorie $(m_j \in (M_2)^b$ și $p \in \{0, 1, \ldots, C - 1\}$ este poziția capului de citire. X_s este mulțimea dubletelor $(s + 2, m)$, unde $s \in \{-1, 0, 1\}$ este comanda de citire-scriere, $m \in (M_2)^b$ este cuvîntul de intrare. Y_s este mulțimea de perechi $(v, \hat{p}')$ de cuvinte de ieșire $v \in (M_2)^b$ și noua poziție a capului $p'(p' \in \{0, 1, \ldots, C - 1\})$.

δ_s se definește astfel pe $Q_s \times X_s$ cu valori în Q_s:

$$\delta_s(m_0, m_1, \ldots, m_C, \hat{p}; s+2, m) = \begin{cases} (m_0, \ldots, m_{C-1}, m_C, \hat{p}) & \text{dacă } s = 00 \\ (m_0, \ldots, m_{C-1}, m'_C \hat{p}') & \text{dacă } s = 01 \\ (m'_0, \ldots, m'_{C-1}, m'_C \hat{p}') & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

unde $m'_C = m$, iar p' se obține:

$$p' = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p + s \leqslant 0 \\ C-1 & \text{dacă } p + s \geqslant C - 1 \\ p+s & \text{dacă } 0 < p + s < C - 1 \end{cases} \qquad (2)$$

λ_s se definește pe Q_s cu valori în Y_s astfel;

$$\lambda_s(m_0, \ldots, m_C, \hat{p}) = (m_C, \hat{p})$$

Se constată că, dacă $s=0$, starea curentă este lăsată neschimbată. Dacă $s=-1$ se realizează operația de citire din memorie (echivalent cu primitiva *pop*). Dacă $s = 1$ se înscrie în memorie cuvîntul m, furnizat de instrucțiunea primită de la controlul finit și se incrementează pointerul (echivalent cu primitiva *push*). O intrare în acest automat este de fapt o instrucțiune trimisă de controlul finit.

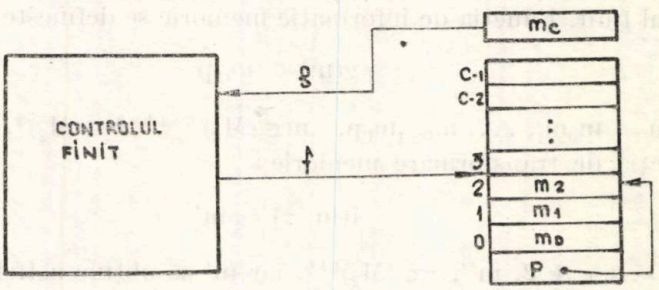


Fig. 3. Model pentru memoria de tip stivă

Se poate defini funcția de informație memorie:

$$g(m) = m_C \hat{p}$$

unde $m = m_0 m_1, \ldots, m_{C-1} m_C \hat{p}$, $m \in (M_2)^{(C+1)b+C}$, precum și funcția de transformare memorie:

$$f(m, \tau) = m'$$

unde $m = m_0 m_1, \ldots, m_{C-1} m_C \hat{p}$, $\tau = s+2m''$ ($\tau \in (M_2)^{2+b}$), iar m' se obține astfel:

$$m' = \begin{cases} m_0 m_1, \ldots, m_{C-1} m_C \hat{p} & \text{dacă } s = 0 \\ m_0 m_1, \ldots, m_{C-1} m'_C \hat{p}' & \text{dacă } s = -1 \\ m'_0 m'_1, \ldots, m'_{C-1} m'_C \hat{p}' & \text{dacă } s = 1 \end{cases}$$

unde $m'_C = m_{p'}$, $m'_j = m_j$ $(0 \leqslant j \leqslant C-1)$ cu excepția lui $m'_{p'} = m$, iar p' este furnizat de relația (2).

5. Model pentru memoria tambur

Memoria de tip tambur este un automat $S_t = (X_t, Q_t, Y_t, \delta_t, \lambda_t; T_t)$ unde T_u este arbitrar. Q_t este mulțimea de $(C + 2)$-tuple $(m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}, \beta', \hat{p})$, $m_j \in (M_2)^b$, $m_0, \ldots, m_{C-1}$ cuvinte de memorie, $\beta' \in M_2$ este bitul de ieșire, $p \in \{0, 1, \ldots, C-1\}$ este poziția capetelor de citire-scriere, în număr de b (cîte un cap pentru fiecare bit).

X_t este mulțimea tripletelor (s, h, β) alcătuite din comanda de citire-scriere $s \in (M_2)^2$, adresa capului în cadrul cuvîntului $h \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ cu $b = 2^{b'}$ și bitul de intrare $\beta \in M_2$.

Y_t este mulțimea perechilor $(\beta', \hat{p})$, $\beta' \in M_2$, $p \in \{0, 1, \ldots, C-1\}$. δ_t este definiția pe $Q_t \times X_t$ cu valori în Q_t astfel :

$$\delta_t(m_0, \ldots, m_{C-1}, \beta', \hat{p}\,; s, h, \beta) = \begin{cases} (m_{C-1}, m_0, \ldots, m_{C-2}\, m_{ph}, \hat{p}) & \text{dacă } s = 00 \\ (m_{C-1}, m_0, \ldots, m_{C-2}\, m_{p'h}, \hat{p}') & \text{dacă } s = 01 \\ (m'_0, m'_1, \ldots, m'_{C-1}, m_{p'h}, \hat{p}') & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

unde $p' = p + 1 (\text{mod } C)$, $m'_j = m_{j-1, (\text{mod } C)}$, în afara de cazul $j = p'$ cînd $m_{ji} = m_{j-1} (\text{mod } C)$, i $(0 \leqslant i \leqslant b-1)$ cu excepția lui $i = h$, iar pentru $j = h$, $m'_{jh} = \beta$ (m_{ji} este cel de-al i-lea bit al celui de-al j-lea cuvînt). λ_t este definită pe Q_t cu valori în Y_t astfel :

$$\lambda_t(m_0, \ldots, m_{C-1}, \beta', \hat{p}) = (\beta', \hat{p})$$

Tamburul avansează în fiecare ciclu cu un cuvînt și dispozitivul citește și scrie pe pista de sub cel de-al h-lea cap. Un cuvînt este deci accesibil în bT_t cicli.

Dacă $s = 00$ capetele rămîn pe aceeași poziție, în timp ce tamburul avansează cu un cuvînt. Citirea unui cuvînt se face bit cu bit, prin b instrucțiuni cu $s = 01$ și h egal pe rînd cu $0, 1, \ldots, b-1$. Scrierea unui cuvînt se face, de asemenea, bit cu bit prin b instrucțiuni cu $s = 11$ și h egal pe rînd cu $0, 1, \ldots, b-1$. Biții cuvîntului ce se înscrie în memorie sînt furnizați unul cîte unul prin cele b instrucțiuni. Starea memoriei se caracterizează prin conținutul memoriei, bitul de ieșire și poziția capetelor de citire-scriere, care punctează către celula de memorie accesibilă în momentul respectiv. O intrare în automat este de fapt o instrucțiune trimisă memoriei de controlul finit. Putem acum defini funcția de informație memorie :

$$g(m) = \beta' \hat{p}$$

unde $m = m_0 m_1, \ldots, m_{C-1}\, \beta' \hat{p}$, $m \in (M_2)^{Cb+C+1}$,
iar funcția de transformare memorie :

$$f(m, \tau) = m'$$

unde $m = m_0, m_1, \ldots, m_{C-1}\ \beta' \hat{p},\ \tau = sh\beta\ (\tau \in (M_2)^{3+b'})$, iar m' se obține astfel :

$$m' = \begin{cases} m_{C-1}\, m_0, \ldots, m_{C-2}\, m_{ph}\, \hat{p} & \text{dacă } s = 00 \\ m_{C-1}\, m_0, \ldots, m_{C-2}\, m_{p'h}\, \hat{p}' & \text{dacă } s = 01 \\ m'_0 m'_1, \ldots\ldots, m'_{C-1}\, m_{p'h}\, \hat{p}' & \text{dacă } s = 11 \end{cases}$$

m_{ph}, $m_{p'h}$, m'_j și p' au aceleași semnificații ca la definirea funcției δ_t.

Concluzii

Am arătat elementele ce trebuie luate în considerare în definirea modelelor pentru cîteva tipuri de memorie și a relațiilor funcționale cu controlul finit. Memoria cu acces aleator este un model adecvat pentru memoria centrală a unui calculator real. Memoriile bandă și tambur sînt abstractizări ale unităților de bandă magnetică și respectiv tambur magnetic. Acestă tehnică poate fi utilizată în definirea unui model viabil pentru procesor precum și a relațiilor de simulare între procesoare, într-o manieră similară teoriei automatelor.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. E. Savage*, Journal of ACM, vol 19, No 4 October, 1972.
2. *N. A. Aribib*, Theories of Abstract Automata, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, 1969.
3. *J. Petit, B. Lecusson*, RAIRO, No. B—1, February, 1977.

A Definition Technique for Storage Models

The paper suggests a technique to define models for different types of storage by means of automation theory, where simulation and models are well formulated. This is the first step in a widder temptation to define the model for a processor which could interpret a class of high-level languages.

c. 2674 I. P. Informația

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREŞTI ELECTROTEHNICĂ, ENERGETICĂ, AUTOMATICA — CALCULATOARE, ELECTRONICĂ

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“ şi «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ Bucureşti».

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREŞTI ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЁТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕТРОНИКА

Выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов ‘,Buţletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées”, „Buletinul Poltehnicei din Bucureşti”, „Buletinul Institutului poltehnic ”Gheorghe Gheorghiu-Dej” Bucureşti“.

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREŞTI ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL, COMPUTERS, ELECTRONICS

The Bulletin is issued quarterly, continuing the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“ and «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ Bucureşti».

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREŞTI ÉLECTROTECHNIQUE, ÉNERGÉTIQUE, AUTOMATIQUE, ÉLECTRONIQUE

parait tous les trois mois, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“ et «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ Bucureşti».

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

Adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREŞTI ROMÂNIA
Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)

1982 JUL 13

Lei 35

F 11302

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

SERIA: ELECTROTEHNICĂ, ENERGETICĂ, AUTOMATICĂ-CALCULATOARE, ELECTRONICĂ

TOMUL XLIV NUMĂRUL 3 ANUL 1982
IULIE—SEPTEMBRIE

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*

MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. docent ing. *Florea Oprea*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Prof. dr. ing. *Marin Rădoi*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent ing. *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București. Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper trough ILEXIM import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011236, Bucharest ROMANIA

Sumar

MATEMATICĂ

Tatiana Stănăşilă

Asupra funcţiilor aleatoare polinomiale 3

Elena Deciu

Relaţii de dualitate pentru operatorii de observabilitate şi controlabilitate pentru un sistem invariant în timp infinit-dimensional diferenţial liniar (l. engleză) 9

C. M. Bucur

Algoritm de clasificare şi regăsire a elementelor unei colecţii 16

I. Drăghicescu

Asupra unei familii de şiruri de numere reale şi cîteva proprietăţi ale sale (l. engleză) 25

FIZICĂ

I. M. Popescu, E. N. Ştefănescu, P. E. Sterian

Analiza bistabilităţii electrooptice în dispozitivele optice bistabile cu cavitate Fabry-Pérot 29

Gh. Lăzărescu, D. Iordache, Vl. Iancu, Liliana Popa, I. Pop, Viorica Tudoricu

Probleme fizice în proiectarea cablurilor criogenice. III. Evaluarea distribuţiei transversale a temperaturii în cabluri simetrice cilindrice pentru stări staţionare. (l. engleză) 36

A. Chattopadhyay, A. K. Pal

Propagarea undelor SH într-un mediu neomogen cu suprafaţă neregulată (l. engleză) 47

ELECTROTEHNICĂ

M. Maricaru, Th. Vascan, I. Albeanu, D. Rucinschi, M. Dumitrescu, V. Truşcă

Instalaţie de încercare la înaltă tensiune tip modul comandată electronic 57

M. Iordache, S. Chira

Program de determinare a arborelui normal comun (ANC) şi a matricelor incidentelor esenţiale (MIE) într-un circuit nereciproc 64

ELECTRONICĂ

D. Stanomir

Asupra transformării Fourier discrete (l. engleză) 72

P. Şchiopu, C. Puiu

Instalaţie pentru sudura ultrasonică. Tehnologie şi performanţe 79

ENERGETICĂ

M. Eremia, A. Diaconu

Zonarea sistemelor electroenergetice — etapă intermediară în studiul regimurilor dinamice 85

AUTOMATICĂ

I. Dumitrache, S. Dumitriu, F. Munteanu

Sinteza unui algoritm discret cu structură variabilă destinat conducerii acţionărilor cu tiristoare. (l. rusă) 92

P. Stoica

Asupra fracţiilor matriceale „pline" (l. engleză) 99

Summary

MATHEMATICS

Tatiana Stănăşilă

On Polynomial Random Functions 3

Elena Deciu

Duality Relations for Observability and Controllability Operators for a Linear Differential Infinite—Dimensional Time—Invariant System 9

C. M. Bucur

An Algorithm for Classification and Retrieval of the Elements of a Collection . . . 16

I. Drăghicescu

On a Family of Real Number Sequences and Some of Their Applications . . . 25

PHYSICS

I. M. Popescu, E. N. Ştefănescu, P. E. Sterian

Bistability Analysis in the Electrooptical Bistable Fabry-Pérot Devices 29

Gh. Lăzărescu, D. Iordache, Vl. Iancu, Liliana Popa, Viorica Tudoricu

Physical Problems in the Design of the Cryogenic Cables. III. The Evaluation of the Transversal Temperature Distribution in Steady States of Cylindrically Symmetric Cables 36

A. Chattopadhyay, A. K. Pal

Propagation of SH Waves in an Inhomogeneous Medium with Irregular Interface Lying over an Initially Stressed Half-Space 47

ELECTROTECHNICS

M. Maricaru, Th. Vascan, I. Albeanu, D. Rucinschi, M. Dumitrescu, V. Truşcă

Testing Installation on High Tension with Electronic Control 57

M. Iordache, S. Chira

Determination Program for the Common Normal Tree (CNT) and of Essential Incidence Matrices (EIM) in an Unreciprocal Electric Circuit 64

ELECTRONICS

D. Stanomir

On the Discrete Fourier Transform 72

P. Şchiopu, C. Puiu

Installation for Ultrasonic Welding. Technology and Performances 79

ENERGETICS

M. Eremia, A. Diaconu

Electric Power System Partitioning as an Intermediate Stage in States Calculation 85

AUTOMATIC CONTROL

I. Dumitrache, S. Dumitriu, Fl. Munteanu

Synthesis of a Discrete-time Structure Variable Control Algorithm of Thyristor Drives 92

P. Stoica

On Full Matrix Fraction Descriptions 99

C.Z.: 517.52

ASUPRA FUNCȚIILOR ALEATOARE POLINOMIALE

TATIANA STĂNĂȘILĂ *

În lucrare este dată o definiție a polinoamelor aleatoare în cadrul seriilor formale aleatoare de puteri. Rezultatul principal îl constituie o extindere probabilistică a unui rezultat de analiză clasică (o funcție de mai multe variabile care este polinom în fiecare variabilă, este polinom în ansamblul variabilelor).

Introducere

Dintre funcțiile elementare, polinoamele au rolul teoretic și practic cel mai important și există multe probleme concrete legate de polinoame (determinarea soluțiilor unor ecuații algebrice, condiții ca soluțiile să fie situate în anumite regiuni, localizarea valorilor proprii ale unor matrici, probleme de interpolare, aproximare etc.). În natură, deci și în matematică apar în mod firesc polinoame algebrice sau polinoame trigonometrice cu coeficienți aleatori — coeficienți calculați cu anumite erori, polinoame caracteristice ale unor matrici cu coeficienți aleatori, sisteme de ecuații diferențiale liniare stochastice etc.

În această lucrare dăm o definiție a polinoamelor aleatoare în contextul seriilor formale aleatoare de puteri și dăm o extindere probabilistică a unui rezultat cunoscut din analiza clasică.

§ 1. Funcții aleatoare și polinoame aleatoare

Fie (Ω, K, Pr) un cîmp de probabilitate complet. Mulțimea $L^1(\Omega)$ a variabilelor aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$ integrabile, are o structură de spațiu vectorial complex și punînd $(\forall)\ \xi, \eta \in L^1(\Omega)$,

$$d(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \frac{|\xi(\omega) - \eta(\omega)|}{1 + |\xi(\omega) - \eta(\omega)|} Pr(d\omega)$$

Manuscris primit la data de 18 martie 1982
* Lector dr., Catedra Matematici I

se obţine o semidistanţă pe $L^1(\Omega)$. Identificînd orice două variabile aleatoare care coincid a.p. se obţine o structură de spaţiu metric. Notînd $\|\xi\| = d(\xi, 0)$ se obţine o seminormă pe $L^1(\Omega)$ şi convergenţa în această seminormă este chiar convergenţa în probabilitate şi teorema lui Sluţky arată că $L^1(\Omega)$ are o structură de F-spaţiu [3].

Dacă X este o mulţime oarecare, se numeşte funcţie aleatoare pe X orice aplicaţie $X \to L^1(\Omega)$. Fie $Al(X)$ mulţimea tuturor funcţiilor aleatoare pe X şi fixăm $f \in Al(X)$.

Atunci pentru orice $x \in X$, $\omega \in \Omega$ se poate defini numărul complex $f(x)(\omega)$ notat $f(x, \omega)$; dacă $x \in X$ este fixat, funcţia $\omega \to f(x, \omega)$ aparţine lui $L^1(\Omega)$ şi colecţia $\{f(x, .)\}_{x \in X}$ defineşte un proces aleator indexat după elementele lui X.

Fie f_n, $f \in Al(X)$, $n \geqslant 0$; reamintim că şirul $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniform în probabilitate către f dacă $\forall\, x \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} d(f_n(x, .), f(x, .)) = 0$. Şirul $(f_n)_{n \geqslant 0}$ se numeşte uniform Cauchy în probabilitate dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0\ \exists\ N(\xi, \eta)$ natural astfel încît $\forall\, m, n \geqslant N(\xi, \eta)$ şi $\forall\, x \in X$, $\Pr\{|f_m(x, \omega) - f_n(x, \omega)| \geqslant \varepsilon\} < \eta$. Semidistanţa d introdusă anterior induce o quasimetrică pe mulţimea $Al(X)$ punînd $\forall f, g \in Al(X)$, $\delta(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x, .), g(x, .)) \leqslant \infty$.

Convergenţa uniformă (respectiv condiţia de uniformitate Cauchy) în probabilitate sînt atunci echivalente şi se pot exprima în termeni de δ. Identificînd orice două funcţii aleatoare f, g pentru care $\delta(f, g) = 0$ mulţimea $Al(X)$ are o structură de F-spaţiu.

În cazul $X = \mathbb{C}^n$ numim o funcţie $f(z, \omega)$, $f: \mathbb{C}^n \times \Omega \to C$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ parţial uniform continuă în probabilitate dacă $\forall\, z \in \mathbb{C}^n$ fixat, $f(z, .)$ este o variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$ (deci $f \in Al(\mathbb{C}^n)$) şi dacă $\forall\, i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, notînd $z' = (z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ este satisfăcută condiţia următoare: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $\Pr\{|f(z', z_i, \omega) - f(z'', z_i, \omega)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon$, ori de cîte ori punctele z', z'' sînt la distanţa euclidiană (în $\mathbb{C}^{n-1}$) cel mult $\delta(\varepsilon)$.

Rezultatul principal al lucrării se referă la această clasă de funcţii.

Un caz particular important de funcţii aleatoare îl constituie polinoamele aleatoare (cu coeficienţi mai generali decît cei luaţi în $L^1(\Omega)$).

Definiţie. Pentru orice $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ din $\mathbb{N}^n$ notăm ca de obicei $p + q = (p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$ şi $|p| = p_1 + \ldots + p_n$. Numim serie formală aleatoare în n nedeterminate $X_1, \ldots, X_n$ orice şir n-uplu de variabile aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$, $\{a_m(\omega)\}_m$, unde $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$. Mulţimea acestora are o structură naturală de C-algebră. În loc de $S(\omega) = \{a_m(\omega)\}$ se scrie ca de obicei $S(\omega) = \sum\limits_{m \in Nn} a_m(\omega) X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$; pentru orice $k \geqslant 0$ notăm $A_k = \{\omega \in \Omega / a_m(\omega) = 0$ pentru $|m| = k\}$ şi $p_k = Pr\ A_k$.

Seria $S(\omega)$ se numeşte polinom aleator în nedeterminatele $X_1, \ldots, X_n$ dacă $Pr\ \Omega^* = 1$ unde $\Omega^* = \{\omega \in \Omega / a_m(\omega) = 0$ pentru toţi $m \in \mathbb{N}^n$ cu excepţia unui număr finit$\}$; în acest caz se poate defini gradul lui S care este o variabilă aleatoare.

$$(\mathrm{gr}\ S)(\omega) = \sup\{k / \text{există } m \in \mathbb{N}^n,\ |m| = k \text{ şi } a_m(\omega) \neq 0\}.$$

Lema 1 [1]. Seria $S(\omega) = \sum_{m} a_m(\omega) X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ este un polinom aleator dacă şi numai dacă $Pr(\overline{lim}\ A_k) = 1$; în particular, dacă seria numerică $\sum_{k \geqslant 0} (1 - p_k)$ este convergentă, atunci $S(\omega)$ este polinom aleator.

Demonstraţie. $\omega \in \Omega^* \leftrightarrow a_m(\omega) = 0$ pentru toţi $m \in \mathbb{N}^n$ cu excepţia unui număr finit $\leftrightarrow \omega \in A_k$ (exceptînd un număr finit de k) $\leftrightarrow \omega \in \overline{lim}\ A_k$. Deci $\Omega^* = \overline{lim}\ A_k$ şi rezultă prima parte din lemă. Apoi $\Omega \setminus \Omega^* = \overline{\lim}\ \mathbb{C}A_k$ şi $1 - p_k = \overline{Pr}(\mathbb{C}A_k)$. Conform lemei Borel-Cantelli, rezultă $Pr\ (\overline{\lim}\ A_k) = 0$ adică $Pr(\overline{lim}\ A_k) = 1$ şi ca atare $S(\omega)$ este polinom aleator.

Exemple. Noţiunea clasică de polinom aleator de grad $\leqslant d$ mărginit, ca fiind de forma

$$S(\omega) = \sum_{|m| \leqslant d} a_m(\omega) X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$$

este un caz particular al noţiunii anterioare ($p_k = 1$ pentru orice $k \geqslant d+1$ şi ca atare seria $\sum_{k \geqslant 0} (1 - p_k)$ este convergentă).

Arătăm că noţiunea introdusă de noi este efectiv mai generală. Fie $\Omega = [0, 1]^n$, $K = \sigma$ — algebra mulţimilor boreliene şi Pr = măsura Lebesgue. Fie $q \in (0, 1)$ fixat şi $S = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ unde a_m este funcţia caracteristică a paralelipipedului $[0, q^{m_1}] \times \dots \times [0, q^{m_n}]$. În acest caz, $\forall\ k \geqslant 0$ avem $A_k = \{x \in \Omega / a_m(x) = 0$ pentru $|m| = k\}$, deci $p_k = 1 - q^{kn}$ şi ca atare seria $\sum_{k \geqslant 0} (1 - p_k)$ este convergentă şi aplicînd lema 1, seria S este un polinom aleator cu grad nemărginit.

Fie acum $\{B_k\}_{k \geqslant 0}$ o partiţie numărabilă de evenimente a Pentru orice $k \geqslant 0$ să considerăm cîte un polinom aleator $x \in \mathbb{C}^n$ de grad mărginit k. Punînd

$$f(x, \omega) = \sum_{k \geqslant 0} P_k(x, \omega) \chi_{B_k}(\omega)$$

se obţine o funcţie aleatoare, $f \in Al(X)$, $X \in \mathbb{C}^n$ care nu este polinom aleator deşi pentru orice $\omega \in \Omega$ fixat, $f(x, \omega)$ este un polinom uzual.

În fine dacă $\{a_m\}_{m \in N^n,\ |m| \leqslant d}$ este un şir finit de variabile aleatoare $a_m \in L^1(\Omega)$ şi $S(\omega) = \sum_{|m| \leqslant d} a_m(\omega) X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ este polinomul aleator corespunzător de grad $\leqslant x$, atunci este definită o funcţie polinomială aleatoare asociată $S \in Al(X)$ punînd

$$S(\underline{z}, \omega) = \sum_{|m| \leqslant d} a_m(\omega) z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}.$$

În cele ce urmează vom identifica polinoamele cu funcţiile polinomiale asociate.

§2. O funcţie aleatoare polinomială în fiecare variabilă este plinomială în ansamblul variabilelor.

Mai precis vom demonstra următoarea

Teorema 1. Fie $f(\underline{z}, \omega)$, $f: \mathbb{C}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie parţial uniform continuă în probabilitate cu proprietatea că $(\forall)\ i$ fixat, $1 \leqslant i \leqslant n$, f este polinom aleator cu grad mărginit în fiecare variabilă z_i. Atunci f este polinom aleator cu grad mărginit în ansamblul variabilelor.

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, este suficient să considerăm cazul $n = 2$ şi notăm $\underline{z} = (x, y)$ în loc de $\underline{z} = (z_1, z_2)$. Ipoteza secundă a teoremei afirmă că $(\forall)\ x \in \mathbb{C}$ fixat, funcţia p_x, $p_x(y, \omega) = f(x, y, \omega)$ este polinom aleator în y, ω şi $(\forall) y \in \mathbb{C}$ fixat, funcţia q_y, $q_y(x, \omega) = f(x, y, \omega)$ este polinom aleator în x, ω, ambele cu grad mărginit $(\forall)\omega$.

Pentru orice $k \geqslant 0$ natural considerăm mulţimea

$$A_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \,\middle/ \begin{array}{l} (\forall)\ x, \text{ gradul lui } p_x \text{ este } \leqslant k \text{ şi} \\ (\forall)\ y, \text{ gradul lui } q_y \text{ este } \leqslant k \end{array} \right\}.$$

Lema. Familia $\{A_k\}_{k \geqslant 0}$ constituie o acoperire închisă a lui $\mathbb{C}^2$.

Demonstraţia lemei. Pentru orice punct $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ notăm $p = \operatorname{gr} p_\alpha(y, \omega)$, $q = \operatorname{gr} q_\beta(x, \omega)$. Aplicînd ipoteza făcută asupra lui f rezultă că luînd $k = \max(p, q)$, avem $(\alpha, \beta) \in A_k$. Aşadar $\mathbb{C}^2 = \bigcup_{k \geqslant 0} A_k$. Rămîne să arătăm că A_k este mulţime închisă în $\mathbb{C}^2$ oricare ar fi $k \geqslant 0$: presupunem că $(x_p, y_p) \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}^2} (\alpha, \beta)$ şi $(\forall) p \geqslant 1$, $(x_p, y_p) \in A_k$. Atunci, $f(x_p, y, \omega)$ şi $f(\alpha, y, \omega)$ sînt polinoame aleatoare în y, primul fiind de grad $\leqslant k$ şi similar, $f(x, y_p, \omega)$ şi $f(x, \beta, \omega)$ sînt polinoame aleatoare în x, primul fiind de grad $\leqslant k$. Cum $x_p \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}} \alpha$, atunci ipoteza din teoremă arată că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi p suficient de mare, avem

$$(\forall) y, \quad Pr\{\omega / |f(x_p, y, \omega) - f(\alpha, y, \omega)| \geqslant \varepsilon\} < \varepsilon$$

şi în consecinţă, polinomul $f(\alpha, y, \omega)$ are gradul $\leqslant k$. Similar, polinomul $f(x, \beta, \omega)$ are gradul $\leqslant k$. Aşadar $(\alpha, \beta) \in A_k$ şi lema este demonstrată.

Continuăm demonstraţia teoremei. Conform teoremei lui Baire de categorie, spaţiul metric complet $\mathbb{C}^2$ nu poate fi reuniune numărabilă de mulţimi rare, deci conform lemei precedente, există $k_0 \geqslant 0$ astfel încît deschisul $\complement A_{k_0}$ nu este dens, adică A_{k_0} conţine o bilă deschisă $B \subset \mathbb{C}^2$ de centru (x_0, y_0) şi de rază $r_0 > 0$. Atunci $(\forall)\ (x, y) \in B$, gradele polinoamelor p_x, q_y nu depăşesc k_0. Aşadar în B are loc o relaţie de forma

$$f(\underline{z}, \omega) = \sum_{i=0}^{k_0} a_i(y, \omega) \cdot x^{k_0 - i} = \sum_{j=0}^{k_0} b_j(x, \omega) \cdot y^{k_0 - j},$$

pentru fiecare ω fixat. Este evident atunci că $a_0, a_1, \ldots, a_{k_0}$ sînt polinoame în y şi similar, $b_0, b_1, \ldots, b_{k_0}$ sînt polinoame în x. Atunci funcţia $f(\underline{z}, \omega)$ este polinom aleator în B, adică

$$f(\underline{z}, \omega) = \sum_{i,j} a_{ij}(\omega) \cdot x^i \cdot y^j, \text{ oricare ar fi } \underline{z} = (x, y) \in B,\ \omega \in \Omega.$$

Rămîne să arătăm ca această relație are loc pe întreg $\mathbb{C}^2$.

Raționamentul anterior are loc fără modificare pentru cazul cînd $\mathbb{C}^2$ este înlocuit cu orice mulțime închisă din $\mathbb{C}^2$ (căci subzistă teorema lui Baire). Fie $\{B\}$ o familie de bile deschise din $\mathbb{C}^2$ astfel încît, pe fiecare bilă din familie, f este polinom. Ordonăm astfel de familii după incluziune și se obține o mulțime inductiv ordinată, care va avea un element maximal $\{B^*\}$, conform lemei lui Zorn. Reuniunea D a tuturor bilelor din $\{B^*\}$ este o mulțime deschisă și este clar că $D = \mathbb{C}^2$, căci în caz contrar ar exista o bilă în închisul $\mathbb{C}^2 \setminus D$ pe care f este polinom și s-ar nega maximalitatea familiei $\{B^*\}$.

În acest caz mulțimea $\mathbb{C}^2$ este acoperită cu bile deschise din $\{B^*\}$ și pe fiecare din ele f este polinom. Fie $(\forall)\,(x, y) \in \mathbb{C}^2$; segmentul închis, de capete (x_0, y_0), (x, y) este compact, deci va fi acoperit de un număr finit de bile deschise și pe fiecare, f este polinom. Teorema rezultă observînd că dacă avem două bile deschise nedisjuncte B_1, B_2 și dacă $f = p$ pe B_1, $f = q$ pe B_2 (cu p, q polinoame), atunci $p = q$.

Teorema 1'. Fie $f(\underline{z}, \omega)$, $f: \mathbb{C}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$ o funcție cu proprietatea că $(\forall)\ z \in \mathbb{C}^n$ fixat, $f(\underline{z}), \cdot)$ este variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$ și $(\forall)\omega \in \Omega$ fixat, $f(\cdot, \omega)$ este uniform continuă pe $\mathbb{C}^n$. Dacă f este polinom aleator (cu grad mărginit) în fiecare nedeterminată, atunci f este polinom aleator în ansamblul nedeterminatelor (cu grad mărginit).

Demonstrația este aceeași, cu atenție la finalul demonstrației lemei.

Observații. 1) Reamintim că prin polinom aleator cu grad mărginit d, am înțeles o serie formală de tipul $\sum_{|m| \leqslant d} a_m(\omega) X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$ în care grupul termenilor de grad d este nenul pentru orice eveniment elementar ω. Noțiunea de polinom aleator este mai generală. Teorema 1 se referă la noțiunea de polinom aleator cu grad mărginit. Corolarul care urmează arată că fără ipoteza de grad mărginit asupra lui f, concluzia din teorema 1 se înlocuiește cu un rezultat de tip asimptotic.

2) Teorema 1 are loc și în cazul real, cu aceeași demonstrație.

3) Teorema 1 reprezintă o extindere a rezultatului cunoscut din cazul deterministic („O funcție continuă de mai multe variabile reale, care este polinom în fiecare din variabile, este polinom în ansamblul variabilelor") și menționăm că demonstrația dată este nouă și pentru cazul deterministic. Cuvîntul „variabilă" este sinonim cu cel de „nedeterminată" (după identificarea polinoamelor cu funcțiile polinomiale asociate).

Corolar. În condițiile teoremei 1, presupunem că f este polinom aleator în fiecare nedeterminată. Atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, există un eveniment Ω_ε astfel încît $Pr(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ și $f(\underline{z}, \omega)$ este polinom aleator pe Ω_ε (cu grad mărginit).

Demonstrație. Pentru orice $\omega \in \Omega$ fixat, $f(\underline{z}, \omega)$ este polinom în $\underline{z}$ (conform variantei deterministice probată în teorema 1). Punem $\Omega_k = \{\omega \in \Omega / \text{gr}\ f(\underline{z}, \omega) \leqslant k\}$, pentru orice $k \geqslant 1$ fixat.
Evident, $\Omega_k \in K$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ și $Pr(\Omega_k) \to 1$ pentru $k \to \infty$. Atunci $(\forall)\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît $(\forall)n \geqslant N(\varepsilon)$, $0 \geqslant Pr(\Omega) - Pr(\Omega_n) < \varepsilon$ adică $Pr(\Omega \setminus \Omega_n) < \varepsilon$. Notăm $\Omega_\varepsilon = \Omega_{N(\varepsilon)}$ și $f(\underline{z}, \omega)$ este polinom aleator cu grad mărginit pe Ω_ε.

BIBLIOGRAFIE

[1] *L. Arnold*, J. Reine und Angew. Math., 222, 79–112, 1966.
[2] *D. Dugué*, Statistique théorique et appliqueé, Ed. Masson, 1958.
[3] *O. Onicescu, Gh. Mihoc. C. Ionescu – Tulcea*, Calculul probabilităţilor şi aplicaţii, Ed. Academiei RSR, 1956.
[4] *T. Stănăşilă*, Buletinul IPB, 38, No. 2, 11–14, 1976.

On Polynomial Random Functions

In this work a definition of random polynomials is given in terms of random formal power series. The main result is a probabilistic extension of a well-known result of analysis (a function of several real variables which is polynomial in any variable is a polynomial).

C.Z.: 517.948

DUALITY RELATIONS FOR OBSERVABILITY AND CONTROLLABILITY OPERATORS FOR A LINEAR DIFFERENTIAL INFINITE — DIMENSIONAL TIME — INVARIANT SYSTEM

ELENA DECIU*

In the context of the linear differential infinite — dimensional time-invariant systems, we defined the notion of adjoint system, we gave the solutions of a such system and of his adjoint system, in some particular cases. We proved that the evolution operator of the adjoint system $\mathcal{S}^*$ is the adjoint operator of the evolution operator of the system $\mathcal{S}$. We proved a relation of duallty for the transfer functions of $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$. We proved also relations of duality for the observability and controllability operators of $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$, and their consequences concerning the backward and forward wave operators of a system and of his adjoint system.

For related topics and for illustrations, it may be seen [1], [2], [3], [6], [7].

1. Let $\tilde{U}$, X, $\tilde{Y}$ be three complex Hilbert spaces, called, respectively, "the space of inputs", "the space of states" and "the space of outputs" for the linear differential infinite-dimensional time — invariant system, denoted by

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (A, B, C, D) \tag{1}$$

and whose state equations are:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad t \in R, \tag{2}$$

where $A : X \to X$, $B : \tilde{U} \to X$, $C : X \to \tilde{Y}$ and $D : \tilde{U} \to \tilde{Y}$ are linear continuous operators, and $u(t)$, $x(t)$ and $y(t)$ denote, respectively, the input, the state and the output of the system at the time $t \in R$.

Manuscript received October 26 1981

* Lecturer, Chair of Mathematics

We supposed that the system $\mathscr{S}$ is balanced, i.e., $\widetilde{U} = \widetilde{Y} \subseteq X$. We also supposed that the state space X is infinite-dimensional and the operator A is selfadjoint. Let

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda \tag{3}$$

be the spectral resolution of the operator A.

We also supposed the initial condition

$$x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

and, sometimes, unrestrictively,

$$x(0) = 0. \tag{4'}$$

The equations (2) may be also written in a matricial form, as follows :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{2'}$$

We defined (it may be seen [6], [7] for the discrete case) the adjoint system of the system $\mathscr{S}$, denoted by

$$\mathscr{S}^* = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} = (A^*, C^*, B^*, D^*), \tag{5}$$

where A^*, B^*, C^*, D^* are, respectively, the adjoint operators of the operators A, B, C, D, and whose state equations are :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + C^* y(t) \\ u(t) = B^* x(t) + D^* y(t) \end{cases}, \quad t \in R, \tag{6}$$

and in the matricial form,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{6'}$$

Then, we have the obvious assertion :

1°. $$(\mathscr{S}^*)^* = \mathscr{S} \tag{7}$$

We shall denote : $(\mathscr{S}^*)^* = \mathscr{S}^{**}$.

We have the assertions :

2°. (a). The solution of the system $\mathscr{S}$, defined by the equations (2), (4), is

given by the relations (it may be seen [5] for the finite-dimensional case):

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)A} Bu(\tau)\,d\tau\right] \tag{8}$$

$$y(t) = C\,e^{(t-t_0)A}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)A} Bu(\tau)\,d\tau\right] + Du(t) \tag{8'}$$

2°. (b). The solution of the adjoint system $\mathcal{S}^*$, defined by the equations (6), (4), is given by the relations:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A^*}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)A^*} C^* y(\tau)\,d\tau\right] \tag{8*}$$

$$u(t) = B^* e^{(t-t_0)A^*}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)A^*} C^* y(\tau)\,d\tau\right] + D^* y(t), \tag{8*'}$$

with an immediate form for the case $A^* = A$.

These relations may be immediately verified.

Let us suppose now, that the state space X is separable and let $\{e_n\}_{n\in N}$ be an orthonormal basis of X.

3°. Then, we see, immediately, with (3), that the solutions of the systems $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$ have the aspect:

$$x(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t-t_0)\lambda}\,dE_\lambda\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_0, e_n)\,e_n + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t_0-\tau)\lambda}\,dE_\lambda\right] B\,u(\tau)\,d\tau\right\} \tag{9}$$

$$y(t) = C\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t-t_0)\lambda}\,dE_\lambda\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_0, e_n)\,e_n + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t_0-\tau)\lambda}\,dE_\lambda\right] B\,u(\tau)\,d\tau\right\} + D\,u(t), \tag{9'}$$

and

$$x(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t-t_0)\lambda}\,dE_\lambda\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_0, e_n)\,e_n + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t_0-\tau)\lambda}\,dE_\lambda\right] C^* y(\tau)\,d\tau\right\} \tag{9*}$$

$$u(t) = B^*\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t-t_0)\lambda}\,dE_\lambda\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_0, e_n)\,e_n + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t_0-\tau)\lambda}\,dE_\lambda\right] C^* y(\tau)\,d\tau\right\} + D^* y(t). \tag{9*'}$$

2. For the system $\mathcal{S}$, let us denote the direct sum of the spaces:

$$\mathbf{K}_{\mathcal{S}} = \mathbf{K} = \ldots \oplus \overset{(-2)}{\widetilde{\mathbf{U}}} \oplus \overset{(-1)}{\widetilde{\mathbf{U}}} \oplus \overset{(0)}{\mathbf{X}} \oplus \overset{(1)}{\widetilde{\mathbf{Y}}} \oplus \overset{(2)}{\widetilde{\mathbf{Y}}} \oplus \ldots \tag{10}$$

4° Then, we have:

$$\mathbf{K}_{\mathcal{S}^*} = \mathbf{K}_* = \ldots \oplus \overset{(-2)}{\widetilde{\mathbf{Y}}} \oplus \overset{(-1)}{\widetilde{\mathbf{Y}}} \oplus \overset{(0)}{\mathbf{X}} \oplus \overset{(1)}{\widetilde{\mathbf{U}}} \oplus \overset{(2)}{\widetilde{\mathbf{U}}} \oplus \ldots \tag{10*}$$

We associated to the system $\mathcal{S}$, the evolution operator $W_{\mathcal{S}} = W : K \to K$, given by the relations:

$$Wk = k', \tag{11}$$

where $k = (\ldots, u_{-2}, u_{-1}, \boxed{x}, y_1, y_2, \ldots) \in \mathbf{K}$ and

$$k' = (\ldots u'_{-2}, u'_{-1}, \boxed{x'}, y'_1, y'_2, \ldots) \in \mathbf{K}$$ and

we have:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu_{-1} \\ y'_1 = Cx + Du_{-1} \end{cases}, \tag{11'}$$

$$\begin{cases} y'_i = y_{i-1}, & i \geqslant 2 \\ u'_{-j} = u_{-(j+1)} & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{11''}$$

5°. We know ([2], [7] for the discrete case) that the operator W is a dilation of the operator A.

6° We see, easily, that the evolution operator of the system $\mathcal{S}^*$ is the adjoint operator of the evolution operator of the system $\mathcal{S}$:

$$W_{\mathcal{S}^*} = (W_{\mathcal{S}})^*. \tag{12}$$

3. To the system S, we associated the transfer function $\{\widetilde{U}, \widetilde{Y}, T_{\mathcal{S}}(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, where

$T_{\mathcal{S}}(\lambda) = T(\lambda)$ is the operator $T(\lambda): \widetilde{U} \to \widetilde{Y}$ given by the expression:

$$T(\lambda) = D + \lambda C(I - \lambda A)^{-1} B; \tag{13}$$

we denoted by

$$\Lambda = \{ \lambda \in C; \text{ it exists } (I - \lambda A)^{-1} \}. \tag{13'}$$

The transfer function is analytic.

7°. Naturally, for the adjoint system $\mathscr{S}^*$, we have the transfer function $\{\widetilde{Y}, \widetilde{U}, T_{\mathscr{S}^*}(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, where $T_{\mathscr{S}^*}(\lambda) = T_*(\lambda)$ is the operator $T_*(\lambda)$: $\widetilde{Y} \to \widetilde{U}$, given by the expression:

$$T_*(\lambda) = D^* + \lambda B^* (I - \lambda A^*)^{-1} C^*. \tag{13*}$$

8°. We see, immediately, that

$$T_{\mathscr{S}^*}(\lambda) = T_{\mathscr{S}}(\overline{\lambda})^*, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{14}$$

4. Let $l^2(0, \infty ; \widetilde{U})$ be the Hilbert space of the sequences $u = (u_k)_{k=0}^{\infty}$, $u_k \in \widetilde{U}$, such that $\sum_{k=0}^{\infty} \| u_k \|_{\widetilde{U}}^2 < \infty$; and, similarly, $l^2(0, \infty ; \widetilde{Y})$.

To the system $\mathscr{S}$, we may associate the controllability operator $\mathscr{C}_{\mathscr{S}} = \mathscr{C} : \mathscr{D}_{\mathscr{C}} \to X$, with the domain $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ dense in the space $l^2(0, \infty ; \widetilde{U})$, and defined by the relation

$$\mathscr{C}(u_0, u_1, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B u_k. \tag{15}$$

and the observability operator $\mathscr{O}_{\mathscr{S}} = \mathscr{O} : \mathscr{D}_{\mathscr{O}} \to X$, with the domain $\mathscr{D}_{\mathscr{O}}$ dense in the space $l^2(0, \infty ; \widetilde{Y})$, and defined by the relation

$$\mathscr{O}(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{*k} C^* y_k. \tag{16}$$

9°. Then, we may see, immediately, the duality „controllability-observability" due to the relations:

$$\mathscr{O}_{\mathscr{S}} = \mathscr{C}_{\mathscr{S}^*} \tag{17}$$

$$\mathscr{C}_{\mathscr{S}} = \mathscr{O}_{\mathscr{S}^*}, \tag{18}$$

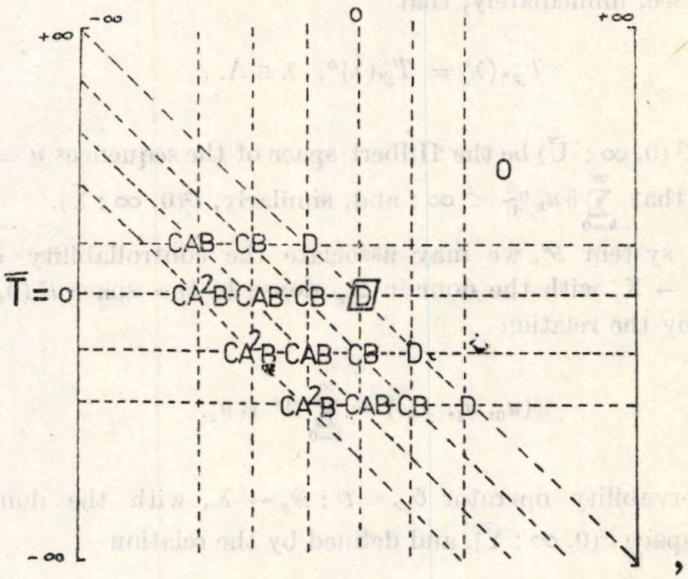
5. To a system $\mathscr{S}$, we may associate (it may be seen [3] for the discrete case) the backward wave operator $W_{-\mathscr{S}} = W_- : K \to K$, by the relation:

$$W_- = P_- + \mathscr{C} + P_+ \overline{T} S_+, \tag{19}$$

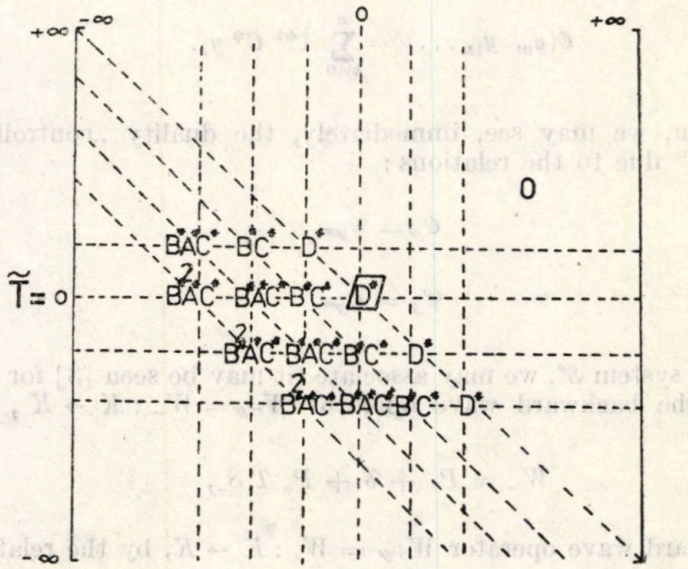
and the forward wave operator $W_{+\mathscr{S}} = W_+ : K \to K$, by the relation:

$$W_+ = P_+ + \mathscr{O} + P_- \widetilde{T} S_- \tag{20}$$

where we denoted for the space $\mathrm{K} = \overset{+\infty}{\underset{i=-\infty}{\oplus}} \mathrm{K}_i$, with $K_i = \tilde{\mathrm{U}}$, for $i < 0$, $K_0 = \mathrm{X}$; $K_i = \tilde{\mathrm{Y}}$, for $i > 0$, the orthoprojectors $P_i : K \to K_i$, and $P_- = \sum_{i=1}^{\infty} P_{-i}, P_+ = \sum_{i=1}^{\infty} P_i$ and the operators $\bar{T} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$, and $\tilde{\mathrm{T}} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$, are given by the subdiagonal matrices :



(21)



(22)

Fig. 1

10°. We see easily ("it may be also seen [6] [7]) the duality backward-forward" due to the relations:

$$W_{+\mathcal{G}} = W_{-\mathcal{G}^*}, \quad (23) \qquad W_{-\mathcal{G}} = W_{+\mathcal{G}^*}, \quad (24)$$

due to the dualities:

11°. $$\tilde{U}_{\mathcal{G}^*} = \tilde{Y}_{\mathcal{G}}, \quad (25) \qquad \tilde{Y}_{\mathcal{G}^*} = \tilde{U}_{\mathcal{G}}, \quad (26)$$

12°. $$P_{-\mathcal{G}^*} = P_{+\mathcal{G}}, \quad (27) \qquad P_{+\mathcal{G}^*} = P_{-\mathcal{G}}, \quad (28)$$

13°. $$\bar{T}_{\mathcal{G}^*} = \tilde{T}_{\mathcal{G}}, \quad (29) \qquad \tilde{T}_{\mathcal{G}^*} = \bar{T}_{\mathcal{G}}, \quad (30)$$

and to the dualities (17), (18) and to the definitions (19), (20).

We may particularize these dualities for the discrete case ([6], [7]) and also for the finite case ([5]).

For some concrete examples, it may be seen [3], [4], [6], [7].

REFERENCES

1. *C. Foiaş*, Proc. Intern. Congr. of Math., Nice, Sept., 1970 T 2, Gauthier-Villars (Paris, 1971, 433–440.
2. *B. Sz. Nagy, C. Foiaş*, Harmonic Analyses of Operators on Hilbert Space, Budapest-Amsterdam, London, 1970.
3. *J. W. Helton*, J. Funct. Anal. 16 (1974), 15–38.
4. *F. J. Helton, J. W. Helton*, Scattering theory for computers and other non-linear systems. Preprint.
5. *E. Polak*, Linear time-invariant systems, System Theory, 1969.
6. *E. Deciu*, Studii şi cercetări matematice, 1980, TOMUL 32, Nr. 4, 409–424 .
7. *E. Deciu*, Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, 1980, TOME XXV, Nr. 4, 525–538.

Relaţii de dualitate pentru operatorii de observabilitate şi controlabilitate pentru un sistem invariant în timp infinit – dimensional diferenţial liniar

În contextul sistemelor invariante în timp infinit – dimensionale diferenţiale liniare, am definit noţiunea de sistem adjunct, am dat soluţiile unui astfel de sistem şi ale sistemului său adjunct, în cîteva cazuri particulare. Am demonstrat că operatorul de evoluţie al sistemului adjunct este operatorul adjunct al operatorului de evoluţie al sistemului. Am arătat o relaţie de dualitate pentru funcţiile de transfer a sistemului şi sistemului adjunct. Am demonstrat, de asemenea, relaţii de dualitate pentru operatorii de observabilitate şi controlabilitate ale sistemului şi adjunctului său, şi consecinţe privind operatorii de undă înaintată şi întîrziată ai unui sistem şi ai sistemului său adjunct.

Pentru topici adiacente şi pentru ilustrări, pot fi consultate [1], [2], [3], [6], [7].

C.Z. : 519.68

ALGORITM DE CLASIFICARE ȘI REGĂSIRE A ELEMENTELOR UNEI COLECȚII

C. M. BUCUR*

În articol este tratată problema organizării unei colecții, regăsirea unui element al colecției și dezvoltarea iterativă a respectivei organizări. Se dau definițiile și propozițiile care permit construirea unui algoritm ce rezolvă problema pusă; partea finală conține un program și un exemplu rulat.

1°. Considerăm o colecție $M_\alpha^{(n)}$ accesibilă unei descrieri prin setul de descriptori $\{d_i / i \in \overline{1, n}\}$,

$$M_\alpha^{(n)} = \{x / x \in R^n, d_i(x) = x_i \in \{a_1, a_2\} = A_i^{(n)}, a_1, a_2 \in Z\},$$

$$M_\alpha^{(n)} \subset A_\alpha^{(n)} = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i^{(n)}, \quad n \in N. \quad [2]$$

Dacă printr-o aplicație $f_n : A_\alpha^{(n)} \to Z$, o funcție de selecție, s-a determinat o partiție a mulțimii $A_\alpha^{(n)}$, atunci se spune că s-a realizat o organizare a colecției $M_\alpha^{(n)}$ prin f_n · [2]

Este adevărată afirmația: dacă $(x, y) \to g_p(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_y y_i$, $x, y \in$ $\in A_\alpha^{(n)}$, atunci cu ipoteza $d_i(x) \in \{-1; +1\}$, $\forall x \in A_\alpha^{(n)}$, g_p devine funcție de selecție, inclusiv pentru cazul $x^{(0)} \in A_\alpha^{(n)} \setminus M_\alpha^{(n)}$.

Ipoteza $d(x) \in \{-1; +1\}$ și $A_\alpha^{(n)} = A^{(n)} \cup A_\beta^{(n)}$, $A^{(n)} = \{+1 \bigtimes_{i=2}^{n} A_i^{(n)}$, $A_\beta^{(n)} = \{-1\} \bigtimes_{i=2}^{n} A_i^{(n)}$ reduce problema la organizarea unei colecții de cel mult 2^{n-1} elemente; proprietatea $(\forall x \in A^{(n)})\ (\exists \bar{x} \in A_\beta^{(n)}, \bar{x} = -x)$ arată că o organizare pe $A^{(n)}$ induce o organizare pe $A_\beta^{(n)}$ prin aplicația $x \to \bar{x}$, $x \in A^{(n)}$.

Manuscris primit la data 25 februarie 1982
* Lect. dr., Catedra Matematici II

Deci organizarea colecţiei $M^{(n)}$ presupune $f_n: A^{(n)} \to E \subset Z$, $A^{(n)} = \bigcup_{w \in E} B_w^{(n)}$, $B_w^{(n)} = \{x / x \in A^{(n)}, f_n(x) = w\}$,
care induce $M^{(n)} = \bigcup_{w \in E} Q_w^{(n)}$, $Q_w^{(n)} = M^{(n)} \cap B_w^{(n)}$; analog se procedează pentru mulţimile $B_w^{(n)}$.

Regăsirea unui element $x^{(0)}$ al colecţiei se face în două etape; determinarea submulţimii $B_w^{(n)}$, $x^{(0)} \in B_w^{(n)}$ prin f_n şi apoi determinarea secvenţială a lui $x^{(0)}$ pe mulţimea $B_w^{(n)}$ printr-o funcţie de selecţie $g: A^{(n)} \times A^{(n)} \to Z$,

$$(\forall u \in A^{(n)}, \text{ fixat}) \Rightarrow (g(u, u) = \max_{v \in A^{(n)}} g(u, v), \text{ sau minim}).$$

Sînt adevărate afirmaţiile [2]

i. Dacă $f_n: A_\alpha^{(n)} \to N^\circ$, $N^\circ = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, este funcţia schimbărilor de semn, atunci dezvoltarea colecţiei după $n \in N$ se poate realiza iterativ, cu păstrarea organizării.

ii. În ipoteza $(f_n(x^{(0)}) = j) \Rightarrow (x^{(0)} \in B_j^{(n)} \cup \bar{B}_j^{(n)}, \bigcup_{j=0}^{n-1} B_j^{(n)} = A^{(n)}, \bigcup_{j=0}^{n-1} \bar{B}_j^{(n)} = A_\beta^{(n)})$, sînt posibile cazurile:

(a). $x^{(0)} \in A^{(n)}$; în acest caz problema regăsirii lui $x^{(0)}$ are soluţia $Q^* = \{x^{(0)}\}$ şi este determinată de implicaţia

$$(x^{(0)} \in B_j^{(n)} \cap \bar{B}_j^{(n)}) \Rightarrow (\exists x^* \in B_j^{(n)}, \quad g_p(x^{(0)}, x^*) = \max_{x \in B_j^{(n)}} g_p(x^{(0)}, x) = n),$$

sau

$$(\exists x' \in B_j^{(n)}, \ g_p(x^{(0)} x') = \min_{x \in B_j^{(n)}} g_p(x^{(0)}, x) = -n);$$

în prima variantă $x^{(0)} \equiv x^*$, în a doua $x^{(0)} \equiv -x'$.

(b). $x^{(0)} \in A_\alpha^{(n)} \setminus M_\alpha^{(n)}$. Notăm $D^{(n)} = M^{(n)} \cup \bar{M}_\beta^{(n)}$;
dacă

$$D_1 = \{x / x \in D^{(n)}, \max_{x' \in D^{(n)}} g_p(x^{(0)}, x') = g_p(x^{(0)}, x) = m > 0\},$$

$$D_2 = \{x / x \in D^{(n)}, \min_{x' \in D^{(n)}} g_p(x^{(0)}, x') = g_p(x^{(0)}, x) = m' < 0\},$$

atunci se satisfac implicaţiile

$$(m > -m') \Rightarrow (x^{(0)} \equiv x, \ \forall x \in D_1), \text{ deci } Q^* = D_1,$$

$$(m < -m') \Rightarrow (x^{(0)} \equiv -x, \ \forall x \in D_2), \text{ deci } Q^* = \bar{D}_2,$$

$$(m = -m') \Rightarrow (x^{(0)} \equiv x, \quad \forall x \in D_1) \wedge (x^{(0)} \equiv -x, \ \forall x \in D_2), \text{ deci } Q^* =$$

$$= D_1 \cup \bar{D}_2.$$

Menționăm definiția: elementele $x^{(s)}, x^{(q)} \in A^{(n)}$ sînt în sinonimie în raport cu $x^{(0)}$, dacă $g_p(x^{(0)}, x^{(s)}) = g_p(x^{(0)}, x^{(q)})$; valoarea comună, $m = g_p(x^{(0)}, x^{(s)})$, este gradul de sinonimie. Observăm că în acest caz $x^{(s)}, x^{(q)}$ diferă de $x^{(0)}$ prin valoarea a $k = \dfrac{n-m}{2}$ descriptori; cu definiția de mai sus rezultă că pentru $x^{(0)} \in A_\alpha^{(n)} \setminus M_\alpha^{(n)}$ soluția Q^* este mulțimea sinonimelor lui $x^{(0)}$, cu grad minim de sinonimie, cuprinse în $M_\alpha^{(n)}$.

Numărul maxim de interogări pentru regăsirea lui $x^{(0)} \in A_\alpha^{(n)}$ este

$$\mu = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} (j + C_{n-1}^j);$$

dacă $f_n(x^{(0)}) = j$, atunci primele j interogări determină mulțimea $B_j^{(n)}$, iar apoi $x^{(0)}$ se determină secvențial pe $B_j^{(0)}$, care conține C_{n-1}^j elemente.

Observație. Cu definiția: problema regăsirii unui element $x^{(0)} \in A_\alpha^{(n)}$ este $n-q$ nedeterminată, dacă sînt precizate valorile unui număr de $q < n$ descriptori ai lui $x^{(0)}$, ceilalți $n-q$ descriptori putînd lua orice valoare din $\{-1; +1\}$, se abordează și problema cu nedeterminări pentru regăsirea unui element al colecției.

În acest caz determinarea secvențială a lui $x^{(0)}$, $f_n(x^{(0)}) = j$, se face pe mulțimea $\bigcup_{j=m_q}^{m_q+n-q} B_j^{(n)}$, unde $m_q = f_q(y^{(0)})$;
$y^{(0)} = (x_{i_1}^{(0)}, x_{i_1}^{(0)}, \ldots, x_{iq}^{(0)})$, $i < i_2 < \ldots < i_q$, conține numai descriptorii cu valori determinate în $x^{(0)}$.

2°. Prezentăm un program pentru algoritmul definit mai sus, considerînd $x^{(0)} \in M_\alpha^{(n)}$ și deci $Q^* = \{x^*/x^* \equiv x^{(0)}\}$.

Considerăm mulțimea $P^{(n)} = M^{(n)} \cup \bar{M}_\beta^{(n)}$ și pentru regăsirea elementului $x^{(0)}$ se calculează $f_n(x^{(0)}) = j$; cu organizarea colecției $M^{(n)}$ realizată de f_n, ultima egalitate implică $x^* \in Q_j^{(n)}$, dacă $j > 0$, sau $x^* \in \bar{Q}_j^{(n)}$, dacă $j_i^1 < 0$. Valoarea j determină trecerea la lista $R_j^{(n)} = \{x^{(k)}/f_n(x^{(k)}) = j,\ k \in K\}$, $P^{(n)} = \bigcup_{j=0}^{n-1} R_j^{(n)}$; găsirea secvențială a soluției se bazează pe implicațiile

$$(\exists x' \in R_j^{(n)}) \wedge (g_p(x^{(0)}, x') = n) \Rightarrow Q^* = \{x'\}, \text{ sau}$$

$$(\exists\, x'' \in R_j^{(n)}) \wedge (g_p(x^{(0)}, x'') = -n) \Rightarrow Q^* = \{-x''\}.$$

Cu notațiile $Z(I) = x_i^{(0)}$, $I \in \overline{1, N}$, $FN(X) = f_n(x)$, $X(K) = x^{(k)}$, $GP(K) = g_p(x^{(0)}, x^{(k)})$, dăm o schemă logică pentru problema regăsirii lui $x^{(0)}$. (fig. 1 a.)

Pentru realizarea unei scheme logice a problemei clasificării elementelor mulțimii $M^{(n)}$ în clase de echivalență $Q_j^{(n)}$, considerăm notațiile vectorilor

$$X(I) = (X(I, J),\ J = 1, n),\quad R(I) = (R(I, J),\ J = 1,\ n+1),\quad I \in \overline{1, n};$$

relațiile

$$R(I, 1) = FN(I),\ R(I, K+1) = X(I, K),\ K \in \overline{1,\ n},$$

$$R(I) = (R(I, K),\ K = 1,\ n+1)$$

corespund trecerii de la $M^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ la mulțimea

$$\hat{\mathbb{R}} = N_1 \times M^{(n)},\ N_1 = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

În final se obține mulțimea E, care este reordonarea mulțimii $\hat{\mathbb{R}}$ în funcție de componentele

$$(R(I, K),\ K = 2,\ n+1) = X(I) \in Q_j^{(n)},\ I \in \overline{1,\ n},$$

în sensul creșterii indicelui j; schema logică este prezentată în fig. 1 b.

Un program care realizează ordonarea mulțimii $M^{(n)}$ după submulțimile $Q_j^{(n)}$ și permite regăsirea elementului $x^{(0)}$, ($x \in M^{(n)}$), este prezentat în fig. 2 a., respectiv 2 b.

Observație. Deoarece soluția este determinată de condiția $g_p(x^{(0)}, x^{(k)}) = \pm n$ pe mulțimea $Q_j^{(n)}$, rezultă că procesul de calcul este încheiat de satisfacerea condiției; nu este necesară restricție pentru $k \in K$.

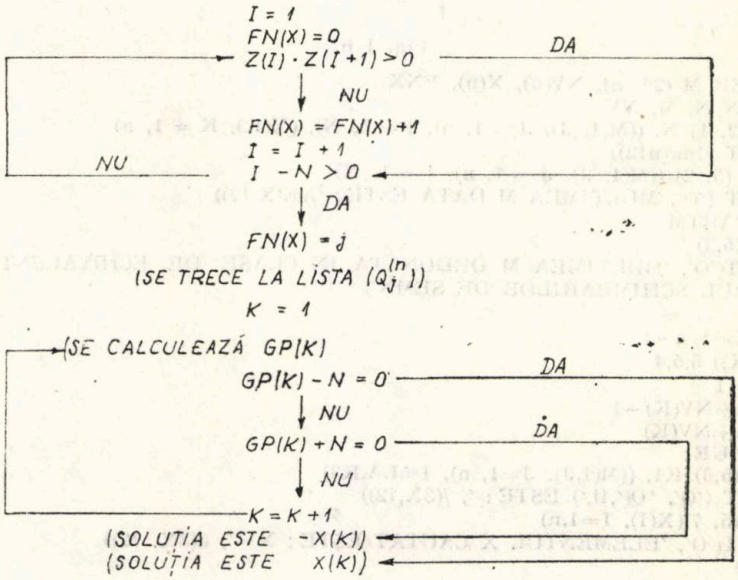


Fig. 1 a.

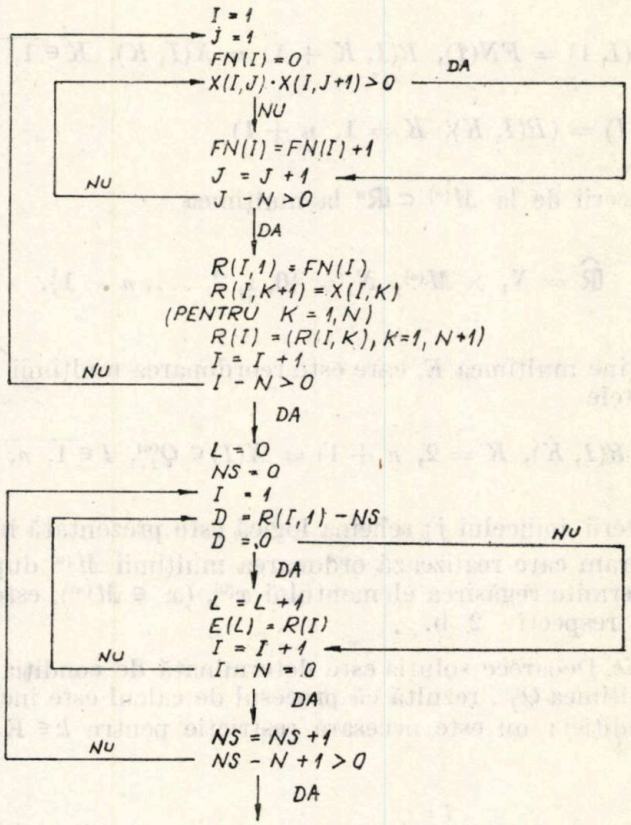


Fig. 1 b.

```
      INTEGER M (2^n, n), NV(n), X(n), FNX
      COMMON N, M, NV
      READ (2, 1) N, ((M(I, J), J = 1, n), I = 1, N), (X(K), K = 1, n)
    1 FORMAT (Im/(nI2))
      WRITE (5, 2) ((M(I, J), J = 1, n), I = 1, N)
    2 FORMAT ('O', 'MULȚIMEA M DATA ESTE : '/n(3X,I2))
      CALL PARTM
      WRITE(5,3)
    3 FORMAT('O', 'MULȚIMEA M ORDONATA IN CLASE DE ECHIVALENTA DUPĂ
      NUMĂRUL SCHIMBARILOR DE SEMN')
      LA=1
      DO 5 K=1, n-1
      IF(NV(K)) 5,5,4
    4 K1=K-1
      K3=LA+NV(K)-1
      LA=LA+NV(K)
    5 CONTINUE
      WRITE(5,6) K1, ((M(I,J), J=1, n), I=LA,K3)
    6 FORMAT ('O', 'Q(',I1,') ESTE : ', /(3X,I2))
      WRITE(5, 7)(X(I), I=1,n)
    7 FORMAT('O', 'ELEMENTUL X CAUTAT ESTE : X=', n(3X, I2))
      FNX=0
      DO 9 K=1, n-1
      K2=K+1
      IF(X(K)-X(K2)) 8, 9, 9
```

```
 8 FNX=FNX+1
 9 CONTINUE
   MR=FNX+1
   IF(NV(MR)) 16, 16, 10
10 MS=0
   DO 11 K=1, MR
11 MS=MS+NV(K)
   MS1=MS-NV(MR)+1
   DO 15 I=MS1, MS
   I1=I-MS1+1
   ND=0
   DO 12 K=1, n
12 ND=ND+X(K)*M(I,K)
   IF(ND-n) 15, 13, 15
13 WRITE (5, 14) FNX, I1
14 FORMAT('O', 'X ESTE IN CLASA Q(', I1,') SI SE AFLA PE POZIŢIA', I3)
15 CONTINUE
   GO TO 18
16 WRITE(5,17)
17 FORMAT ('O', 'X NU SE AFLA IN MULŢIMEA M')
18 CONTINUE
   STOP
   END
```

Fig. 2 a.

```
   SUBROUTINE PARTM
   INTEGER M(2**n, n), M1(2**n, n), MARC(2**n, 2), NV(n)
   COMMON N, M, NV
   DO 1 I=1,N
   KA=0
   DO 2 J=1, n-1
   J2=J+1
   IF(M(I,J) M(I,J2)) 3,2,2
 3 KA=KA+1
 2 CONTINUE
   MARC(I,1)=I
 1 MARC(I,2)=KA
   J=1
   DO 4 K=1,n
   K1=K-1
   NV(K)=0
   DO 4 I=1,N
   IF(MARC(I,2)-K1) 5,5,4
 5 DO 6 IND=1,2
   LOC=MARC(J,IND)
   MARC(J,IND)=MARC(I,IND)
 6 MARC(I,IND)=LOC
   NV(K)=NV(K)+1
   J=J+1
 4 CONTINUE
   DO 7 I=1,N
   LU=MARC(I,1)
   DO 7 K=1,n
 7 M1(I,K)=M(LU,K)
   WRITE(5, 8) ((M1(I,J), J=1,n), I=1,N)
 8 FORMAT(' ',//n(3X,I2))
   DO 9 I=1,N
   DO 9 J=1,n
 9 M(I,J)=M1(I,J)
   RETURN
   END
```

Fig. 2 b.

3°. În continuare vom considera un exemplu de ordonare a mulțimii $M^{(n)}$ și de regăsire a unui element $x^{(0)} \in M^{(n)}$.

Se ordonează mulțimea $M^{(10)}$ și se rezolvă problema regăsirii elementului $x^{(0)} = (1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1)$; mulțimile $Q_j^{(10)}$ se ordonează „lexicografic".

Pentru această problemă este prezentat un program și rezultatul rulării lui pe calculator.

Mulțimea M dată este:

1	−1	1	−1	−1	−1	1	−1	1	1
1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1
1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1
1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1
1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1
1	1	1	−1	+1	−1	+1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	−1	1	1	1	−1	1	−1	1	−1
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1
1	1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
1	1	−1	−1	1	1	1	−1	−1	1
1	1	1	−1	−1	−1	1	1	−1	1
1	−1	1	−1	1	1	1	−1	−1	1
1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	1	1
1	−1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1
1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	1
1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1
1	−1	−1	−1	1	1	1	−1	−1	1
1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1

Fig. 3 a, b, cuprind rezultatul rulării problemei pe calculator.

```
      INTEGER M(100, 10), NV(10), X(10), FNX,P,Pl
      COMMON M,NV,P,N
      READ(2, 101) P,N,((M(I,J), J=1,P), I=1,N), (X(K), K=1,P)
  101 FORMAT(I3/I3/(10I2)
      WRITE(5, 102) ((M(I,J), J=1, P), I =1,N)
  102 FORMAT('O', 'MULȚIMEA M DATA ESTE : '/10(3X,I2))
      CALL PARTM
   93 DO 85 K=1,P
      IF(NV(K)-1) 85,85,86
   86 CALL LEXI(K)
   85 CONTINUE
      WRITE (5,103)
  103 FORMAT('O', 'MULȚIMEA M ORDONATA IN CLASE DE ECHIVALENTA DUPĂ
      NUMĂRUL SCHIMBARILOR DE SEMN')
      Pl=P-1
      LAC=1
      DO 20 K=1,Pl
      IF(NV(K)) 20,20,82
   82 CONTINUE
      K1=K-1
      K3=LAC+NV(K)-1
      WRITE(5,104) K1, ((M(I, J), J=1, P), I=LAC, K3)
      LAC=LAC+NV(K)
   20 CONTINUE
  104 FORMAT('O', 'Q(',I1,') ESTE : ',10(3X,I2)
      WRITE(5, 105) (X(I), I=1,P)
```

```
105 FORMAT('O', 'ELEMENTUL  CAUTAT ESTE : ',/10(3X, I2))
    FNX=0
     DO 30 K=1,P1
    K2=K+1
    IF(X(K)*X(K2)) 31,30, 30
 31 FNX=FNX+1
 30 CONTINUE
    MR=FNX+1
    IF(NV(MR)) 51, 51,  83
 83 CONTINUE
    MS=0
    DO 40 K=1, MR
 40 MS=MS+NV(K)
    MSL=MS-NV(MR)+1
    DO 50 I=MSL,MS
    I1=I-MSL+1
    ND=0
    DO 60 K=1,P
 60 ND=ND+X(K)*M(I,K)
    IF(ND-P) 50, 41 ,50
 50 CONTINUE
 51 WRITE(5, 107)
107 FORMAT('O', 'X NU SE AFLA ÎN MULŢIMEA M')
    GO TO 73
 41 WRITE(5, 106) FNX, I1
106 FORMAT ('O', 'X ESTE ÎN CLASA Q(', I1, ') ŞI SE AFLA PE POZIŢIA', I3)
 73 CONTINUE
    STOP
    END
```

Fig. 3 a.

```
    SUBROUTINE PARTM
    INTEGER M(100,10), M1(100, 10), MARK(100, 2), NV(10), P,P1
    COMMON M,NV,P,N
    DO 1 I=1,N
    KA=0
    P1=P-1
    DO 2 J=1,P1
    J2=J+1
    IF(M(1,J) M(I,J2)) 3,2,2
  3 KA=KA+1
  2 CONTINUE
    MARK(I, 1)=I
    MARK (I, 2)=KA
  1 CONTINUE
    J=1
    DO 4 K=1, P
    K1=K-1
    NV(K)=0
    DO 5 I=1,N
    IF(MARK(I,2)-K1) 5,6,5
  6 DO 13 IND=1,2
    LIP=MARK(J,IND)
    MARK(J, IND)=MARK(I, IND)
    MARK(I, IND)=LIP
 13 CONTINUE
    NV(K)=NV(K)+1
    J=J+1
  5 CONTINUE
```

```
 4 CONTINUE
   DO 7 I=1,N
   LU=MARK(I,1)
   DO 7 K=1,P
 7 M1(I,K)=M(LU,K)
   WRITE(5, 22) ((M(I,J), J=1,P), I=1,N)
22 FORMAT('O', ///10(3X,I2))
   DO 14 I=1,N
   DO 14 J=1,P
14 M(I,J)=M(I,J)
   RETURN
   END
```

Fig. 3 b.

MULŢIMEA M ORDONATA IN CLASE DE ECHIVALENŢA DUPĂ NUMĂRUL SCHIMBĂRILOR DE SEMN

Q(0) ESTE :	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Q(2) ESTE :	1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1
Q(3) ESTE :	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1
Q(4) ESTE :	1	1	1	−1	1	−1	1	1	1	1
	1	1	1	−1	−1	−1	1	1	−1	1
	1	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1
	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
	1	−1	−1	−1	1	1	1	−1	−1	1
Q(5) ESTE :	1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1
	1	−1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1
Q(6) ESTE :	1	1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
	1	−1	1	−1	1	1	1	−1	−1	1
	1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	1	1
	1	−1	1	−1	−1	−1	1	−1	1	1
	1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1
	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1
	1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	1
Q(7) ESTE :	1	−1	+1	1	+1	−1	1	−1	1	−1
	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1
Q(9) ESTE :	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
ELEMENTUL CĂUTAT										1
ESTE :	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1

X ESTE ÎN CLASA Q(4) ŞI SE AFLA PE POZIŢIA 4

BIBLIOGRAFIE

1. *Avramescu, A.*, Studii şi cercet. de documentare, 13, no. 2, 1971.
2. *Bucur, C.*, Stud. cercet. docum., 3, 1973.
3. *Dorn, W. S.*, Metode numerice cu programe în FORTRAN.
4. *Mc Cracken, D. D.*, Ed. tehnică, 1978.

Un algorithme pour la classification et la possibilité de retrouver les élements d'une collection

Dans cet article on a traité la question de l'organisation d'une collection et la possibilité de retrouver un élément, mais aussi le développement itératif de l'organisation et la possibilité de retrouver un élément, mais aussi le développement itératif de l'organisation de cette collection.

On donne les définitions et les propositions qui permettent la réalisation d'un algorithme qui résout la question; la part finale contient un programme et un exemple roulé.

C.Z.: 511

ON A FAMILY OF REAL NUMBER SEQUENCES AND SOME OF THEIR APPLICATIONS

I. C. DRĂGHICESCU*

In the paper is introduced the (l, S)-couple notion for real number sequences and are due some of its properties. Moreover, this notion is used to the expression of the generalized form of the Kronecker lemma due in [1] and to some applications of this lemma due in [2].

An interesting family of real number sequences appears in connection with a generalization given in [1] to the Kronecker lemma.

Definition. The real number sequences $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ and $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ are called a (l, S)-couple if:

(i) $\quad 0 < a_n \to \infty$ as $n \to \infty$;

(ii) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l \qquad (-\infty < l < \infty).$

We note $\{(a_n), (b_n),\ n \geqslant 1\}$.

The (l, S)-couple $\{(a_n), (b_n),\ n \geqslant 1\}$ is positive if $b_n > 0,\ n \geqslant 1$; it is negative if $b_n < 0,\ n \geqslant 1$.

Properties.

P1. If $\{(a_n), (b_n)\ n \geqslant 1\}$ is a (l, S)-couple then

$$\frac{b_n}{a_n} \to l \text{ as } \quad n \to \infty$$

This property results from Stolz's lemma.

P2. If $\{(a_n), (b_n)\ n \geqslant 1\}$ is a (l, S)-couple and $l \neq 0$ then the sequence $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ is monotonous and unbounded.

If follows from P*1.* condition (i) and the assumption $l \neq 0$ that the sequence $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ could not be bound.

Manuscript received 26 January 1982

* Lecturer, Chair of Mathematics III

On the other hand, from the condition

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} \to l \neq 0 \qquad \text{as} \quad n \to \infty$$

it results

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists) N_\varepsilon : n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} - l \right| < \varepsilon$$

or

$$(l - \varepsilon)(a_{n+1} - a_n) < b_{n+1} - {}_n b < (l + \varepsilon)(a_{n+1} - a_n).$$

Because the sequence $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ is increasing it results that there is a rank from which we have:

$$b_{n+1} - b_n > 0 \text{ if } l > 0 \text{ or } b_{n+1} - b_n < 0 \text{ if } l < 0$$

i.e. $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ is monotonous.

Remark. The condition $l \neq 0$ is essential. If $l = 0$ there exists very large family of sequences $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ — we note $\mathscr{C}$ this class of sequences — with the following property: for each of them there is a sequence $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ so that $\{(a_n), (b_n),\ n \geqslant 1\}$ is a $(0, S)$-couple. For instance:

1) — For every bounded sequence $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ we can consider the sequence $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ for which $0 < a_n \nearrow \infty$ as $n \to \infty$ and $a_{n+1} - a_n \to \infty$ as $n \to \infty$ (Exemple: $a_n = n^2,\ n \geqslant 1$).

2) — If the sequence $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ is unbounded but the sequence $\{b_{n+1} - b_n,\ n \geqslant 1\}$ is bounded we can consider sequences $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ as in the previous case (E. g. $b_n = n + (-1)^n,\ n \geqslant 1$ and $a_n = n^p,\ n \geqslant 1,\ p \leqslant 2$).

3) — Other cases (E. g. $b_n = (-1)^n n^2,\ n \geqslant 1$ and $a_n = n^p,\ n \geqslant 1,\ p \geqslant 4$).

P3. The class $\mathscr{C}$ is a vectorial space on a numerical corps $\mathbb{K}$.

Suffice is to prove that the addition and the product with a number are defined in $\mathscr{C}$; the verification of the axioms is immediate.

To do this we consider two arbitrary elements in $\mathscr{C}$:

$\{(a'_n), (b'_n),\ n \geqslant 1\}$ and $\{(a''_n), (b''_o),\ n \geqslant 1\}$. Then

$$0 < a'_n \nearrow \infty;\ \frac{b'_{n+1} - b'_n}{a'_{n+1} - a'_n} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

$$0 < a''_n \nearrow \infty;\ \frac{b''_{n+1} - b'_n}{a''_{n+1} - a'_n} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

But we have $0 < a'_n + a''_n \nearrow \infty$ as $n \to \infty$ and

$$\left|\frac{(b'_{n+1}+b''_{n+1})-(b'_n+b''_n)}{(a'_{n+1}+a''_{n+1})-(a'_n+a''_n)}\right| = \left|\frac{(b'_{n+1}-b'_n)+(b''_{n+1}-b''_n)}{(a'_{n+1}-a'_n)+(a''_{n+1}-a''_n)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{b'_{n+1}-b'_n}{(a'_{n+1}-a'_n)+(a''_{n+1}-a''_n)}\right| + \left|\frac{b''_{n+1}-b''_n}{(a'_{n+1}-a'_n)+(a''_{n+1}-a''_n)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{b'_{n+1}-b'_n}{a'_{n+1}-a'_n}\right| + \left|\frac{b''_{n+1}-b''_n}{a''_{n+1}-a''_n}\right|$$

because $a'_{n+1} - a'_n \geqslant 0$; $a''_{n+1} - a''_n \geqslant 0$ for $n \geqslant 1$.

Hence

$$\frac{(b'_{n+1}-b''_{n+1})-(b'_n+b''_n)}{(a'_{n+1}-a''_{n+1})-(a'_n+a''_n)} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

On the other hand, if $\{(a_n), (b_n), n \geqslant 1\}$ belongs to $\mathscr{C}$ we have

$$\frac{cb_{n+1}-cb_n}{a_{n+1}-a_n} = \frac{c(b_{n+1}-b_n)}{a_{n+1}-a_n} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

for all $c \in \mathbb{K}$; that is $\{(a_n), (cb_n), n \geqslant 1\} \in \mathscr{C}$ for all $c \in \mathbb{K}$.

Applications

The notion of the (l, S)-couple allows us to give the Kronecker lemma generalization the following wording.

If the series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is convergent and $\{(a_n), (b_n), n \geqslant 1\}$ is a (l, S)-couple then

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} b_K x_K \to 0 \text{ as } n \to \infty;$$

or the equivalent form

Let $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ be a series and let $\{(a_n), (b_n), n \geqslant 1\}$ be a (l, S)-couple, such that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n}$ is convergent. Then

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

Relying on the notion of (l, S)-couple the generalized aspect of the theorems in [2] becomes

Theorem 1.

Let $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ be a sequence of independent random variables and let $\{g_n,\ n \geqslant 1\}$, $g_n \in L^1$ be a sequence of positive, even, nondecreasing functions in the domain $x > 0$ such that for every $n \in N^*$ the functions $x \to x/g_n(x)$ are nondecreasing for $x > 0$.

If $\{(a_n),\ (b_n),\ n \geqslant 1\}$ is a positive (l, S)-couple such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M[g_n(X_n)]}{g_n(b_n)} \text{ converges}$$

then

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to 0 \text{ a.s. as } n \to \infty$$

Theorem 2.

Let $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ be a sequence of independent random variables and let $\{(a_n),\ (b_n),\ n \geqslant 1\}$ be a positive (l, S)-couple such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M[|X_n|^p]}{b_n^p} \text{ converges for } 0 < p < 1.$$

Then

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to 0 \text{ a.s. as } n \to \infty$$

Theorem 3.

Let $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ be a sequence of independent random variables such that $M[X_n] = 0$, $n \geqslant 1$ and let $\{(a_n),\ (b_n),\ n \geqslant 1\}$ be a positive (l, S)-couple such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M[|X_n|^p]}{b_n^p} \text{ converges for } 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

Then

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to 0 \text{ a.s. as } n \to \infty$$

The proofs are due in the mentioned work.

REFERENCES

[1] *Budianu, Gh., Drăghicescu, I. C.*, Gaz. Mat. (București) 85 (1980), no. 2.
[2] *Drăghicescu, I. C.*, Bul. Inst. Pol. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" (București), Tom. XLII no. 2 (1980).

Asupra unei familii de șiruri de numere reale și cîteva proprietăți ale sale

În lucrare este introdusă noțiunea de (l,S)-cuplu pentru șiruri de numere reale și sînt date cîteva proprietăți ale sale. Apoi este aplicată această noțiune la exprimarea formei generalizate a lemei lui Kronecker dată în [1] și la cîteva aplicații ale acestei leme date în [2].

C.Z.: 535.8

ANALIZA BISTABILITĂȚII ELECTROOPTICE IN DISPOZITIVELE OPTICE BISTABILE CU CAVITATE FABRY-PÉROT

I.M. POPESCU, E.N. ȘTEFĂNESCU, P.E. STERIAN *

În lucrare se propune o metodă de analiză teoretică a bistabilității dispozitivelor bistabile electrooptice cu cavitate Fabry-Pérot, utilizindu-se funcțiile de transfer pentru dispozitivul propriu-zis și pentru bucla de reacție. Introducîndu-se parametrul C′ prin analogie cu parametrul cooperativ C de la dispozitivele bistabile „complet" optice se obține ecuația diferențială de funcționare bistabilă și multistabilă a dispozitivului, se determină punctele critice ale ciclului de histerezis și se fac unele considerații privind parametrii de amplificare ai acestuia.

1. Introducere

Spre deosebire de dispozitivele bistabile „complet" optice pentru care neliniaritățile care determină comportarea bistabilă a dispozitivului se obțin prin plasarea unor absorbanți saturabili în interiorul unor rezonatori Fabry — Pérot, în cazul dispozitivelor bistabile electrooptice neliniaritățile sînt produse de elemente electrooptice comandate de semnale provenite de la eșantioanele luminii transmise fotodetectate [1, 2, 4, 8].

Tipurile constructive reprezentative de dispozitive bistabile electrooptice sînt dispozitivele cu cavitate Fabry — Pérot convenționale sau integrate [3, 6] și dispozitivele cu interferometru cu modulator cu ghid de undă (nerezonante [4]).

În lucrare se propune o metodă de analiză teoretică a stabilității dispozitivelor bistabile electrooptice cu cavitate Fabry — Pérot, utilizîndu-se funcțiile de transfer caracteristice dispozitivului propriu — zis și buclei de reacție, cu ajutorul parametrului C′ introdus prin analogie cu parametrul cooperativ C de la dispozitivele bistabile „complet" optice; se obține ecuația diferențială de funcționare bistabilă și multistabilă a dispozitivului, se determină punctele critice ale ciclului de histerezis al acestuia și se fac unele considerații privind parametrii săi de amplificare.

2. Ecuațiile de funcționare și analiza condițiilor de bistabilitate

Schema bloc generală a unui dispozitiv bistabil electro-optic cu cavitate Fabry — Pérot este prezentată în figura 1 [2].

Manuscris primit la data de 2 martie 1982

* Prof. dr. ing., ; Ing. ; Conf. dr. ing., Catedra Fizică

Cristalul electrooptic modulator prezintă un indice de refracție neliniar, funcție de intensitatea cîmpului optic din cavitate.

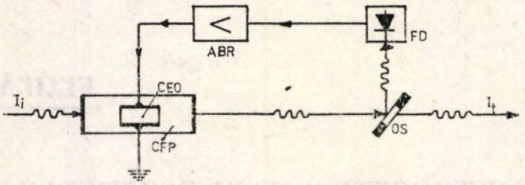


Fig. 1. Schema bloc generală a unui dispozitiv bistabil electrooptic cu cavitate Fabry-Pérot. I_i — fascicul incident; I_t — fascicul transmis; CEO — cristal electrooptic; CFP — cavitate Fabry-Pérot; OS — oglindă semitransparentă; FD — fotodetector; ABR — amplificatorul buclei de reacție.

Dacă I_t este cîmpul optic transmis, iar I_i cîmpul optic incident, atunci caracteristica de transfer a dispozitivului este dată de relația

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\cos^2\Phi} \tag{1}$$

unde Φ este defazajul indus de tensiunea de reacție, iar R este reflectivitatea oglinzilor.

Definind prin analogie cu dispozitivele bistabile complet optice parametrul C' prin relația

$$C' = \frac{4R}{(1-R)^2} \tag{2}$$

se obține

$$T = \frac{1}{1 + C\cos^2\Phi} \tag{3}$$

relație valabilă și în regim dinamic pentru variații mult mai lente decît timpul de viață al fotonului în cavitate.

Pentru o caracteristică a buclei de reacție de forma

$$\Phi = \frac{aI_i}{1 + i\dfrac{\omega}{\omega_0}} \tag{4}$$

unde ω_0 definește polul acesteia, se obține ecuația diferențială de funcționare a dispozitivului

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d\Phi}{dl} + \Phi = \frac{aI_i}{1 + C\cos^2\Phi} \tag{5}$$

a fiind o constantă de proporționalitate.

Introducînd notațiile uzuale $x = aI_t$ și $y = aI_i$ pentru mărimile de ieșire, respectiv de intrare, rezultă caracteristica de transfer a dispozitivului

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{1 + C'\cos^2\Phi} \tag{6}$$

unde Φ este soluția ecuației diferențiale (5).

În regim staționar ($\omega < \omega_0$), pentru $\Phi = x$ se obține caracteristica statică

$$y = x + C' x \cos^2 x \tag{7}$$

Funcție de valoarea parametrului C', curba (7) poate fi monotonă sau poate prezenta maxime și minime.

Pentru mici variații $\delta\Phi$ și δy în jurul punctului staționar (x_0, y_0) se obține ecuația

$$\delta\dot{\Phi} + r\delta\Phi = \Delta \tag{8}$$

unde

$$r = 1 - \frac{C' \sin 2\Phi_0}{(1 + C' \cos^2 \Phi_0)^2} \cdot y_0 \tag{9}$$

și

$$\Delta = \frac{\delta y}{1 + C' \cos^2 \Phi_0} \tag{10}$$

a cărei soluție are forma generală

$$\delta\Phi = \text{const. } e^{-r\theta} + \frac{\Delta}{r}(1 - e^{-r\theta}) \tag{11}$$

rezultă că sistemul este stabil dacă este îndeplinită condiția

$$1 - \frac{C' \sin 2x}{1 + C' \cos^2 x} x > 1 \tag{12}$$

În intervalele $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ se obțin limitele zonei de stabilitate din condiția

$$x < \frac{1 + C' \cos^2 x}{C' \sin^2 2x} \tag{13}$$

În intervalele $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k\pi\right)$,

$$x > \frac{1 + C' \cos^2 x}{C' \sin 2x} \tag{14}$$

și sistemul este întotdeauna stabil.

Se observă că limitele zonei de stabilitate corespund cu extremele curbei (7), date de condiția

$$x = \frac{1 + C' \cos^2 x}{C' \sin 2x} \tag{15}$$

Reprezentarea grafică a curbei (7) și a celor doi membri ai ecuației (15) pe care-i notăm cu z pe grafic pentru diferite valori ale parametrului C' este dată în figurile 2a și 2b. În figura 3 s-a reprezentat grafic dependența

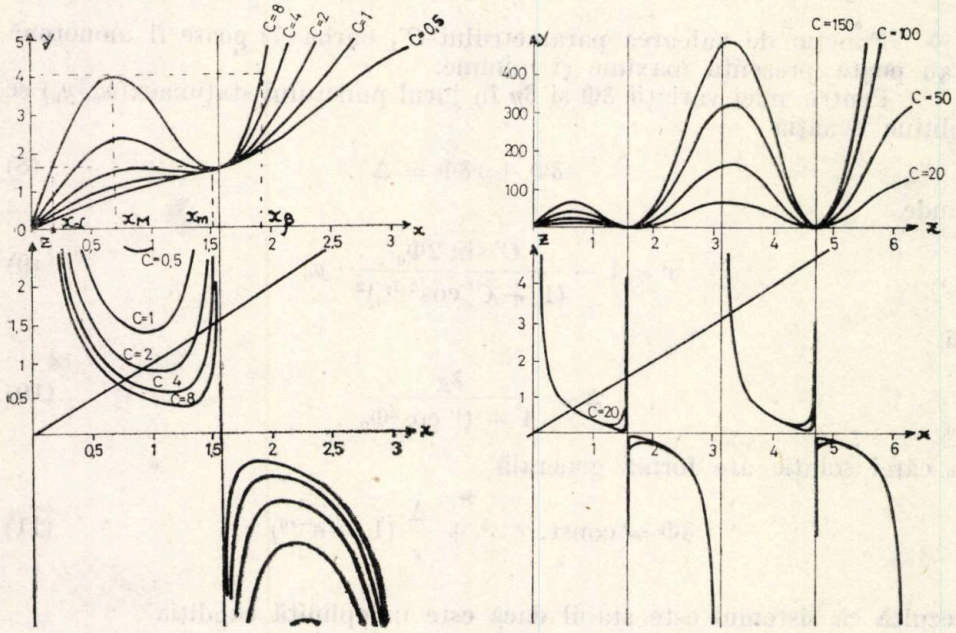


Fig. 2. Caracteristica de funcționare bistabilă a dispozitivului și curbele care determină domeniile de stabilitate ale acestuia.

dintre reflectivitatea oglinzii și parametrul C'. Fie, de exemplu, x' și x'' cele două puncte de intersecție în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pentru $x \in (x', x'')$ sistemul este instabil, pe cînd în intervalele $(0, x')$ și $\left(x'', \frac{\pi}{2}\right)$ sistemul stabil.

Condiția de apariție a fenomenului de bistabilitate într-un anumit interval $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ este ca graficele funcțiilor celor doi membri ai ecuației (15) să se intersecteze în cel puțin un punct x_1 la limita de apariție a fenomenului.

Cele două curbe au pantele egale pentru valori $x_1 = \text{arctg } t$, unde t este o soluție a ecuației

$$t^3 - t^2 - (C - 1)\, t - 1 - C = 0 \quad (16)$$

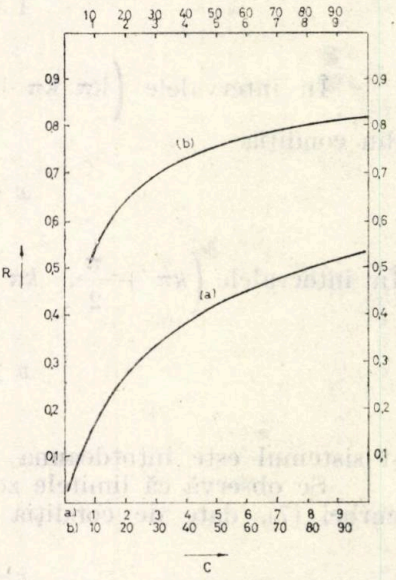


Fig. 3. Dependența reflectivității oglinzii de parametrul C'.

Totodată se observă că punctele de inflexiune ale caracteristicii sînt date de ecuația transcendentă

$$x_i + \operatorname{tg} 2x_i = 0 \tag{17}$$

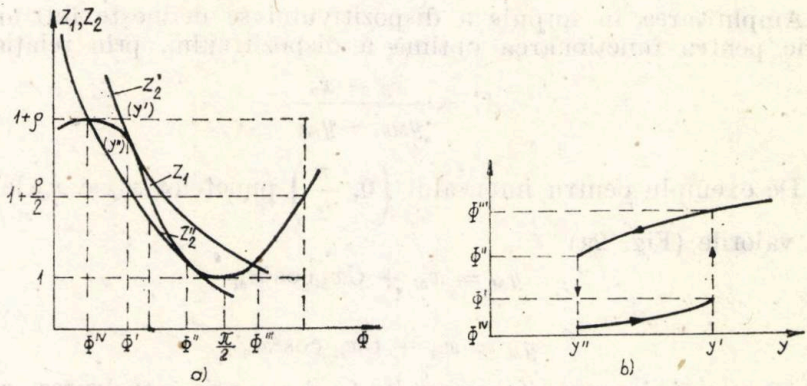


Fig. 4. Evoluția stărilor și evidențierea ciclului histerezis al dispozitivului.

Evoluția stărilor sistemului bistabil și evidențierea ciclului de histerezis al acestuia rezultă din ecuația (6) scrisă sub forma

$$z_1 = z_2 \tag{18}$$

unde

$$z_1 = 1 + \rho \cos^2\Phi \text{ și } z_2 = \frac{y}{\Phi},$$

care conduce la reprezentarea grafică din figura 4a.

Punînd condiția ca graficele reprezentate de z_1 și z_2 să fie tangente rezultă condiția (15) astfel că punctele de tangență nu pot fi altele decît limitele zonei de stabilitate Φ' și Φ'' cărora le corespund hiperbolele

$$z_2' = \frac{y'}{\Phi'} \quad \text{și} \quad z_2'' = \frac{y''}{\Phi''} \tag{19}$$

Soluțiile ecuațiilor (18) pentru valorile limită z_2' și z_2'' determină punctele Φ, Φ^{III}, Φ^{II}, Φ^{VI} care fixează limitele ciclului histerezis al dispozitivului (figura 4b), sensul de parcurgere al ciclului fiind cel marcat cu săgeți pe figură (I → III → II → IV).

3. Unele considerații privind parametrii de amplificare ai dispozitivului

Amplificarea în regim cuasistaționar a dispozitivului se definește cu ajutorul relației

$$A_\delta = \frac{\delta x}{\delta y} \tag{10}$$

unde δx și δy sînt mici variații ale semnalelor de ieșire respectiv de intrare în jurul punctului staționar (x_0, y_0). Ținînd seama de ecuația (7) se obține

$$A_\delta = \frac{1}{y'} = [1 + C'(\cos^2 x - x \sin 2x)]^{-1} \tag{21}$$

Amplificarea maximă se obţine în punctul de inflexiune.

$$A_{\delta M} = \left[1 - C' \frac{2x_i + 1}{1 + (1 + x_i^{-1})^2}\right]^{-1} \to \infty$$

Amplificarea în impuls a dispozitivului se defineşte într-un mod specific pentru funcţionarea optimă a dispozitivului, prin relaţia [6]:

$$A_i = \frac{x_\beta - x_\alpha}{y_{Mk} - y_{mk}} \tag{23}$$

De exemplu pentru intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ punctelor x_M şi x_m le corespund valorile (Fig. 2a)

$$y_M = x_M + Cx_M \cos^2 x_M \tag{24}$$

şi

$$y_m = x_m + Cx_m \cos^2 x_m$$

astfel că pot fi determinate punctele x_α şi x_β, prin rezolvarea ecuaţiei transcendente (15). Caracteristicile prezentate în figurile 2 şi 5 evidenţiază posibilitatea funcţionării multistabile a dispozitivului, dacă în intervalul (y_{mk} şi y_{Mk}) ecuaţia (7) are mai mult de trei rădăcini, comportare deosebit de interesantă pentru aplicaţii [5, 6, 7].

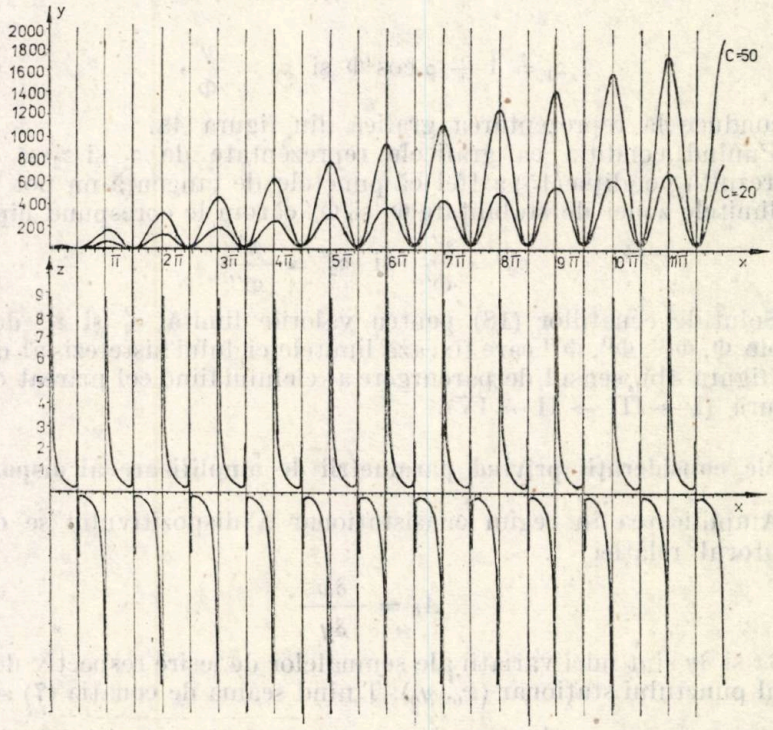


Fig. 5. Evidenţierea posibilităţii de operare stabilă a dispozitivului, pentru două valori ale parametrului C'.

Timpul de răspuns al dispozitivului este dat de timpul de răspuns al buclei de reacție, fiind de ordinul $1/\omega_0$ sec.

4. Concluzii

Funcționarea dispozitivelor optice bistabile cu cavitate Fabry-Pérot se pretează la o analiză teoretică riguroasă, utilizîndu-se funcțiile de transfer pentru dispozitivul propriu-zis și bucla de reacție în vederea obținerii ecuației diferențiale de funcționare bistabilă și multistabilă a acestora.

Cu ajutorul parametrului C', introdus prin analogie cu parametrul C cooperativ cunoscut de la studiul dispozitivelor bistabile „complet" optice, s-au putut trasa familiile de curbe, care descriu funcționarea dispozitivului și a fost posibilă deducerea pe cale grafică a limitelor zonei de funcționare bistabilă.

Concluziile obținute permit caracterizarea dispozitivelor de acest tip din punct de vedere sistemic pentru a putea fi utilizate ca elemente opto-electronice de circuit.

Metoda de analiză prezentată în lucrare este generală putîndu-se utiliza pentru studiul oricărui tip de dispozitiv optic bistabil cu neliniarități induse de fază.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Bonifacio, L. A. Lugiato*, Physical Review A, vol. 18, no. 3, september 1978, pp. 1129—1144.
2. *P. W. Smith, E. H. Turner*, Applied Physics Letters, vol. 30, Nr. 6, March 1977, pp. 280—281.
3. *Peter W. Smith, E. H. Turner, Patrik J. Maloney*, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. QE—14, No. 3, March 1978, pp. 207—212.
4. *A. Schnapper, M. Papuchon, C. Puech*, Optics Communications, Vol. 29, No. 3, June 1979, pp. 364—368.
5. *A. Szoke, V. Dancu, J. Goldhar, N. A. Kurnit*, Applied Physics Letters, Vol. 15, No. 11, December 1969D, pp. 376—379.
6. *I. M. Popescu, E. N. Ștefănescu, P. E. Sterian*, „Parametrii funcționali ai dispozitivelor bistabile optice", Al doilea Simpozion Național de Microunde și Optoelectronică, București, Noiembrie 1981.
7. *T. Bischofberger, Y. R. Shen*, Applied Physics Letters, vol. 32, No. 3, February 1978, pp. 156—158.
8. *H. Seidel*, „Bistable optical circuit using saturable absorber within a resonant cavity, U. S. Patent No. 3610371.

Bistability Analysis in the Electrooptical Bistable Fabry—Pérot Devices

In the present paper is proposed a method for theoretical analysis of the stability of the electrooptical bistable Fabry-Pérot devices using the transfer functions for both the device and the feedback loop.

Using the parameter C′ defined for this type of devices by analogy with the cooperative parameter C of the „complet" optical bistable devices, is obtained the differential equation for bistable and multistable operation of the device.

The histerezis cycle and some considerations on the amplification capabilities of the devices are also analysed in the paper.

C.Z. : 621. 315. 5

PHYSICAL PROBLEMS IN THE DESIGN OF THE CRYOGENIC CABLES III. THE EVALUATION OF THE TRANSVERSAL TEMPERATURE DISTRIBUTION IN STEADY STATES OF CYLINDRICALLY SYMMETRIC CABLES

GH. LĂZĂRESCU, D. IORDACHE, VL. IANCU, LILIANA POPA *, I. POP **, VIORICA TUDORICU ***

The thermal steady state equation for cylindrically symmetric cables and the solid-solid and solid-fluid continuity equations are studied, the possibility of the evaluation of the transversal temperature distribution in a cable cross-section zone by iterative methods (starting from the previously calculated longitudinal temperature distribution) being pointed out. The finite difference method is discussed, using matriceal recurrence equations. The numerical quadrature method is also analysed. Computations for the inner zone of an Al/LN_2 cryoresistive cable are carried out in the first order approximation with both methods, but with different assumptions concerning the solid-solid and solid-fluid continuity equations, and the obtained results are discussed.

Introduction

As it was discussed in detail in a previous paper [1], the main physical parameters of cryogenic cables (the electrical conductivity of hyperconductors, the thermal conductivity and convective heat transfer coefficients, etc.) depend strongly on temperature. Due to the great variation of temperature within a cryogenic cable and often within certain components of the cable, the evaluation of the temperature distribution in a cryogenic cable is a problem of great interest.

The steady state thermal equation in a cable with cylindrical symmetry [2]:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) - T \cdot g_S \tag{1}$$

can be used to evaluate the transversal distribution of temperature, if the longitudinal distribution of cryogenic fluid temperature $T_f(z)$ is known

Manuscript received February 19 1982

* Lect. Ph. D. ; Conf. Ph. D. ; Assist. ; Assist,. Physics Department of the Polytechnical Institute of Bucharest ; **Scientific researcher, Res. Inst. Electrotechn. Ind., Bucharest ; *** Student.

(it can be evaluated using the Edney-Fox-Gilbert method [3], or our improved [4] method). This calculation is simplified because for all cryogenic cable components: $\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right| \ll (T \cdot g_S)\cdot$ (2)

The thermal conductivity λ, the coefficient of convective heat transfer h and, especially, the volumic g_S, and surface σ_S densities of the rate of entropy generation [1], which are used in eq. (1) and in the solid-solid, respectively in the solid-fluid continuity equations [2]:

$$-\lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_2 + \lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_1 = T\cdot\sigma_S,$$

$$h(T_s - T_f) = T_s\cdot\sigma_S \pm \lambda_s\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_s, \tag{3}$$

have sometimes important variations, even for small variation of temperature (a few K) near the cryogenic fluid temperature. For this reason, it is very difficult to solve the system of partial differential eqs. (1), (3), and usually this system is solved by means of successive approximation methods. Since the iterative methods presented in this paper are based on the previously evaluation of the longitudinal distribution of the cryogenic fluid temperature, these methods will be used for the evaluation of the temperature transversal distribution in a cable cross section, bounded by 2 fluids (for instance, the inner zone of the cable, between two counterflow channels, respectively the outer zone, between the outer channel and surroundings).

1. The evaluation of the transversal distribution of temperature, by means of the finite difference method

In order to solve the system formed by the N equations (where N is the number of components of a cross-section zone of the cryogenic cable):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{T\cdot g_S}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{4}$$

and the 2N continuity equations (3), by means of the finite difference method [5], we choose an unidimensional array with the step $\Delta r(>0)$, along the radius of the cable cross-section: r_1, $r_1 + \Delta r$, ... $r_j = r_1 + (j-1)\Delta r$, ..., r_n. We use the symbols: T_{jI} for the temperature I-th order approximation at r_j, h_{jI}, λ_{jI} and $\lambda_{j+1,I}$ for the values of the convective heat transfer and, respectively, of the thermal conductivities corresponding to the temperatures T_{jI}, respectively $T_{j+1,I}$ m_{jI}, n_{jI}, m'_{jI}, n'_{jI} for the parameters of the regression lines:

$$\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{Tg_S}{\lambda}\right]_{r_j,T} = m_{jI}\,T + n_{jI},$$

$$T\sigma_S(r_j, T) = m'_{jI}T + n'_{jI}. \tag{5}$$

The eq. (4) can be written in the form:

$$\frac{T_{j+1,I+1} - 2T_{j,I+1} + T_{j-1,I+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_j}\frac{T_{j+1,I+1} - T_{j,I+1}}{\Delta r} +$$

$$+ \frac{\lambda_{j+1,I} - \lambda_{jI}}{\lambda_{jI} \cdot \Delta r}\frac{T_{j+1,I+1} - T_{j,I+1}}{\Delta r} + m_{jI} \cdot T_{j,I+1} + n_{jI} = 0, \qquad (6)$$

at any point r_j inside a certain component of the cryogenic cable. The eq. (6) is equivalent with a linear equation of recurrence:

$$T_{j+1;I+1} = c_{j,I+1}T_{j,I+1} + c_{j-1;I+1}T_{j-1,I+1} + a_{j,I+1}, \qquad (7)$$

therefore with a matriceal recurrence relation of the type:

$$\begin{pmatrix} T_{j+1,\,I+1} \\ T_{j,I+1} \\ a_{j+1,I+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{j,I+1} & c_{j-1,I+1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_{j+1,I+1}}{a_{j,I+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{j,I+1} \\ T_{j-1,I+1} \\ a_{j,I+1} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

where the 3×3 matrix will be noted $\overline{\overline{M}}_{j,I+1}$.

In this way, between the temperatures $T_{i,I+1}$ and $T_{i+1,I+1}$, corresponding to the first two points of array inside of a certain solid component of the considered cable zone, and the temperatures $T_{k-1,I+1}$ and $T_{k,I+1}$, corresponding to the last two inner points of the same component, there are two linear equations corresponding to the matriceal relation:

$$\begin{pmatrix} T_{k,I+1} \\ T_{k-1,I+1} \\ a_{k,I+1} \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}}_{k-1,I+1} \times \overline{\overline{M}}_{k-2,I+1} \times \ldots \times \overline{\overline{M}}_{i+1,I+1} \begin{pmatrix} T_{i+1,I+1} \\ T_{i,I+1} \\ a_{i+1,I+1} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

The temperature $(I+1)^{th}$ iteration is obtained using the Ith iteration and the solid-solid continuity equations at r_i and r_k:

$$-\lambda_{iI}^{int.} \cdot \frac{T_{i,I+1} - T_{i-1,I+1}}{\Delta r} + \lambda_{iI}^{ext.} \cdot \frac{T_{i+1,I+1} - T_{i,I+1}}{\Delta r} =$$

$$= m'_{iI} \cdot T_{i,I+1} + n'_{iI}, \qquad (10)$$

and also the solid-fluid continuity equations:

$$h_{iI}(T_{i,I+1}^{sol.} - T_{i,I+1}^{fl.}) = m'_{iI} \cdot T_{i,I+1} + \lambda_{iI} \cdot \frac{T_{i+1,I+1} - T_{i,I+1}}{\Delta r} + n'_{iI}. \qquad (11)$$

The zero-order approximation of the transversal distribution of temperature can be obtained with the same method if we consider the physical parameters λ, h, g_S and σ_S as being independent of temperature.

2. The evaluation of the transversal distribution of temperature by means of the numerical quadrature method

Starting from the Ith order approximation of the transversal distribution of temperature in the cross-section with $z = z_0$: $T(r, z_0)$ the equation (1) becames — at this section — the form of the recurrence relation :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r \cdot \lambda\left(T_I(r, z_0)\right)\frac{\mathrm{d}T_{I+1}}{\mathrm{d}r}\right] = f(T_I(r, z_0)), \tag{12}$$

where the evaluation of the function $f(T_I(r, z_0))$ is easier, if we use the relation (2).

Integrating eq. (12), we obtain :

$$r\lambda\frac{\mathrm{d}T_{I+1}}{\mathrm{d}r} = \int_{r_k}^{r} r'f \cdot \mathrm{d}r' + C_k = F_k(r) + C_k, \tag{13}$$

and :

$$T_{I+1}(r, z_0) = \int_{r_k}^{r}\frac{F_k(r')\mathrm{d}r'}{r'\lambda} + C_k\int_{r_k}^{r}\frac{\mathrm{d}r'}{r'\lambda} + D_k = G_k(r) + C_kH_k(r) + D_k, \tag{14}$$

where r_k is the inner radius of the component $k\,(=1, 2, \ldots N)$ of the considered zone of cable, so that $r \in [r_k, r_{k+1})$.

For every of the N—1 solid-solid separation surfaces, with the inner radius r_k, we have the conditions :

$$T^{\text{int.}}_{I+1}(r_k, z_0) = G_{k-1}(r_k) + C_{k-1}H_{k-1}(r_k) + D_{k-1} = D_k = T^{\text{ext.}}_{I+1}(r_k, z_0), \tag{15}$$

$$\left(\lambda\frac{\mathrm{d}T_{I+1}}{\mathrm{d}r}\right)_{\text{int.}r_k} = \frac{F_{k-1}(r_k) + C_{k-1}}{r_k} = \frac{C_k}{r_k} \pm (T_I\sigma_{S,I})_{r_k} =$$

$$= \left(\lambda\frac{\mathrm{d}T_{I+1}}{\mathrm{d}r}\right)_{\text{ext.}r_k} \pm (T_I\sigma_{S,I})_{r_k}, \tag{16}$$

and for the solid-fluid separation surfaces (r_1, R_N) we have the conditions :

$$(h_1 - \sigma_{S,1}(r_1))\, D_1 - h_1 T_{f1} = \pm \frac{C_1}{r_1}, \tag{17}$$

$$(h_N - \sigma_{S,1}(R_N))\,(G_N(R_N) + C_N \cdot H_N(R_N) + D_N) - h_N T_{f,N} = \pm \frac{(F_N(R_N) + C_N)}{R_N}, \tag{18}$$

(where R_N is the outer radius of the last solid component of the considered zone), that means 2N linear equations with 2N unknowns (C_k, D_k; $k = 1, 2, \ldots N$). Because the constants C_k can have negative values, the curvature of the graphs $T(r)$, which is usually negative, can be sometimes positive.

3. Numerical results for the inner zone of an Al/LN_2 cryoresistive cable

The temperature transversal distribution for the internal zone of an experimental model of a cryoresistive cable was evaluated. The parameters of the zone geometry are [6]: the hyperconductor inner radius (the same as the radius of the internal LN_2 channel) $r_1 = 7$ mm, the electrical insulator (polyethylene terephtalate) inner radius $r_{PET} = 14$ mm and the electrical insulator external radius (the same as the inner radius of the external LN_2 channel) $R_N = r_n = 35$ mm. We considered two possibilities: a) the physical parameters have a continuous variation because of metal-electroinsulation microweldings produced by the high electrical fields in hyperconductor; b) the physical parameters are discontinuous at metal-electroinsulator surfaces. Applying the Edney-Fox-Gilbert method [3], we evaluate the counterflow fluid temperature in the two channels, choosing five cross-sections for which the temperatures in the inner and outer channels are: $T_i = 77 \cdot 32$ K, $T_e = 82.436$ K (Section 1), $T_i = 84.67$ K, $T_e = 84.942$ K (Section 2), $T_i = 84.94$ K, $T_e = 84.835$ K (Section 3), $T_i = 87.42$ K, $T_e = 83.19$ K (Section 4), $T_i = 86.204$ K, $T_e = 77.32$ K (Section 5), for the similarity values: $Re_{int} = 1.4 \times 10^5$, $Re_{ext} = 5.4 \times 10^5$, $Pr = 2.4$. The evaluation of the temperature transversal distribution was done for an electrical current I = 5.25 kA in conductor (aluminium), in the hypothesis of constant values of the thermal conductivities of aluminium $\left(\lambda_{Al} = 290 \frac{W}{m.K}\right)$, polyethylene-terephtalate $\left(\lambda_{PET} = 0.12 \frac{W}{m.K}\right)$ and of the liquid nitrogen $\left(0.135 \frac{W}{m.K}\right)$, the values of the convective heat exchange coefficients being evaluated by means of the relations :

$$h_{int} = \lambda_{LN_2} \cdot \frac{Nu_{int}}{r_i}, \quad h_{ext} = \lambda_{LN_2} \cdot \frac{Nu_{ext}}{r_e}, \tag{19}$$

the Nusselt similarity criterion being evaluated with the semiempirical relation [7]:

$$Nu = 0.024\ Re^{0.8} Pr^{0.4}. \tag{20}$$

We neglect the term $\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)$ because of inequality (2), and the terms proportional with g_S, in electrical insulation.

a) *The case of the continuous variation of physical parameters at the metal-electroinsulation contact surface*

The calculation is based on the following assumptions: 1) the contributions of the thermal conduction and of the entropy surface generations of the thermal conduction and of the entropy surface generation to the terms of the solid-fluid continuity equation: $\frac{1}{h} \cdot T_s \sigma_S$, $\frac{\lambda}{h}\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right| \ll T_s$, that means the temperature continuity on the solid-fluid separation surface *, 2) the continuity of terms in eq. (4) on solid-solid separation surfaces. With these assumptions, the equation (6) can be written in the points r_j of an inner component of the internal zone of cable in the form:

$$\frac{T_{j+1,0} - 2\,T_{j0} + T_{j-1,0}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_j} \cdot \frac{T_{j+1,0} - T_{j0}}{\Delta r} + n_{j0} = 0, \tag{21}$$

respectively, in the points r_i situated on the solid-fluid separation surfaces (for enough small Δr):

$$\frac{T_{i+1,0} - 2\,T_{i0} + T_{i-1,0}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_i} \cdot \frac{T_{i+1,0} - T_{i0}}{\Delta r} + \frac{1}{2}(n_{i0}^{\text{int.}} + n_{i0}^{\text{ext.}}) = 0. \tag{22}$$

In this case, the matriceal equation (9) can be extended for the entire inner zone, obtaining:

$$\begin{pmatrix} T_{n0} \\ T_{n-1,0} \\ a_{n0} \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}}_{n-1,0} \times \overline{\overline{M}}_{n-2,0} \times \ldots \times \overline{\overline{M}}_{20} \begin{pmatrix} T_{20} \\ T_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

---

* Since for the usual flows $Nu = \frac{hR}{\lambda} \sim 10^2$, and in the space between the two channels $\left|\frac{d(\ln T)}{d(\ln r)}\right| < 1$, it results that: $\frac{\lambda}{h}\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right|_s = T_s \left|\frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln r)}\right| \frac{1}{Nu} \ll T_s$; for weak superficial entropy sources (in the usual case of the hyperconductors with superinsulation) $\frac{1}{h}\sigma_S \ll 1$ and the temperature continuity on the solid-fluid contact surface is rather well satisfied.

If M_{11}, M_{12}, M_{13} are the elements of the first line of the product matrix $\bar{M}_{n-1,0} \times \bar{M}_{n-2,0} \times \ldots \times \bar{M}_{20}$, we have:

$$T_{n0} = M_{11} T_{20} - M_{12} T_{10} - M_{13} a_{20}, \tag{24}$$

equation which permits the determination of the temperature T_{20} (T_{10} and T_{n0} are the temperatures of the cryogenic fluid in the inner, respectively in the outer channel, in conformity with the first assumption). If T_{20} was determined, the zero-order approximation of temperature in all points of array can be calculated with the matriceal relation:

$$\begin{pmatrix} T_{k0} \\ T_{k-1,0} \\ a_{k0} \end{pmatrix} = \bar{\bar{M}}_{k-1,0} \times \bar{\bar{M}}_{k-2,0} \times \ldots \times \bar{M}_{20} \begin{pmatrix} T_{20} \\ T_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

The obtained results concerning the temperature transversal distribution in the 5 specified cross-sections of the considered experimental model are presented in Fig. 1.

b) *The case of the discontinuous variation of physical parameters at the metal-electroinsulation contact surface*

With the assumptions specified in the first (general) part of this section, the solution of eq. (2) is:

$$r \cdot \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\lambda}{2} n_{j0} \cdot r^2 + C, \tag{26}$$

resulting that

$$T(r) = -\frac{1}{4} n_{j0} \cdot r^2 + \frac{C}{\lambda} \ln r + D. \tag{27}$$

At the metal-electroinsulation contact surface (with $r = r_{\mathrm{PET}}$), we have the conditions:

$$T_{\mathrm{int}} = -\frac{1}{4} n_{j0}^{\mathrm{int}} \cdot r_{\mathrm{PET}}^2 + \frac{C_{\mathrm{int}}}{\lambda_{\mathrm{int}}} \ln r_{\mathrm{PET}} + D_{\mathrm{int}} = -\frac{1}{4} n_{j0}^{\mathrm{ext}} \cdot r_{\mathrm{PET}}^2 +$$

$$+ \frac{C_{\mathrm{ext}}}{\lambda_{\mathrm{ext}}} \cdot \ln r_{\mathrm{PET}} + D_{\mathrm{ext}} = T_{\mathrm{ext}}, \tag{28}$$

$$\left(\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_{\mathrm{int}} = -\frac{\lambda^{\mathrm{int}} \cdot n_{j0}^{\mathrm{int}}}{2} \cdot r_{\mathrm{PET}} + \frac{C_{\mathrm{int}}}{r_{\mathrm{PET}}} = -\frac{\lambda^{\mathrm{ext}} \cdot n_{j0}^{\mathrm{ext}}}{2} + \frac{C_{\mathrm{ext}}}{r_{\mathrm{PET}}} \triangleq T_{\mathrm{PET}} \cdot \sigma_S, \tag{29}$$

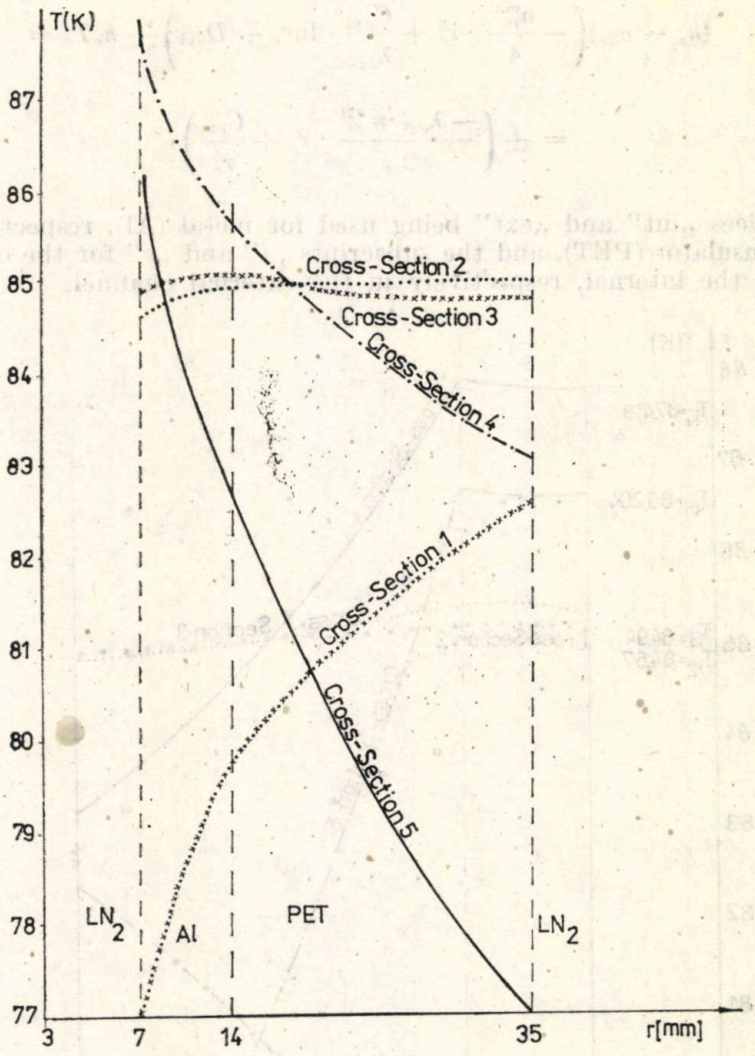


Fig. 1

and at solid-fluid separation surfaces (r_i, r_e) we have the conditions:

$$(h_i - \sigma_{Si})\left(-\frac{n_{j0}^{\text{int}}}{4}\cdot r_i^2 + \frac{C_{\text{int}}}{\lambda_{\text{int}}}\cdot \ln r_i + D_{\text{int}}\right) - h_i T_i =$$

$$= \mp\left(\frac{-\lambda_{\text{int}}\cdot n_{j0}^{\text{int}}}{2}\cdot r_i + \frac{C_{\text{int}}}{r_i}\right), \tag{30}$$

$$(h_e - \sigma_{Se})\left(-\frac{n_{j0}^{ext}}{4}\cdot r_e^2 + \frac{C_{ext}}{\lambda_{ext}}\cdot \ln r_e + D_{ext}\right) - h_e T_e =$$

$$= \pm\left(\frac{-\lambda_{ext}\cdot n_{j0}^{ext}}{2}\cdot r_e + \frac{C_{ext}}{r_e}\right), \tag{31}$$

the indices „int" and „ext" being used for metal (Al), respectively for electroinsulator (PET), and the subscripts „i" and „e" for the cryogenic fluid in the internal, respectively in the external channel.

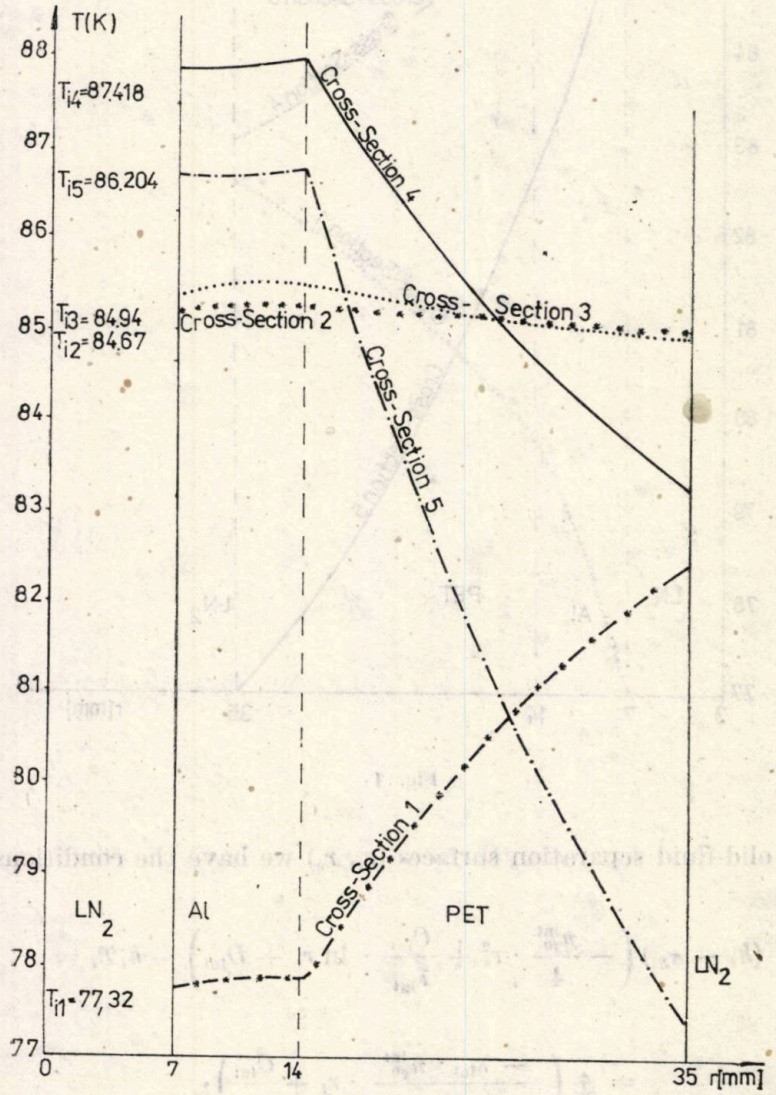


Fig. 2

The relations (28)—(31) form a system of four linear equations with an equal number of unknowns (C_i, D_j), whose solution permits the evaluation of the temperature transversal distribution in the indicated conditions (of the zero-order approximation).

The obtained numerical results are presented — for all the five specified cross-sections — in Fig. 2.

4. Analysis of the obtained results and conclusions

From Fig. 2 one finds that the assumption of the temperature continuity on the solid-fluid separation surfaces is in good agreement with the obtained results for the outer channel surface, while for the inner channel surface certain disagreement occurs (the cryogenic fluid temperature being with about 0.5 K lower then that of aluminium of the contact surface). Other disagreements — due also to the accepted different work assumptions — between the results obtained for the two considered cases are found for the sign of $\frac{dT}{dr}$ in aluminium for the two last cross-sections (4 and 5), respectively with regard to the continuity of $\frac{dT}{dr}$ on the aluminium-polyethylene terephtalate separation surface. The amplitude of the difference of the temperatures corresponding — for the two considered cases — to the different points of the inner cable zone no exceeds 3 K for the considered values of the cable work regime parameters.

The obtained results prove that the proposed methods permit the obtainment of useful knowledges concerning the temperature transversal distribution in cryogenic cables by means of computations of acceptable volume. For the improvement of the accuracy of these results, the iterative procedure presented in the first part of this paper must to be used.

REFERENCES

1. *D. Iordache, M. Stan, L. Daniello, Gh. Lăzărescu*, Bul. Polytechn. Inst. Bucharest, Electr. S., 41 (4) 11 (1979).
2. *D. Iordache, Vl. Iancu, Gh. Lăzărescu, I. Pop, L. Iftode, C. Mocuța*, Bul. Polytechn. Inst. Bucharest, Electr. S., 43 (2)(15) (1981).
3. *K. Edney, M. Fox, G. Gilbert*, Cryogenics, 7(6) 355 (1967).
4. *Vl. Iancu, D. Iordache, M. Stan, D. Gavrilă, Gh. Lăzărescu, A. Tomovici*, Bul. Polytechn. Inst. Bucharest, Electr. S. (to be published, as no. 2 of this series).
5. *S. K. Godunov, V. S. Reabenki* „Scheme de calcul cu diferențe finite", Edit. tehnică, Bucharest, 1977.
6. *I. Pop, Gh. Nistor*, 2nd Nat. Colloq. Cryog., Univ. Craiova, Craiova, 1980.
7. *P. Perroud, J. Rebière, L. Weil* „Convection forcée de l'azote et de l'hydrogène liquides", in „Pure and Applied Cryogenics", vol. 4, p. 155, Pergamon Press, Oxford, 1966.

Probleme fizice în proiectarea cablurilor criogenice
II. Evaluarea distribuției transversale a temperaturii în stări de echilibru ale cablurilor de simetrie cilindrică

Ecuația termică a stării de echilibru pentru cabluri de simetrie cilindrică și ecuațiile de continuitate solid-solid și solid-fluid au fost studiate, fiind evidențiată posibilitatea evaluării distribuției transversale a temperaturii într-o secțiune transversală a cablului prin metode iterative (pornind de la distribuția longitudinală a temperaturii calculată în prealabil). Metoda diferențelor finite este discutată, folosind ecuații matriceale de recurență. Metoda cuadraturii numerice este analizată, de asemenea. Sînt efectuate calcule pentru zona interioară a unui cablu criorezistiv Al/LN_2 în aproximația de ordinul întîi prin ambele metode, dar cu ipoteze diferite privind ecuațiile de continuitate solid-solid și solid-fluid, iar rezultatele obținute sînt discutate.

C.Z.: 517.512 : 550.3

PROPAGATION OF SH WAVES IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH IRREGULAR INTERFACE LYING OVER AN INITIALLY STRESSED ELASTIC HALF-SPACE

A. CHATTOPADHYAY, A. K. PAL *

The propagation of SH waves in a non-homogeneous medium lying over a semi-infinite homogeneous prestressed medium due to irregularity in the crustal layer have been studied in this paper. The non homogeneity in the crustal layer is assumed to be of the form $\mu = \mu_0 e^{\alpha z}$, $\rho = \rho_0 e^{\alpha z}$ where ρ_0, μ_0 and α are constants.

1. Introduction

The problem of wave propagation in an inhomogeneous medium with irregular interface lying over a pre—stressed elastic half-space is important to Geophysicists, because knowledge in the field of irregularity we help them to understand and predict the seismic behaviour at continental margins, mountain roots etc. Also any realistic model of earth must taken into account the continuous change in elastic properties in the material of the vertical direction. A significant quantity of initial stress may develop in a medium due to many physical causes. In fact, the Earth is an initially stressed medium. So in the study of seismic waves, the problem of propagation of SH waves in an inhomogeneous medium with irregular interface lying over an initially stressed medium plays an important role.

The perturbation technique indicated by Erigen and Samuels [1] has been applied to solve the problem. This approximate method were successfully employed by Ghosh [2], Mal [3], Bhattacharya [4] and Chattopadhyay [5].

The propagation of SH waves in layered media having different types of variation of the crustal thickness have been discussed by several authors. Satô [6] studied the propagation of SH waves in a layer with abrupt change in thickness. De Noyer [7] considered the problem in which thickness vary as a sine function of the distance. Mal investigated

Manuscript received June 21 1982
* Physics and Mathematics Dept., Indian School of Mines

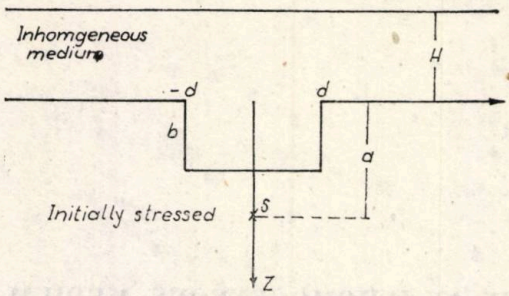


Fig. 1

the problem when the thickness of layer abruptly increases throughout a certain length of the path. Chattopadhyay and Kar [8] established the dispersion curves of Love type waves in an initially stressed crustal layer having an irregular interface. Wolf. [9] discussed the propagation of love waves in an isotropic layer with irregular boundary.

But none of the authors have considered the lower semi-infinite medium to be pre-stressed condition. In this paper we have obtained the dispersion equation of SH waves in an inhomogeneous medium with irregular interface lying over an initially stressed elastic half-space.

2. Formulation and solution of the problem

We choose the origin at the middle point on the irregularity of the common boundary. The x-axis is taken along the interface while z-axis vertically downwards. We assume that the irregularity is of the form of a rectangle length 2d and depth b. Apart from the irregularity the upper crust is assumed to be of uniform thickness H. Let S be the position of the source of disturbance taken on the z-axis at a depth a ($>b$) below the origin (fig. 1). Also we assume that the lower semi-infinite medium is under constant initial compressive stress P along x-axis with rigidity and density as μ_2 and ρ_2 respectively. The inhomogeneity of the upper layer is taken of the form

$$\rho_1 = \rho_0 e^{\alpha z}, \quad \mu_1 = \mu_0 e^{\alpha z} \tag{1}$$

so that

$$\frac{\mu_1}{\rho_1} = \frac{\mu_0}{\rho_0}$$

where

$$\rho_0, \ \mu_0, \ \alpha \text{ are constants.}$$

The boundary between the upper layer and lower semiinfinite medium is assumed to be of the form

$$z = \varepsilon g(x) \tag{2}$$

where

$$\varepsilon g(x) = \begin{cases} b \text{ for } |x| < d, \\ 0 \text{ for } |x| > d. \end{cases} \tag{3}$$

We select $\varepsilon = \dfrac{b}{2d} \ll 1$.

For love wave propagation we have, $u = w = 0$, $v = v\ (x, z, t)$.
In absence of body force the equation of motion in the upper layer that one exists is

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \tag{4}$$

where $\beta_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$.
Also the equation of motion in the lower medium under initial stress in $P = -S_{11}$ [Biot (1965), Chattopadhyay and Kar [8]] is

$$(1 - I) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \tag{5}$$

where $I = \dfrac{P}{2\mu_2}$, $\beta_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$.
Taking time dependent proportional to $e^{i\omega t}$, then the equation of motions (4) and (5) take the form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{\beta_1^2} V_1 = 0, \\ &(1 - I) \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta_2^2} V_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Applying the Fourier transform $\bar{V}_r(\eta, z)$ of $V_r(x, z)$, $(r = 1,2)$ defined by

$$\bar{V}_r(\eta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} V_r(x, z)\, e^{i\eta x}\, \mathrm{d}x,$$

so that

$$V_r(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_r(\eta, z)\, e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta,$$

then the equations (6) become

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{V}_1}{\mathrm{d}z^2} + \alpha \frac{\mathrm{d}\bar{V}_1}{\mathrm{d}z} + p_1^2 \bar{V}_1 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{V}_2}{\mathrm{d}z^2} - p_2^2 \bar{V}_2 = 0, \tag{8}$$

where

$$p_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_1^2} - \eta^2}, \quad p_2 = \sqrt{(1 - I)\eta^2 - \frac{\omega^2}{\beta_2^2}}. \tag{9}$$

Now to solve (7), we introduce the condition $p_1 > \alpha/2$, then we have the solution of (7) in the form as

$$\bar{V}_1 = Ae^{-t_1 z} + Be^{t_2 z}, \quad -H \leqslant z \leqslant \varepsilon g(x), \tag{10}$$

where

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= (\alpha/2) - i\sqrt{p_1^2 - \frac{\alpha^2}{4}}, \\ t_2 &= (-\alpha/2) - i\sqrt{p_1^2 - \frac{\alpha^2}{4}}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

The appropriate solution of (8) is

$$\bar{V}_2 = Ce^{-p_2 z}, \; z \geqslant \varepsilon g(x) \tag{12}$$

where A, B, C are function of η.
Therefore,

$$V_1(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (Ae^{-t_1 z} + Be^{t_2 z})\, e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta \tag{13}$$

and

$$V_2(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Ce^{-p_2 z} + \frac{2}{p_2} e^{p_2 z} e^{-p_2 a}\right) e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta, \tag{14}$$

where second term in the integrand of V_2 has been introduced due to source effect.

We take the following approximation for small value of ε as

$$\left.\begin{aligned} &A \cong A_0 + \varepsilon A_1, \; B \cong B_0 + \varepsilon B_1, \; C \cong C_0 + \varepsilon C_1, \\ &e^{\pm \nu \varepsilon g(x)} \cong 1 \pm \nu \varepsilon g \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

where ν is any quantity.
The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = H, \\ &\text{and at } z = \varepsilon g(x) \\ &V_1 = V_2, \\ &l\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + n\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = l\,\mu_2(1 - I)\frac{\partial V_2}{\partial x} + n\mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

where $(l, 0, n)$ are components of the inner unit normal which at $z = \varepsilon g(x)$ are

$$l = \frac{\varepsilon g'}{(1+\varepsilon^2 g'^2)^{1/2}}, \quad n = \frac{1}{(1+\varepsilon^2 g'^2)^{1/2}}$$

and $g' = \dfrac{dg}{dx}$.

The first boundary condition of (16) after using (15) gives

$$(A_0 + \varepsilon A_1) t_1 e^{t_1 H} - (B_0 + \varepsilon B_1) t_2 e^{-t_2 H} = 0. \tag{17}$$

From the second boundary condition of (16) we have after using (15)

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} [t_1 A_0 - t_2 B_0 - C_0 p_2 + 2e^{-p_2 a}] g(x) e^{-i\eta x} \, d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_0 + B_0 - C_0) + \varepsilon (A_1 + B_1 - C_1) - \frac{2}{p_2} e^{-p_2 a} \right] e^{-i\eta x} \, d\eta. \tag{18}$$

Applying the Fourier transform of $g(x)$ as

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, e^{i\lambda x} \, dx, \\ \text{so that } g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\lambda) \, e^{-i\lambda x} \, d\lambda \\ \text{and } g'(x) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \bar{g}(\lambda) e^{-i\lambda x} \, d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

in the left hand side of (18), then we have

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t_1 A_0 - t_2 B_0 - p_2 C_0 + 2e^{-p_2 a}) \, \bar{g}(\lambda) \, e^{-i(\eta+\lambda)x} \, d\eta \, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_0 + B_0 - C_0) + \varepsilon (A_1 + B_1 - C_1) - \frac{2}{p_2} e^{-p_2 a} \right] e^{-i\eta x} \, d\eta. \tag{20}$$

Putting $\eta + \lambda = k$, considering λ as a constant so that $d\eta = dk$, then L.H.S. of (20) becomes

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int [t_1A_0 - t_2B_0 - C_0p_2 + 2e^{-p_2a}]^{\eta=k-\lambda}\,\bar{g}(\lambda)\,e^{-ikx}\,dk\,d\lambda$$

and replacing η by k on the R.H. S of (20), we finally obtained after Fourier transform of both sides

$$A_0 + B_0 - C_0 + \varepsilon(A_1 + B_1 - C_1) - \frac{2}{p_2}e^{-p_2a} = \varepsilon T_1(k) \qquad (21)$$

where

$$T_1(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[t_1A_0 - t_2B_0 - p_2C_0 + 2e^{-p_2a}]^{\eta=k-\lambda}\,\bar{g}(\lambda)\,d\lambda. \qquad (22)$$

From the third boundary condition of (16) and using the approximation (15) we get

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big[i\varepsilon g'\eta\left\{\mu_0(A_0 + B_0) - \mu_2'\left(C_0 + \frac{2}{p_2}e^{-p_2a}\right)\right\} +$$

$$+ \varepsilon g\{\mu_0(t_1^2A_0 + t_2^2B_0) - \mu_2(p_2^2C_0 + 2p_2\,e^{-p_2a}) -$$

$$- \mu_0\alpha(t_1A_0 - t_2B_1)\}\Big]\,e^{-i\eta x}\,d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}[\mu_0(t_1A_0 - t_2B_0) - C_0\mu_2p_2 + 2\mu_2e^{-p_2a} +$$

$$+ \varepsilon\mu_0(t_1A_1 - t_2B_1) - \varepsilon\mu_2p_2C_1)]\,e^{-i\eta x}\,d\eta$$

where $\mu_2' = \mu_2(1 - I)$.
Now using (19) and proceeding as in (21) we have

$$\mu_0(t_1A_0 - t_2B_0) - C_0\mu_2p_2 + 2\mu_2\,e^{-p_2a} +$$

$$+ \varepsilon\{\mu_0(t_1A_1 - t_2B_1) - p_2\mu_2C_1\} = \varepsilon T_2(k) \qquad (23)$$

where

$$T_2(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\Bigg\{\mu_0(A_0+B_0) - \mu_2'\left(C_0+\frac{2}{p_2}e^{-p_2 a}\right)\Bigg\}\eta\lambda + \\ + \{\mu_0(t_1^2A_0+t_2^2B_0) - \mu_2(p_2^2C_0+2p_2e^{-p_2a}) - \\ -\mu_0\alpha(t_1A_0-t_2B_0)\}\Bigg]^{\eta=k-\lambda}\bar{g}(\lambda)\,d\lambda. \tag{24}$$

Equating the absolute terms and the co-efficients of ε from the equation (17), (21), (24) we get

$$\left.\begin{aligned} t_1e^{t_1H}A_0 - t_2e^{-t_2H}B_0 &= 0,\\ t_1e^{t_1H}A_1 - t_2e^{-t_2H}B_1 &= 0,\\ A_0+B_0-C_0 &= \frac{2}{p_2}e^{-p_2a},\\ A_1+B_1-C_1 &= T_1(k),\\ \mu_0(t_1A_0-t_2B_0) - C_0\mu_2p_2 &= -2\mu_2e^{-p_2a},\\ \mu_0(t_1A_1-t_2B_1) - \mu_2p_2C_1 &= T_2(k). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Solving the set of equations (25) we have

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{4\mu_2t_2e^{-t_2H}e^{-p_2a}}{R(k)},\\ B_0 &= \frac{4\mu_2t_1e^{t_1H}e^{-p_2a}}{R(k)},\\ C_0 &= \frac{4\mu_2e^{-p_2a}(t_2e^{-t_2H}+t_1e^{t_1H})}{R(k)} - \frac{2}{p_2}e^{-p_2a},\\ A_1 &= \frac{t_2e^{t_2H}(\mu_2p_2T_1-T_2)}{R(k)},\\ B_1 &= \frac{t_1e^{t_1H}(\mu_2p_2T_1-T_2)}{R(k)},\\ C_1 &= \frac{(\mu_2p_2T_1-T_2)(t_1e^{t_1H}+t_2e^{-t_2H})}{R(k)} - T_1 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

where

$$R(k) = \mu_2 p_2(t_2 e^{-t_2 H} + t_1 e^{t_1 H}) - \mu_0 t_1 t_2 (e^{-t_2 H} - e^{t_1 H}). \tag{27}$$

Therefore the displacement in the upper layer will be

$$V_1(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\mu_2 e^{-p_2 a}}{R(k)} \left[1 + \frac{\varepsilon(p_2\mu_2 T_1 - T_2)\, e^{p_2 a}}{4\mu_2}\right] \times$$

$$\times \{t_2 e^{-t_2 H} e^{-t_1 z} + t_1 e^{t_1 H} e^{t_2 z}\} e^{-ikx}\, dk. \tag{28}$$

From the equation of irregularity (3) and (19) we have

$$g(\lambda) = \frac{4d}{\lambda} \sin \lambda d. \tag{29}$$

We find from (22) and (24) after using (25) and (29),

$$p_2\mu_2 T_1 - T_1 - T_2 = \frac{8\mu_2 d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\{p_2 t_1 t_2 (e^{-t_2 H} - e^{t_1 H})(\mu_2 - \mu_0) -$$

$$- (\mu_0 - \mu_2)\lambda\eta - p_2^2\mu_2 (t_2 e^{-t_2 H} + t_1 e^{t_1 H}) - \mu_0 t_1 t_2 \times (t_1 e^{-t_2 H} + t_2 e^{t_1 H}) +$$

$$+ \mu_0 \alpha t_1 t_2 (e^{-t_2 H} - e^{t_1 H})\} \frac{e^{-p_2 a}}{R(\eta)} \Big]^{\eta = k - \lambda} \times \frac{\sin\lambda\, d}{\lambda} d\lambda =$$

$$= \frac{8\mu_2 d}{\pi} \int_0^{\infty} [\varphi(k - \lambda) + \varphi(k + \lambda)] \frac{\sin\lambda\, d}{\lambda} d\lambda \tag{30}$$

where $\varphi\,(k - \lambda)$ is the portion of the integrand within the square bracket.

Applying the asymptotic formula of Willis [11] and neglecting the terms containing 1/d and higher power of 1/d for large value of d we have [Tranter [12]]

$$\int_0^{\infty} [\varphi(k - \lambda) + \varphi(k + \lambda)] \frac{\sin\lambda d}{\lambda} d\lambda \cong \frac{\pi}{2} 2\varphi(k) = \pi\varphi(k)$$

Then from (30),

$$p_2\mu_2 T_1 - T_2 = 8d\mu_2 \varphi(k) = \frac{4\mu_2 b \varphi(k)}{\varepsilon},$$

where $\varepsilon = \dfrac{b}{2d} \ll 1$.

Therefore the displacement in the upper layer is

$$V_1(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\mu_2 e^{-p_2 a}(t_2 e^{-t_2 H} e^{-t_1 z} + t_1 e^{t_1 H} e^{t_2 z})}{R(k)[1 - b\varphi(k) e^{p_2 a}]}\, e^{-ikx}\, dk.$$

Since the value of the integral depends on the contribution of the poles of the integrand, the dispersion equation for SH waves is given by

$$R(k) - b\varphi(k)\, R(k)\, e^{p_2 a} = 0$$

or

$$p_2\mu_2(t_2 e^{-t_2 H} + t_1 e^{t_1 H}) - \mu_0 t_1 t_2 (e^{-t_2 H} - e^{t_1 H}) - b[p_2 t_1 t_2 \times$$
$$\times (e^{-t_2 H} - e^{t_1 H})(\mu_2 - \mu_0) + p_2^2 \mu_2 (t_2 e^{-t_2 H} + t_1 e^{t_1 H}) +$$
$$+ \mu_0 \alpha t_1 t_2 (e^{-t_2 H} - e^{t_1 H}) - \mu_0 t_1 t_2 (t_1 e^{-t_2 H} + t_2 e^{t_1 H})] = 0.$$

If c be the common wave velocity of the waves propagation along the surface then writting $\omega = ck$ and using (9) and the relation (11), then the dispersion equation takes the form

$$\tan\left[\sqrt{k^2\left(\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right) - \frac{\alpha^2}{4}}\, H\right] = \frac{NU}{DN} \tag{31}$$

where

$$NU = \sqrt{k^2\left(\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right) - \frac{\alpha^2}{4}}\left[\frac{\mu_2}{\mu_0}\sqrt{1 - I - \frac{c^2}{\beta_2^2}} - bk\left\{\frac{\mu_2}{\mu_0} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(1 - I - \frac{c^2}{\beta_2^2}\right) + \left(\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right)\right\}\right],$$

$$DN = k\left(\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\mu_2}{\mu_0}\sqrt{1 - I - \frac{c^2}{\beta_2^2}} + bk\left[k\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right)\sqrt{1 - I - \frac{c^2}{\beta_2^2}} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{\mu_2}{\mu_0}\left(1 - I - \frac{c^2}{\beta_2^2}\right)\right].$$

If we put $I = 0$, that is the lower medium is free from initial stress then the equation (31) reduces to the dispersion equation obtained by Chattopadhyay [5].

Again if $\alpha = 0$, the equation (31) reduces to the dispersion equation by Mal [3]. Also if $b = 0$, then the dispersion equation (31) reduces to the standard dispersion equation of Love waves, viz,

$$\tan\left[kH\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}\right] = \frac{\mu_2\sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_0\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}}.$$

In the dispersion equation (31) if we put $b = 0$, then takes the form

$$\tan\left[\sqrt{k^2\left(\frac{c^2}{\beta_2^1}-1\right)-\frac{\alpha^2}{4}}\,H\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{k^2\left(\frac{c^2}{\beta_1^2}-1\right)-\frac{\alpha^2}{4}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\sqrt{1-I-\frac{c^2}{\beta_2^2}}\right)}{k\left(\frac{c^2}{\beta_1^2}-1\right)-\frac{\alpha}{2}\frac{\mu_2}{\mu_0}\sqrt{1-I-\frac{c^2}{\beta_2^2}}}$$

which is the dispersion equation established by Chattopadhyay and Pal (communicated).

We find that for real solution of (31)

$\beta_1\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4k^2}}<c<\beta_2\sqrt{1-I}$ giving a clear effect of nonhomogeneity on the range of admissible values of the phase velocity of Love waves. Also it is clear that there is no real solution of (31), that is, love wave does not propagate under high initial stress in the lower elastic half-space.

Acknowledgement

One of the author Sri A.K. Pal, is grateful to Council of Scientific and Industrial Research for financial support.

REFERENCES

[1] *Eringen A. C., Samuels, C. J.*, (1959) — J. Appl. Mech. Vol. 26, 491—498.
[2] *Ghosh M. L.*, (1961) — Garl. Beitr. Z. Geophysics, Vol. 70, No. 6, 319—342.
[3] *Mal, A. K.* (1962), On the frequency equation for Love wave due to abrupt thickness of the crustal layer, Geof. Pure and Appl.
[4] *Bhattacharya, J.* (1962), Gerl. Beitr. 7. Geophys. Vol. 71, No. 6, 324—333.
[5] *Chattopadhyay, A.* (1975), Acta Geophysica Polonica, Vol. XXIII, No. 4.
[6] *Satô, Y* (1952) — Bull. Earthq. Res. Inst. 30, 101—120.
[7] *De Noyer, J.* (1961) — Bull. Seism. Soc. Amer. 51(2), 227—235.
[8] *Chattopadhayay, A., Kar B. K.* (1978), Geo. Res. Bull. Vol. 16, No. 1, March 1978.
[9] *Wolf. B.* (1970), Pure and Appl. Geophysics, 78, 1, 48 (1970).
[10] *Biot, M. A.* (1961), Mechanics of incremental deformation, John Willey and Sons Inc. New York.
[11] *Willis H. F.*, (1948) — A formula for expending an integral as a series, Phil, Mag, 39, 455—459.
[12] *Tranter C. J.* (1966) — Integral Transforms in Math. Phys. 63—67.
[13] *Chattopadhyay, A., Pal, A. K.*, Dispersion curves of SH waves in an inhomogeneous layer lying over an initially stressed elastic half-space — Communicated to the Bull. of Australian Math. Soc., Australia.

Propagarea undelor SH într-un mediu neomogen cu o interfață neregulată aflată pe un semispațiu elastic inițial comprimat

Propagarea undelor SH într-un mediu neomogen aflat pe un mediu omogen semi-infinit precomprimat, datorită neregularităților în stratul „crustă" a fost studiată în această lucrare. Neomogenitatea stratului „crustă" este presupusă de forma $\mu = \mu_0 e^{\alpha z}$, $\rho = \rho_0 e^{\alpha z}$, unde ρ_0, μ_0 și α sînt constante.

C.Z.: 621,317.2.027.3/7

INSTALAȚIE DE ÎNCERCARE LA ÎNALTĂ TENSIUNE TIP MODUL COMANDATĂ ELECTRONIC

M. MARICARU, TH. VASCAN, I. ALBEANU, D. RUCINSCHI, M. DUMITRESCU, V. TRUȘCĂ *

În cadrul preocupărilor în domeniul tehnicii tensiunilor înalte, ICPE a dezvoltat pentru dotarea catedrei de măsuri și aparate electrice din Institutul politehnic București o instalație multifuncțională, pentru domeniile: 100 kV, 10 kVA tensiune alternativă, 200 kV—50 mA tensiune continuă, 400 kV—5kJ tensiune de impuls.

Deoarece instalația este destinată încercării materialelor electrice și aparatelor de înaltă tensiune pentru industrie și cercetare, ea poate fi folosită cu succes în procesul de învățămînt din institutele tehnice superioare.

Principiul modulelor mobile ale componentelor instalației, cu excepția condensatoarelor, permite o utilizare economică a acumulatoarelor de energie (0,25 μ F pe treaptă) cu avantaje în schema de impuls (sarcini pînă la 6000 pF), iar în schema de tensiune înaltă continuă, o bună filtrare.

Încercările și folosirea instalației au atestat parametrii de funcționare scontați.

1. Utilizare

În vederea lărgirii bazei materiale a Catedrei de Măsuri și aparate electrice a Institutului politehnic București a fost realizată de către Institutul de Cercetare pentru Industria Electrotehnică București o instalație de încercare la înaltă tensiune tip modul comandată electronic.

Instalația realizată a urmărit obținerea unei mari elasticități în concretizarea diferitelor scheme de încercare cu tensiune alternativă, continuă și de impuls, fapt care a condus la modularizarea majorității componentelor schemelor (rezistențe, redresoare, eclatoare, conexiuni) care sînt utilizate ca elemente mobile. În scopul stocării unor cantități de energie suficientă pentru efectuarea de probe industriale la tensiune continuă și impuls asupra materialelor electrotehnice s-au menținut ca elemente fixe condensatoarele, care astfel au putut fi dimensionate mai larg [1, 2].

În fapt instalația prezentată are utilizare în numeroase domenii de activitate. În industrie poate constitui un stand compact capabil să furnizeze diferite tipuri de tensiuni pentru controlul intermediar sau final al calităților dielectrice ale aparatajului de joasă sau medie tensiune.

Manuscris primit la data de 9 iunie 1981

* Ing.; Ing.; Ing.; Ing., I.C.P.E.; Conf. dr. ing., Catedra Măsuri și aparate electrice.

În cercetare, datorită posibilităţilor multiple oferite de schema de comandă şi a variabilităţii elementelor instalaţiei, pot fi concepute scheme clasice şi scheme speciale, necesare în procesul de dezvoltare de noi aparate şi produse electrotehnice.

În învăţământ, instalaţia poate servi la demonstrarea funcţionării principalelor tipuri de surse de înaltă tensiune, precum şi ca bază materială pentru realizarea lucrărilor practice de laborator (caracteristici de amorsare a diferitelor sisteme de electrozi şi materiale la tensiune continuă, alternativă sau de impuls; caracteristici tensiune — timp, adaptarea formei undei de impuls funcţie de capacitatea de sarcină, determinarea ondulaţiei tensiunii continue funcţie de sarcină şi capacitatea de filtrare, etc.)

2. Caracteristici tehnice

Instalaţia se compune în principal dintr-un transformator de înaltă tensiune şi un stelaj cu 4 etaje în construcţie modulară pe care se pot monta elementele schemelor de curent continuu (condensatoarele fiind în acest caz elemente de filtrare sau de dublare) sau elementele unei scheme de impuls pînă la 4 etaje. Transformatorul de izolare, regulatorul de tensiune, divizoarele de tensiune, separatorul de punere la pămînt, dispozitivul de amorsare a GIT şi pupitrul de comandă completează instalaţia.

Instalaţia poate produce următoarele tipuri de tensiuni:

2.1. *Tensiune alternativă* (Fig. 1)

Este produsă cu ajutorul unui transformator cu următoarele caracteristici:

— Tensiunea nominală	U_2	= 100 kVef
— Putere de regim permanent	S	= 10 kVA
— Frecvenţă	f	= 50 Hz
— Curent de mers în gol	i_0	= 6,6 %
— Tensiune primară	U_1	= 220 V
— Sarcină capacitivă maximă	C_s	= 3 μF

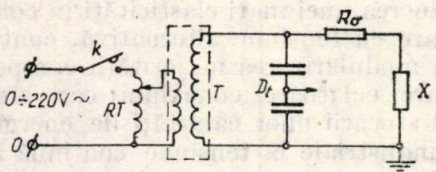


Fig. 1. Schema de principiu 100 kV; 50 Hz.

Reglarea tensiunii se face cu un autotransformator de 220/0..... 250 V — 50A. Măsurarea tensiunii se execută cu un divizor capacitiv al cărui braţ de înaltă tensiune este format din 12 condensatoare ceramice de 5000 pF; 12 kV, înseriate.

2.2. *Surse tensiune continuă*

Instalaţia permite realizarea a trei tipuri de scheme de redresare pentru care au fost determinate prin calcul sau modelare date pentru trasarea curbelor de variaţie a tensiunii de utilizare U şi a factorului de ondulaţie funcţie de curentul de sarcină. Pe baza acestora s-a determinat curentul de sarcină mediu redresat în condiţiile unui factor de ondulaţie mai mic de 5% conform CEI—60/73.

2.2.1. *Redresor monoalternanță.*

— Tensiunea nominală $U = 50$ kV
— Curent mediu redresat $I = 80$ mA
— Capacitate filtrare $C_f = 1$ μF

2.2.2. *Dublor de tensiune continuă.*

— Tensiunea nominală $U = 100$ kV
— Curent mediu redresat $I = 60$ mA
— Capacitate dublare $C_d = 0{,}25$ μF
— Capacitate filtrare $C_f = 0{,}5$ μF

2.2.3. *Cascadă tensiune continuă.*

— Tensiune nominală $U = 200$ kV
— Curent mediu redresat $I = 60$ mA
— Capacitate coloană dublare $C_d = 0{,}125$ μE
— Capacitate coloană filtrare $C_f = 0{,}125$ μF

În fig. 2 este prezentat modul de realizare a schemei de tensiune continuă.

Măsurarea tensiunii continue se face cu un divizor rezistiv de 680 Mohm, avînd brațul de joasă tensiune adaptat pe un microampermetru etalonat la 100 și 200 kV. Măsurarea curentului se face cu un șunt de 10 ohm.

2.3. *Tensiune de impuls.*

— Tensiune de încărcare maximă $U = 400$ kV
— Energie de încărcare maximă $W = 5$ kJ
— Tensiunea de încărcare pe etaj $U = 100$ kV
— Capacitate de impuls pe etaj $C = 0{,}25$ μF
— Număr etaje $n = 4$
— Capacitatea de sarcină (proprie) $C = 1{,}2$ μF

Generatorul de impuls se realizează conform schemei din fig. 3.

Generatorul de impuls de tensiune realizat pe baza unei scheme multiplicatoare tip MARX este dotat cu un set de rezistențe de formare calculate pentru adaptarea la o capacitate de sarcină $C_s = 500$ pF ..... 6000 pF, cu care se poate obține atît unda de tip supratensiune atmosferică 1,2/50 μs cît și unda de tip supratensiune de comutație 250/2500 μs.

Reglarea tensiunii se face fie cu autotransformatorul de 220/0..... .....250 V — 50 A, fie cu un regulator cu tiristoare legate antiparalel, cu protecție di/dt prin selfuri, grupuri RC, limitatoare de supratensiuni cu seleniu și siguranțe ultrarapide.

3. Comanda instalației.

Funcționarea comenzii instalației se poate urmări pe schema bloc din fig. 4.

Elementele comenzii sînt conținute în planul cu racuri al instalației. *Blocul de comandă și semnalizare* (21) conține elementele necesare conec-

tării tensiunii de alimentare, tensiunii înalte, acționării regulatorului clasic, a separatorului de punere la pământ și a mecanismului de antrenare a eclatoarelor. Acest bloc este utilizat pentru toate tipurile de tensiuni pro-

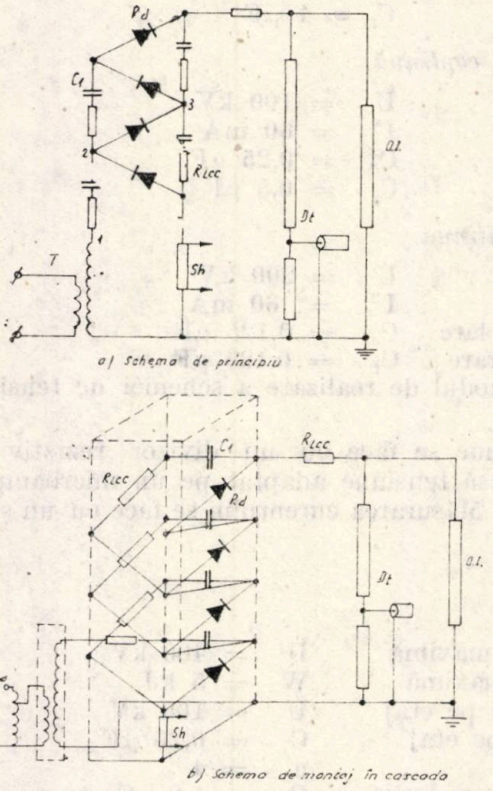


Fig. 2. Schema electrică a instalației de încercare la tensiune continuă 200 kV.

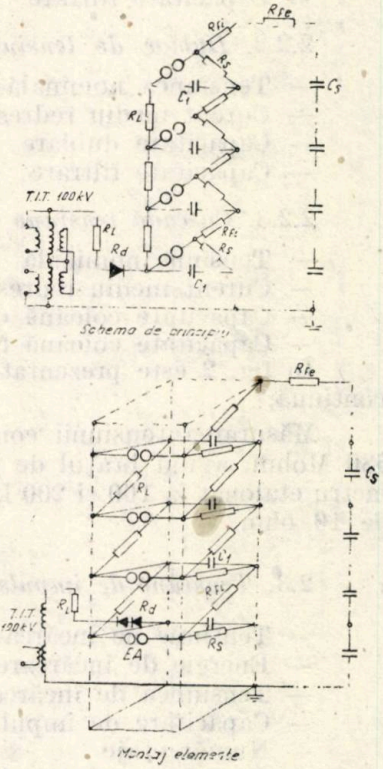


Fig. 3. Schema generatorului de înaltă tensiune (GIT, 4 etaje serie) 400 kV — 5kJ

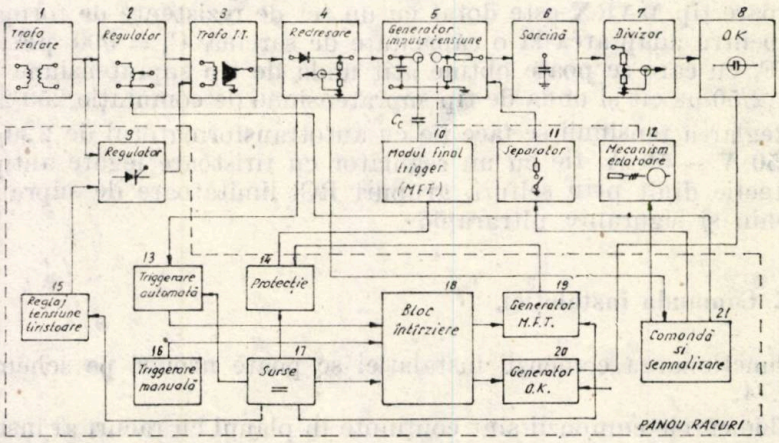


Fig. 4. Schema bloc de comandă a instalației.

duse de instalaţie. *Blocul de reglaj al tensiunii cu tiristoare* (15 şi 9) este utilizat pentru schemele de tensiune continuă şi la reglajul încărcării generatorului de impuls.

Celelalte blocuri servesc comenzii generatorului de impuls.

Generatorul de impuls poate fi comandat în două moduri:

3.1. *Comanda manuală* prin care se reglează tensiunea de încărcare a condensatoarelor fie prin intermediul regulatorului clasic (tip autotransformator) (2) fie prin regulatorul cu tiristoare (9) Triggerarea GIT este comandată manual (16) la atingerea tensiunii de încărcare dorite, după ce în prealabil distanţa la eclatoare a fost reglată în domeniul de amorsare sigură.

3.2. *Comanda semiautomată.*

Încărcarea condensatoarelor GIT se face manual prin regulatorul cu tiristoare, dar triggerarea se face automat la nivelul tensiunii de încărcare preselectate cu ajutorul unui potenţiometru helicoidal de precizie tip multitură, aflat în blocul de triggerare automată (13). Referinţa de tensiune de la acesta este aplicată unui etaj adaptor de impedanţă tip repetor. Pe de altă parte tensiunea de încărcare a GIT obţinută de la divizorul de tensiune (4) se aplică unui circuit de intrare tip basculă diferenţială (din 13). Alegerea uneia sau alteia din ieşirile basculei se face cu ajutorul unui releu, funcţie de polaritatea tensiunii de încărcare aleasă. Cele două tensiuni obţinute la ieşirea repetorului şi la ieşirea basculei diferenţiale comandă un comparator care basculează la egalitatea lor. Saltul pozitiv obţinut la ieşirea comparatorului se aplică unui etaj cu tiristor. Impulsul ascuţit obţinut în catodul tiristorului este trecut în blocul de întîrziere (18) şi apoi comandă mai departe amorsarea generatorului (19) şi a oscilografului (20).

Acest tip de comandă asigură o foarte bună reproductibilitate a amplitudinii GIT la aceleaşi tensiuni preselectate şi permite operatorului o bună adaptare a timpului de încărcare GIT cu nivelul tensiunii de încărcare (cadenţa de funcţionare).

Amorsarea generatorului se face în trei trepte:

a) *Treapta I-a* în care se formează impulsul primar de cca. 180 V şi cu o pantă mai mică de 1 μs. Acest impuls este produs fie de blocul de triggerare automată (13) fie de cel de triggerare manuală (16) în funcţie de modul de lucru ales şi este aplicat blocului de întîrziere (18).

Blocul de întîrziere (18) conţine un generator de bit de 1 μs (de la 0 la 99 μs) respectiv 10 μs (de la 0 la 990 μs) cu o precizie de 0,1 μs, ale cărui impulsuri de ieşire, în momentul cînd se dă comanda de triggerare, se aplică unui circuit poartă un interval de timp limitat. La ieşirea acestuia se obţine un tren de impulsuri care se aplică unui numărător cu 2 decade. Ieşirile numărătorului sînt decodificate şi aplicate unor comutatoare cu 10 poziţii cu care se selectează întîrzierea GIT sau a oscilografului. Impulsul pozitiv rezultat serveşte la comanda blocului generator MFT (modul final trigger) (19) şi blocului generator OK (oscilograf catodic) (20).

b) *Treapta II-a* (*bloc protecţie*) (14) este un etaj de amplificare care produce şi o separare faţă de etajul final, în care impulsul de la generatorul MFT comandă un tiratron într-un circuit R—C şi produce un impuls intermediar care comandă treapta a III-a.

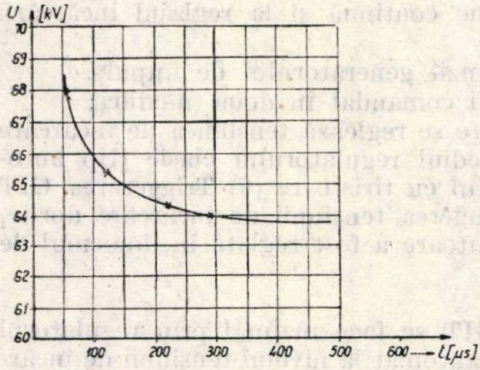


Fig. 5. Caracteristica tensiune-timp (volt-secundă) pentru un izolator suport de 10 kV.

c) *Treapta III-a* este constituită din *blocul modul final de triggerare* (*MFT*) (10) în care impulsul intermediar din treapta a II-a comandă un tiratron cu hidrogen care descarcă un condensator la 1500 V în primarul unui transformator de impuls. Impulsul din secundarul acestuia comandă amorsarea unui eclator cu 3 electrozi preionizat care lucrează într-un circuit R—C. Impulsul de cca. 10 kV rezultat este aplicat prin 2 condensatoare de cuplaj de 1600 pF — 100 kV la electrozii de comandă ai eclatorului primului etaj producînd amorsarea GIT (5).

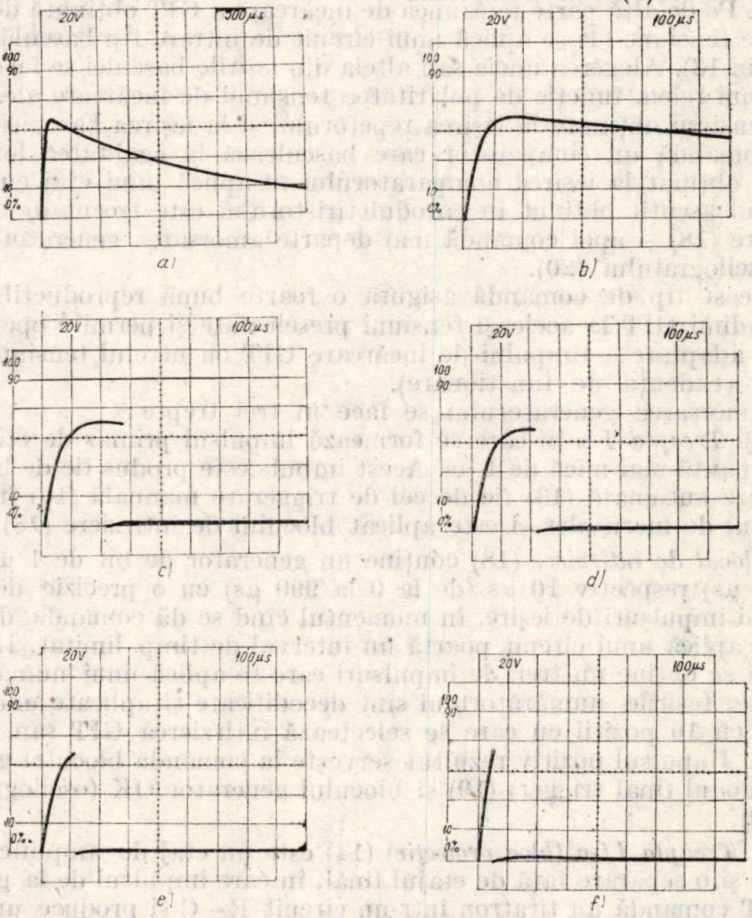


Fig. 6. Unda de impuls lungă 250/2500 μs pentru supratensiuni de comutaţie tăiată pe front şi pe spate.

Dispozitivul permite o amorsare sigură a GIT într-un domeniu larg al tensiunii de încărcare raportată la tensiunea de autoamorsare a eclatoarelor.

4. Rezultate experimentale.

În figura 5 este prezentată caracteristica tensiune — timp (volt — —secundă) pentru un izolator suport de 10 kV, pentru undă lungă 250/ /2500 μs.

Oscilogramele corespunzătoare sînt prezentate în figura 6 în care se observă unda plină, (5 a, b), unda tăiată pe coadă 6. c., d) și unda tăiată pe front (6. e., 7).

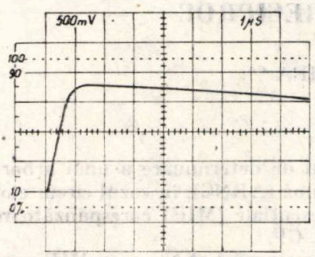


Fig. 7. Unda de impuls scurtă (normală) 1,2/50μs.

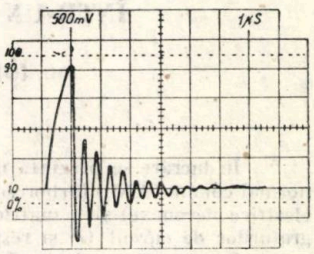


Fig. 8. Unda de impuls 1,2/50 μs tăiată pe front de un descărcător cu rezistență variabilă și suflaj magnetic.

Din figura 7 este prezentată unda normală 1,2/50 μs, iar în figura 8 se prezintă această undă tăiată pe front de către un descărcător cu rezistență variabilă și suflaj magnetic.

BIBLIOGRAFIE

1. *Vascan Th., Maricaru M., Rucinschi D., Ruziczka I.*, „Instalație universală pentru încercări la înaltă tensiune tip modul" — Brevet OSIM nr. 83439, R.S.R.
2. *Vascan Th., Albeanu I., Maricaru M., Rucinschi D., Rădulescu C., Dumitrescu M.*, Electrotehnica Nr. 1, 1978, p. 17—29.

Elektronisch gesteuerte Hochspannungsprüfanlage Typ Modul

In Rahmen der Beschaftigungen im Bereich der Hochspannungsprüftechnik hat das ICPE eine multifunktionale Prüfanlage für die Bereiche 100 kV, 10 kVA Wechselspannung, 200 kV—50mA Gleichspannung; 400 kV—5KJ Stossspannung zur Ausstattung des Lehrstuhls fur Elektrische Schaltgeräte des Polikchnischen Instituts Bukarest entworfen und entwickelt.

Da die Anlage zur Prüfung der elektrischen Werkstoffe und Hochspannungsschaltgeräte fur Industrie und Forschung bestimmt ist, kann sie auch erfolgreich im Lehrgang der betreffenden Hochschule verwendet werden.

Das Prinzip des mobilen Modulaufbaus der Anlagenkomponenten mi Ausnahme der Kondensatoren ermöglichte die grössere Bemessung der Energiespeicher (0,25 μF pro Stufe) mit Vorteilen in den Impulsschemata (Lasten bis zu 6000 pF) und in den Gleichspannungasschemata (Filterung).

Die Prüfungen und die Benutzung der Anlage haben die Parameter und die voraussichtliche Betriebsfunktionalität bestätigt.

C.Z.: 621.3.012.8
538.551.23

PROGRAM DE DETERMINARE A ARBORELUI NORMAL COMUN (ANC) ȘI A MATRICELOR INCIDENTELOR ESENȚIALE (MIE) ÎNTR-UN CIRCUIT NERECIPROC

M. IORDACHE, S. CHIRA *

În lucrare se prezintă un program original de determinare a unui arbore normal comun (ANC) (arborescență normală comună (ARNC), în cazul circuitelor electrice neconexe) și a matricelor incidențelor esențiale (MIE) corespunzătoare grafurilor de curent G^I și respectiv de tensiune G^U.

Programul are la bază o metodă de determinare a ANC și a MIE care utilizează o tehnică de calcul cu matrice rare ceea ce conduce la o reducere substanțială a timpului de calcul și a memoriei utilizate.

Circuitul analizat poate fi conex sau nu și poate conține: oricare din cele patru tipuri de surse comandate liniare sau neliniare, cuplaje magnetice, transformatoare ideale, giratoare, invertoare, rezistoare liniare sau neliniare (fie controlate în tensiune, fie controlate în curent) și, în general orice element de circuit multipol sau multiport care are o schemă echivalentă cu elemente dipolare și surse comandate.

1. Introducere

În lucrare se prezintă un program de determinare a unui arbore normal comun (ANC) (arborescență normală comună (ARNC), în cazul circuitelor electrice neconexe) și a matricelor incidențelor esențiale (MIE) corespunzătoare grafurilor de curent G^I și de tensiune G^U, asociate lui ANC (ARNC). Programul este conceput în limbaj FORTRAN și poate fi rulat atît pe calculatoarele de tip FELIX, cît și pe cele de tip IBM.

În marea majoritate a metodelor de analiză a circuitelor electrice nereciproce, se asociază circuitului studiat — pentru formularea sistematică a ecuațiilor ce descriu regimul de funcționare analizat [1] — două grafuri: unul de curent G^I și altul de tensiune G^U.

Programul elaborat are la bază metoda de determinare a ANC (ARNC) și a MIE expusă în [2]. Circuitul analizat poate fi conex sau nu și poate conține: oricare din cele patru tipuri de surse ideale comandate liniare sau neliniare, cuplaje magnetice, transformatoare ideale, giratoare, invertoare, atît rezistoare neliniare controlate în tensiune (c.u.),

Manuscris primit la data de 2 aprilie 1982
* Șef lucrări dr. ing., Catedra Electrotehnică; Student

cît și rezistoare neliniare controlate în curent (c.i.), bobine, condensatoare, surse ideale independente de tensiune sau de curent și, în general, orice element multipol sau multiport de circuit care prezintă o schemă echivalentă cu elemente dipolare și surse comandate.

Programul este astfel conceput încît verifică dacă condițiile teoremei de existență a unui ANC (ARNC) expusă în [2], sînt verificate, indicînd de fiecare dată, printr-un mesaj, care din aceste condiții nu sînt satisfăcute.

De asemenea, programul calculează numărul și tipul elementelor în exces, lucru deosebit de util în formularea ecuațiilor circuitului analizat [1, 3, 4].

2. Descrierea programului de calcul.

Pentru simplificarea descrierii circuitului analizat, elementele de circuit diport (giratoarele, transformatoarele ideale, cuplajele magnetice, invertoarele etc.), precum și cele multipol sau multiport (care prezintă o schemă echivalentă cu elemente dipolare și surse comandate) se înlocuiesc cu scheme echivalente formate din: condensatoare (C), bobine (L), rezistoare liniare (R), rezistoare neliniare c.u. (Ru), rezistoare neliniare c.i. (Ri) și surse comandate.

Fiecare latură a circuitului se consideră formată dintr-un singur element dipolar.

ANC (ARNC) trebuie, conform definiției [1, 2], să conțină anumite tipuri de elemente de circuit. Pentru aceasta, elementele circuitului studiat se împart în cinci tipuri, numerotate : 1, 2, 3, 4, 5.

Tipul 1 de elemente conține : sursele ideale independente de tensiune (SIIT), laturile comandate ale surselor de tensiune comandate și laturile de comandă ale surselor de curent comandate în curent. În structura elementelor de tipul 2 sînt cuprinse condensatoarele și rezistoarele neliniare c.u. Din categoria elementelor de tipul 3 fac parte rezistoarele liniare. Mulțimea elementelor de tipul 4 conține rezistoarele neliniare c.i. și bobinele (inclusiv bobinele prin care se simulează cuplajele magnetice). Tipul 5 de elemente cuprinde: laturile de comandă ale surselor de tensiune comandate în tensiune, laturile comandate ale surselor de curent comandate și sursele ideale independente de curent (SIIC).

La început, pentru o descriere unitară a circuitului analizat, laturilor comandate și de comandă ale surselor comandate li se atribuie numerele prezentate în tabelul 1.

Este ușor de observat din tabelul 1, că circuitul analizat cu prezentul program de calcul poate conține maximum 20 de surse comandate de fiecare tip din cele cinci tipuri. Dacă memoria calculatorului utilizat permite, se poate mări corespunzător numărul maxim al fiecăruia din cele cinci tipuri de surse comandate.

Deoarece primele patru tipuri de surse comandate sînt echivalente din punctul de vedere al curentului și respectiv al tensiunii cu rezistoare liniare sau neliniare ce ocupă poziții diferite în cele două grafuri G^I și G^U, după determinarea ANC (ARNC) aceste rezistoare se includ în mulțimea

Tabelul 1

Nr. crt.	Tipul sursei comandate	Latura comandată	Latura de comandă
1	Sursă de tensiune comandată în curent $u\ (i)$	10, 11, . . . ,29	100, 101, . . . ,119
2	Sursă de tensiune comandată în tensiune $u\ (u)$	30, 31, . . . ,49	300, 301, . . . ,319
3	Sursă de curent comandată în tensiune $i\ (u)$	50, 51, . . . ,69	500, 501, . . . , 519
4	Sursă de curent comandată în curent $i\ (i)$	70, 71, . . . ,89	700, 701, . . . , 719
5	Sursă de tensiune comandată în derivata curentului $u\left(\frac{di}{dt}\right)$	90, . . . ,99 0, 1, . . . , 9	900, 901, . . . , 909 1000, 1001, . . . ,1009

elementelor de tipul 3 dacă sînt liniare, în mulţimea elementelor de tip 2 dacă sînt neliniare c.u. şi în cea a elementelor de tipul 4 dacă sînt neliniare c.i.. Sursele de tensiune comandate în derivata curentului (surse ce apar în simularea cuplajelor magnetice [5]) sînt echivalente din punctul de vedere al curentului şi al tensiunii cu bobine ce ocupă poziţii diferite în grafurile G^I şi G^U. Prin urmare, după determinarea ANC (ARNC), laturile de comandă şi comandate ale acestor surse se includ în mulţimea bobinelor. Este evident că dacă circuitul electric analizat conţine şi surse de tensiune comandate în integrala curentului sau surse de curent comandate în derivata tensiunii, surse ce sînt echivalente din punctul de vedere al curentului şi tensiunii cu nişte condensatoare ce ocupă poziţii diferite în grafurile G^I şi respectiv G^U, tabelul 1 se completează corespunzător. De asemenea, cuplajele magnetice pot fi simulate şi cu surse de curent comandate în integrala tensiunii.

Datele de intrare sînt : numărul laturilor, numărul nodurilor, numărul de părţi separabile ale circuitului şi matricea iniţială de descriere (MID) a circuitului.

MID este formată din 4 linii şi l coloane (l fiind numărul de laturi ale circuitului). Prima linie conţine nodurile iniţiale, a doua linie — nodurile finale, a treia linie este formată din indicii tipurilor laturilor şi a patra linie este alcătuită din valorile parametrilor ce caracterizează laturile.

Elementelor neliniare li se asociază, în funcţie de tipul elementului neliniar respectiv, un număr de ordine care devine parametrul laturii respective în MID.

De asemenea, pentru fiecare SIIT şi SIIC varabilă în timp, se atribuie cîte un număr de ordine, ce descrie latura respectivă în MID.

În funcţie de numerele de ordine ataşate elementelor neliniare (SIIT şi SIIC) se formează o matrice de descriere a acestor elemente, matrice în care se indică pentru fiecare element neliniar numărul punctelor prin care se aproximează (prin segmente de dreaptă) caracteristica sa ($i = \hat{i}(u)$, $u = \hat{u}(i)$, $\varphi = \hat{\varphi}(i)$, $q_c = \hat{q}_c(u_c)$, $e = \hat{e}(t)$ şi $j = \hat{j}(t)$), abscisele şi ordonatele acestei caracteristici.

MID se citește pe coloane, fiecare coloană fiind descrisă pe o cartelă.

Dimensiunile tablourilor folosite în program au fost luate în funcție de numărul maxim de laturi pe care poate să le aibă cel mai complex circuit care poate fi analizat cu prezentul program. Pentru un număr maxim de laturi egal cu 100, programul necesită o memorie de 60 ko, în

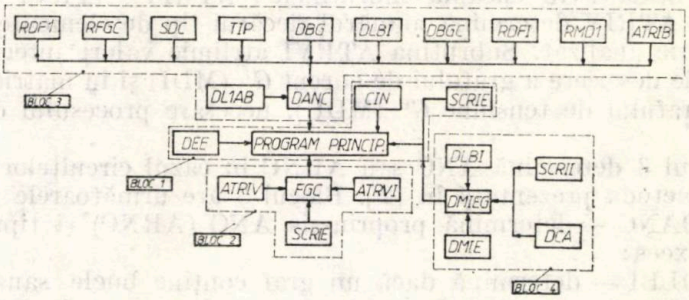


Fig. 1. — Organigrama de principiu a programului de calcul

cazul cînd programul nu este segmentat, iar cînd este segmentat, cel mai lung segment ocupă o memorie de 14 ko. Desigur, tablourile de lucru utilizate în determinarea ANC (ARNC) și a MIE, în care nu sînt stocate rezultatele finale, pot fi utilizate în continuare în programul de analiză corespunzător regimului de funcționare al circuitului electric studiat.

Structura de principiu, pe subrutine, a programului de calcul este prezentată în figura 1. Programul conține 4 blocuri. Blocul 1 este constituit din programul principal care cheamă subrutinele: FGC, DANC, DMIEG, CIN, SCRIE și DEE.

Subrutina CIN citește MID, iar subrutina SCRIE tipărește MID sau matricele de descriere a celor două grafuri G^I și G^U la diferite etape de calcul al procesului de determinare a ANC și a MIE. Subrutina DEE determină, după ce a fost găsit un ANC (o ARNC) și calculate MIE, elementele în exces de tipuri: bucle formate numai din condensatoare, laturi de tipul C, și laturi de comandă ale surselor comandate în curent, laturi de tipul J_C — bucle de tipul C_i și/sau bucle alcătuite numai din C, J_C și SIIT — bucle de tipul $C_i - E_i$; bucle formate numai din C și laturi comandate ale surselor comandate în tensiune (laturi de tipul E_c) — bucle de tipul $C - E_c$ sau/și bucle formate din C, SIIT și E_c — bucle de tipul $C - E - E_c$; suprafețe de secțiune intersectate numai de bobine ideale (laturi de tipul L) și laturi de comandă ale surselor comandate în tensiune (laturi de tipul E_C) — suprafețe de secțiune de tipul L_u și/sau suprafețe de secțiune intersectate numai de L, E_C și SIIC — suprafețe de secțiune de tipul $L_u - J_u$ și suprafețe de secțiune intersectate numai din L și laturi comandate ale surselor de curent (laturi de tipul J_c) — suprafețe de secțiune de tipul $L - J_c$ și/sau suprafețe de secțiune formate numai din L, SIIC și J_c — suprafețe de secțiune de tipul $L - J - J_c$ [4]. De fapt, aceste elemente în exces fac ca anumite submatrice ale MIE Λ, β să nu mai fie submatrice nule (adică submatricele: Λ_{RC}, β_{RC}, β_{LR} și respectiv

Λ_{LR} [3], ceea ce revine subrutinei DEE să determine dacă aceste submatrice sînt nule sau nu.

Blocul 2 al programului formează graful de curent G^I și graful de tensiune G^U. Principala sa subrutină este subrutina FGC care ținînd seama de comportarea surselor comandate din punctul de vedere al curentului și al tensiunii, [5], construiește matricele de descriere corespunzătoare celor două grafuri G^I și G^U.

Subrutina FGC cheamă subrutinele: ATRIV, ATRVI și SCRIE. Subrutina ATRIV determină numărul fiecărui tip de elemente ale circuitului electric analizat. Subrutina ATRVI atribuie valori intermediare în matricea de descriere a grafului de curent G^I (MDI) și în matricea de descriere a grafului de tensiune G^U (MDU), necesare procesului de formare a lor.

Blocul 3 determină ANC sau ARNC în cazul circuitelor neconexe, utilizînd metoda prezentată în [2]. Blocul 3 are următoarele subrutine:

— DANC — determină propriu-zis ANC (ARNC) și tipul elementelor în exces;

— DLBI — determină dacă un graf conține bucle sau nu;

— DL1AB — verifică dacă o anumită latură a unui graf dat aparține sau nu unei bucle;

— TIP — tipărește anumite rezultate intermediare;

— RFGC — ordonează laturile grafurilor G^I și G^U în ordinea: SIIT, C, R_u (rezistoare neliniare controlate în tensiune (c.u.)), R (rezistoare liniare), R_i (rezistoare neliniare controlate în curent (c.i.)), L și J. Laturile surselor comandate sînt incluse în mulțimile R, R_u și R_i după caz;

— ATRIB — atribuie părți din MDI sau din MDU în anumite matrice de lucru, în procesul formării ANC (ARNC);

— DBG — determină laturile dintr-un graf conex sau nu, care nu formează bucle și pe cele care formează bucle sau fac parte din căi ce unesc două bucle;

— DBGC — verifică dacă o buclă depistată în G^I sau în G^U are o buclă corespondentă în G^U sau în G^I (v. [2]);

— SDC — schimbă două coloane între ele, într-o matrice de descriere;

— RDFI — readuce, după terminarea procesului de formare a ANC (ARNC), MDI sau MDU la forma inițială. Cînd o latură a circuitului analizat îndeplinește toate condițiile ca să facă parte din ANC (ARNC) i se schimbă, cu subrutina RDF1, semnul elementelor de pe liniile 2 și 3 ale MDI și ale MD—, cu scopul de a nu mai fi luată în considerație în continuare în procesul de formare al ANC;

— RMD1 — reordonează coloanele MDI și MDU în ordinea ramuri și apoi coarde.

Blocul 4 construiește, cu metoda expusă în [2], MIE Λ, β corespunzătoare grafurilor G^I și respectiv G^U.

Blocul 4 conține subrutinele:

— DMIEG — determină propriu-zis MIE Λ, β;

— DMIE — determină părți ale MDI sau ale MDU care conțin un anumit număr din laturile ramuri și un anumit număr de laturi coarde;

— DCA — determină în MDI sau în MDU coloane care conține o anumită latură din G^I sau din G^U respectiv;

— DLBI — a fost descrisă mai sus;

— SCRII — tipărește MIE Λ, β, MIE Λ, β sînt astfel tipărite încît prima coloană (linie) să conțină începînd cu elementul al doilea ordinea laturilor ramuri (coarde).

3. Exemplu.

Fie circuitul electric reprezentat în figura 2. În figura 3 se arată modul de simulare a transformatorului ideal cu surse comandate, una de tensiune comandată în tensiune și cealaltă de curent comandată în curent.

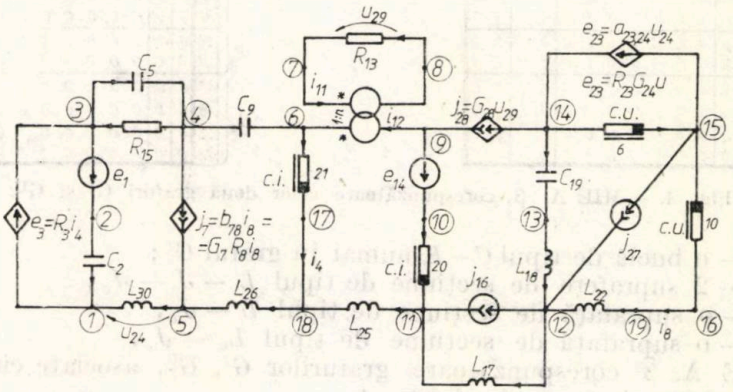


Fig. 2. — Schema circuitului.

Pentru identificarea porților de comandă ale surselor de tensiune comandate în curent se introduce pentru fiecare sursă un nod suplimentar (nodul 17 în cazul exemplului considerat), nod care nu va apare nici în

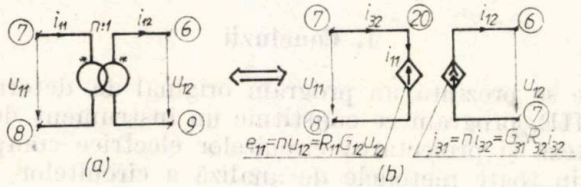


Fig. 3. — Simularea transformatorului ideal cu surse comandate
a) schema de principiu;
b) schema cu surse comandate

graful de curent G^I și nici în graful de tensiune G^U [5]. Prin urmare, grafurile G^I și G^U ale circuitului electric reprezentat în figura 2 vor avea fiecare 19 noduri și două părți separabile (circuitul considerat este neconex).

După rularea programului, descris în paragraful 2, s-au obținut următoarele rezultate:

— ARNC = {1, 14, 5, 9, 19, 10, 3, 11, 23, 8, 32, 20, 21, 17, 18, 25, 26};

— coarborescența corespunzătoare ARNC este formată din laturile : {2, 6, 13, 15, 12, 24, 7, 31, 28, 22, 30, 16, 27} ;
— elementele în exces ale circuitului sînt :

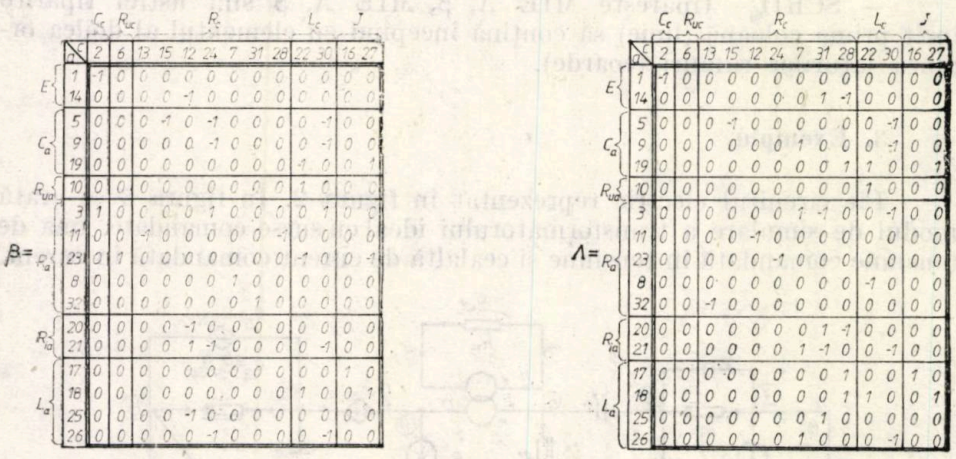


Fig. 4. — MIE Λ, β, corespunzătoare celor două grafuri G^I și G^U.

a. — o buclă de tipul $C-E$ numai în graful G^I ;
b. — 2 suprafețe de secțiune de tipul $L - J - J_c$;
c. — o suprafață de secțiune de tipul $L - J_c$;
d. — o suprafață de secțiune de tipul $L_u - J_c$;

MIE Λ, β corespunzătoare grafurilor G^I, G^U, asociate circuitului analizat, sînt prezentate în figura 4.

De fapt, în formularea ecuațiilor circuitelor electrice corespunzătoare regimului de funcționare analizat interesează dacă un anumit tip de elemente în exces, există sau nu, deoarece în funcție de prezența sau lipsa unui anumit tip de elemente în exces, formularea ecuațiilor se complică sau se simplifică.

4. Concluzii

În lucrare se prezintă un program original de determinare a ANC (ARNC) și a MIE, program ce constituie un instrument deosebit de util în analiza, sinteza și proiectarea circuitelor electrice complexe.

Aproape în toate metodele de analiză a circuitelor electrice și cu precădere a celor neliniare, se pleacă de la selectarea unui arbore care să îndeplinească anumite restricții.

Metodele de analiză a circuitelor electrice complexe care apelează, pentru formularea ecuațiilor de funcționare, la un anumit tip de arbore, conferă acestora o mare flexibilitate în selectarea setului minimal de variabile independente și un înalt grad de generalitate.

Programul expus în prezenta lucrare ocupă o memorie redusă ca urmare a utilizării unei tehnici de calcul cu matrice rare în determinarea ANC (ARNC) și a MIE. Timpul de calcul este redus, sub un minut pentru cele mai complicate tipuri de circuite analizate cu prezentul program (circuite cu maxim 100 de laturi).

Circuitele electrice analizate pot conține: oricare din cele patru tipuri de surse comandate clasice, surse de tensiune (curent) comandate în derivata sau integrala curentului (tensiunii), cuplaje magnetice, giratoare, transformatoare ideale, convertoare de curent, convertoare de tensiune și, în general, orice element multipol sau multiport de circuit care are o schemă echivalentă cu elemente dipolare de circuit și surse comandate. Astfel de circuite electrice sînt, în general, cele mai complexe circuite electrice existente în practică.

BIBLIOGRAFIE

[1]— *Chua, O. L., Lin, P., M.*, Computer — aided analysis of electronic circuits (algorithms and computational techniques). Prentice — Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
[2] — *Iordache, M.*, E.E.A. — Electrotehnica, nr. 6, 1982.
[3] — *Iordache, M.* E.E.A. — Electrotehnica, nr. 4, aprilie 1982.
[4] — *Iordache, M., Dornescu, D.*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Électrotech. et Énerg., nr. 4, 1982.
[5] — *Iordache, M.* Rev. Roum. Sci. Techn. — Électrotech. et Énerg., nr. 3, 1981, p. 401—413.

Determination Program for the Common Normal Tree (CNT) and of Essential Incidence Matrices (EIM) in an Unreciprocal Electric Circuit

This paper presents an original program for the determination of a common normal tree (CNT) (or common normal forest (CNF), in the case of an unconnected circuit) and the essential incidence matrices (EIM), corresponding to the current graph G^I and voltage graph G^U.

The program is written in FORTRAN and needs less memory as a result of the use of a computation technique using sparse matrices. The electric circuit may contain : any of the four classical controlled sources, voltage or current sources controlled by the derivative or integral of the current or voltage, magnetic couplings, gyrators, ideal transformers and, in general, any circuit multipole or multiport element which has an equivalent schema with dipolar circuit elements and controlled sources ; this type of circuits is one of the most complex used in practice.

C.Z.: 621.38 :517.512
621.39 :517.512

ON THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM

D. STANOMIR *

In the paper the discrete Fourier transform, DFT, is discussed. It is shown that for practical problems it is more convenient to introduce the dimensional discrete Fourier transform, DDFT, which for T (sampling step) $= 1$ reduces to the usual DFT. A theorem which gives the possibilities of the DDFT is proved. It results that the DDFT of the samples of an analogous signal is never identical with the samples of the Fourier transform of the analogous signal. However, as it is shown in some remarks and examples an approximate correspondence can be attained.

1. Preliminaries. Notations.

As usually natural, integer, real and complex numbers are denoted by $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, and $\mathbb{C}$ respectively. The following subsets of $\mathbb{R}$ will be used.

$$\begin{cases} \mathbb{R}_N(T) = \{0,\ T,\ 2T,\ \ldots, (N-1)T\}, \\ \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(T) = \{\ldots, -2T, -T, 0,\ T, 2T, \ldots\}, \\ T \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N},\ T \text{ and } N \text{ are fixed},\ T > 0. \end{cases} \tag{1}$$

We have obviously

$$\mathbb{R}_N(1) = \{0,\ 1,\ \ldots,\ (N-1)\},\ \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(1) = \mathbb{Z}.$$

Vectors are denoted by boldface letters, the transposition is indicated by un upper index T and the complex conjugaison is denoted by an upper bar.

Now we can define the signals which we are dealt with.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $t \mapsto f(t)$, is an *analogous signal*, shortly an a. signal.

b) $\tilde{f}_d : \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(T) \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $t \mapsto \tilde{f}_d(t)$, is a *discrete signal of infinite length*, shortly an i.l.d. signal. The infinite dimensional vector whose entries are the values taken by $\tilde{f}_d$ on $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(T)$ is denoted by

$$\tilde{\mathbf{f}}_d = [\ldots, \tilde{f}_d(-2T), \tilde{f}_d(-T), \tilde{f}_d(0), \tilde{f}_d(T), \tilde{f}_d(2T), \ldots]^T. \tag{2}$$

Manuscript received February 12, 1982
* Associate Professor, Chair of Radiocommunications

c) $f_d: \mathbb{R}_N(T) \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $t \mapsto f_d(t)$, is a *discrete signal of finite length*, shortly a f.l.d. signal. The N-dimensional vector whose entries are the values taken by f_d on $\mathbb{R}_N(T)$ is denoted by

$$\mathbf{f}_d = [f_d(0), f_d(T), \ldots, f_d((N-1)T)]^T. \tag{3}$$

By use of the subsets defined in (1) we can define the *sampling of a continuous (in the mathematical sense) a. signal* f.

An *infinite T-sampling* of a continuous a. signal is the restriction of f on $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(T)$. This i.l.d. signal will be denoted by $\tilde{f}^s_T$ and is given by

$$\tilde{f}^s_T = f|_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(T)}. \tag{4}$$

The corresponding infinite dimensional vector is

$$\tilde{\mathbf{f}}^s_T = [\ldots, f(-2T), f(-T), f(0), f(T), \ldots]^T. \tag{5}$$

A *finite T-sampling* of a continuous a. signal is the restriction of f on $\mathbb{R}_N(T)$. This f.l.d. signal will be denoted by f^s_T and is given by

$$f^s_T = f|_{\mathbb{R}_N(T)}. \tag{6}$$

The corresponding N-vector is

$$\mathbf{f}^s_T = [f(0), f(T), \ldots, f((N-1)T)]^T. \tag{7}$$

The following functions and sequences spaces will be used in the sequel.

$S_d(T)$ — the space of all i.l.d. signals defined on $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}(T)$,
$S_{d0}(T)$ — the space of all f.l.d. signals defined on $\mathbb{R}_N(T)$,
$C^0(\mathbb{R})$ — the set of all a. signals which are continuous on $\mathbb{R}$,
$C^0(\overline{\mathbb{R}})$ — the set of all a. signals which are continuous on the closed $\overline{\mathbb{R}}$, i.e. $f(\pm\infty) = 0$,
L_1 — the set of all a. signals which are summable on $\mathbb{R}$,
l_1 — the set of all i.l.d. signals which are summable.

The Fourier transform of an a. signal is defined by

$$\begin{cases} \mathcal{F}: L_1 \to C^0(\overline{\mathbb{R}}),\ F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\ f(t) \mapsto F(\omega),\ F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}: L_1 \to C^0(\overline{\mathbb{R}}),\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\ F(\omega) \mapsto f(t),\ f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \end{cases} \tag{9}$$

2. The dimensional discrete Fourier transform.

In the usual discrete Fourier transform, shortly DFT, the exponent of the nucleus is $j2\pi/N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. When dealing with physical problems it is more convenient to write this exponent as follows

$$\begin{cases} \dfrac{j2\pi}{N} = j\dfrac{2\pi}{NT} \cdot T = j\Omega \cdot T = j\Omega \cdot \dfrac{t_0}{N}, \\ \Omega = \dfrac{2\pi}{NT}, \quad t_0 = NT. \end{cases} \tag{10}$$

As it will be seen it is natural to call
T — *the sampling interval* (step), Ω = *the frequency resolution*, N — *the number of samples*, t_0 — *the duration* (*length of the signal*).
Let us now introduce the dimensional discrete Fourier transform, shortly DDFT, by

$$\begin{cases} F_d(n\Omega) = \mathscr{F}[f_d](n\,\Omega) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} f_d(kT)\, e^{-j(n\Omega)(kT)}, \\ n = \overline{[0,\ N-1]}. \end{cases} \tag{11}$$

It is seen that a f.l.d. signal, defined on $\mathbb{R}_N(T)$ and characterized by the vector f_d, is carried through DDFT into a new f.l.d. signal given by

$$F_d : \mathbb{R}_N(\Omega) = \mathbb{R}_N\left(\frac{2\pi}{NT}\right) \to \mathbb{C}, \tag{12}$$

and whose N-vector is

$$\mathbf{F}_d = [F_d(0),\ F_d(\Omega),\ \ldots,\ F_d((N-1)\Omega)]^T. \tag{13}$$

The inverse DDFT is defined by

$$\begin{cases} f_d(nT) = \mathscr{F}^{-1}[F_d]\,(nT) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{1}{N} F_d(k\Omega)\, e^{j(nT)(k\Omega)}, \\ n = \overline{[0,\ N-1]}. \end{cases} \tag{14}$$

In terms of the spaces of S_d type the direct and inverse DDFT can be viewed as follows

$$\begin{cases} \mathscr{F}_d : S_{d0}(T) \to S_{d0}(\Omega),\ f_d \mapsto F_d, \\ \mathscr{F}_d^{-1} : S_{d0}(\Omega) \to S_{e0}(T),\ F_d \mapsto f_d. \end{cases} \tag{15}$$

One can show, [4], that $\mathscr{F}_d$ and $\mathscr{F}_d^{-1}$ are $\mathbb{C}$-linear isomorphisms, which are inverse to each other. For $T = 1$ one gets the usual (nondime-

sional) DFT. For many applications it is more convenient to use the DDFT since most signals have physical dimensions.

It is known, [1], [2], [4], that if f_d is real valued then its spectral lines (the entries of F_d) obeys the identity

$$F_d(N\Omega - k\Omega) = \overline{F_d(k\Omega)}, \quad k = \overline{[0, N-1]}. \tag{16}$$

Moreover, if N is even, $N = 2N'$, then $F_d(N'\,\Omega)$ is a real number. Therefore, it is seen that there are only $N' + 1$ independent spectra lines and the frequency band of the signal is given by

$$B[\text{rad/sec}] = \frac{\pi}{T}, \quad B[\text{Hz}] = \frac{1}{2T}, \tag{17}$$

which stems from the Shannon theorem since the sampling rate is $1/T$ samples per second.

With respect to DDFT one could ask the following question. Let an a. signal f be given which is sampled at a rate of $1/T$ (N samples) and has its Fourier transform F. Then if F is sampled at a rate of $1/\Omega$ (N samples) obtaining so the f.l.d. spectrum F^s_Ω, does F^s_Ω coincide with the DDFT of f^s_T? In formulae the question could be put as follows

$$\begin{cases} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}(\mathbb{R}), \ \mathscr{F}[f] = F, \\ f|_{\mathbb{R}N(T)} = f^s_T, \ F|_{\mathbb{R}N(\Omega)} = F^s_\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

$$\text{a) } \mathscr{F}_d[f^s_T] \overset{?}{=} F^s_\Omega, \quad \text{b) } \mathscr{F}_d^{-1}[F^s_\Omega] \overset{?}{=} f^s_T. \tag{19}$$

Obviously, (19) a) and b) are checked to hold apart of a dimensional constant which is of no importance. It is not difficult to give example in order to show that (19) a) and b) do not hold exactly. In the following paragraph we shall give a partial answer to (19).

3. Main theorem for DDFT.

We consider an a. signal f together with : its Fourier transform F, its infinite T-sampling and $\tilde{F}$ the infinite Ω-sampling of F. We introduce the following discrete mappings

$$\begin{cases} S_d(T) \to S_{d0}(T), \ \tilde{\mathbf{f}}^s_T \mapsto \mathbf{f}^{sa}_T, \\ f^{sa}_T(nT) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} f(nT + kNT), \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} S_d(\Omega) \to S_{d0}(\Omega), \ \tilde{\mathbf{F}}^s_\Omega \mapsto \mathbf{E}^{sa}_\Omega, \\ F^{sa}_\Omega(n\Omega) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} F(n\Omega + kN\Omega), \end{cases} \tag{21}$$

$$n = \overline{[0, N-1]}.$$

It is obvious that f_T^{sa} (or F_Ω^{sa}) are produced by an infinite T (or Ω) — sampling of f (or F) and averaging of samples that are spaced at kNT (or $kN\Omega$). As above $\mathbf{f}_T^{sa}$ and $\mathbf{F}_\Omega^{sa}$ denote the vectors whose entries are the values taken by the function f_T^{sa} and F_Ω^{sa} respectively.

Now we can state the following

Theorem. Let an a. signal f and its Fourier transform F be given so that $f \in L_1 \cap C^\circ$, $F \in L_1$.

Then the following equalities hold

$$\text{(I)} \quad \mathscr{F}_d[T\mathbf{f}_T^{sa}] = \mathbf{F}_\Omega^{sa},$$

$$\text{(II)} \quad \mathscr{F}_d^{-1}[\mathbf{F}_\Omega^{sa}] = T\mathbf{f}_T^{sa} \tag{22}$$

Obviously, if the assumption is valid then $\mathbf{f}_T^s$, $\mathbf{F}_\Omega^s \in l_1$.

Proof. Before proving (I) and (II) we give a distributional equality [5],

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - x_0 - kL) = \frac{1}{L} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\pm j(2\pi k/L)(x - x_0)}. \tag{23}$$

Either of the two member of (23) is an element of $\mathscr{D}'$ (Schwartz distribution). Moreover, they are also members of $\mathscr{S}'$ (slowly increasing distributions) and can be extended as linear and continuous functional on $C^\circ \cap L_1$. The left hand distribution of (23) gives the infinite T-sampling.

Let us show that (I) is true, $\mathscr{F}_d[\mathbf{f}_T^{sa}] = \frac{1}{T}\mathbf{F}_\Omega^{sa}$.

Denoting

$$A_p = \mathscr{F}_d[f_T^{sa}](p\Omega),$$

we get

$$A_p = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(nT + kNT)\, e^{-j(p\Omega)(nT)}$$

and the series is absolutely convergent by assumption.

From the obvious equality

$$e^{-j(n\Omega)(nT} = e^{-j(2\pi/N)\,np} = e^{-j(2\pi/N)\,p(n+kN)}$$

we get further

$$A_p = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(nT + kNT)\, e^{-j(2\pi/N)\,p(n+kN)} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(mT)\, e^{-j(2\pi/T)\,mp} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega\, e^{jm\omega T} e^{-j(2\pi/N)pm} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{jmT(\omega - p\Omega)}. \tag{24}$$

(The inversion of the summation and the integral is permitted since $f, F \in \in C^\circ \cap L_1$)

Taking $x_0 = p\Omega$ and $L = 2\pi/T$, we get by use of (23)

$$A_p = \frac{1}{T}\int F(\omega)\,d\omega \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - p\Omega - mN\Omega) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} F(p\Omega + mN\Omega),$$

which ends the proof of (I).

And now let us show that (II) is true, $\mathscr{F}_d^{-1}[\mathbf{F}_\Omega^{sa}] = T\cdot \mathbf{f}_T^{sa}$.

Denoting

$$B_p = \mathscr{F}_d^{-1}[F_\Omega^{sa}](pT),$$

we get

$$N\cdot B_p = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n\Omega + kn\Omega)\, e^{j(pT)(n\Omega)}$$

and the series is absolutely summable by assumption.

As above we write

$$e^{j(pT)(n\Omega)} = e^{j(2\pi/N)np} = e^{j(2\pi/N)p(n+kN)}$$

and get further

$$N\cdot B_p = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n\Omega + kN\Omega)\, e^{(2\pi/N)p(n+kN)} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} F(m\Omega)\, e^{j(2\pi/N)mp} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\, e^{-jm\Omega t} e^{j(2\pi/N)mp} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-jm\Omega(t-pT)}.$$

(As for the inversion of these two operations the same argument holds.

Taking $x_0 = pT$ and $L = 2\pi/\Omega$, we get by use of (23)

$$N\cdot B = T\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(t - pT - mNT) =$$

$$= T\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(pT + mNT),$$

which ends the proof.

4. Conclusions and examples.

The DDFT would give exactly the samples of the Fourier transform of the sampled a. signal if f and F were simultaneously time limited and band limited. respectively. Or such a fact cannot happen since the direct (or inverse) Fourier transform of a time limited (or band limited function is always the restriction on ω (or t) of an entire analytic function.

In order to obtain some practical conclusions we remark that all physical signals we are dealt with are band limited (in many situations they are passed through a low pass filter with a sharp cut off) at a certain frequency, say ω_M. According to Shannon's theorem the samples must be taken at a rate of π/ω_M at least. Therefore the angular frequency of sampling must obey the inequality

$$\omega_s \geqslant 2\omega_M.$$

At the same time we have from (10)

$$\omega_s = N\Omega.$$

Usually $N = 1024$ and the band $0 - \omega_M$ is to be explored by 400 spectrum lines. Since $400/1024 = 1/2{,}56$, it results that

$$\omega_s = 2{,}56\ \omega_M,\ \omega_M = 400\ \Omega,$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_M} \cdot 400. \tag{25}$$

If $\omega_M/2\pi = 10$ kHz then one obtains

$$\frac{\omega_s}{2\pi} = 25{,}6 \text{ kHz},\ \frac{\Omega}{2\pi} = 25 \text{ Hz},\ t_0 = 40 \text{ ms}.$$

Since the time processing is about 200 ms then if one wants to work in real time an upper frequency at most of 2000 Hz is required.

REFERENCES

1. *Kunt M.*, Traitement numériques des signaux. Editions Georgi, 1980.
2. *Oppenheim A. V., Schafer R. W.*, Digital signal processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
3. *Peled A., Liu B.* Digital signal processing. John Wiley § Sons, New York, 1977.
4. *Stanomir D., Stănăşilă O.* Metode matematice în teoria semnalelor. Editura tehnică, Bucureşti, 1980.

Asupra transformării Fourier discrete.

În lucrare este analizată transformarea discretă, Fourier TFD. Se arată că pentru probleme practice este mai convenabil să se introducă transformata Fourier discretă dimensională, TFDD, care pentru T = 1 se reduce la TFD. Este demonstrată o teoremă care arată posibilităţile de analiză spectrală a TFDD. Rezultă că TFDD a unui semnal analogic eşantionat nu este niciodată identică cu imaginea Fourier eşantionată (în domeniul frecvenţă). După cum se arată prin unel econsideraţii se poate realiza o corespondenţă aproximativă satisfăcătoare.

C.Z.: 621.791.7 : 621.38 : 534.321.9.004

INSTALAȚIE PENTRU SUDURA ULTRASONICĂ TEHNOLOGIE ȘI PERFORMANȚE

P. ȘCHIOPU, C. PUIU *

Lucrarea prezintă o instalație electronică pentru sudura ultrasonică a circuitelor integrate hibride.

Este descris modul de funcționare al instalației precum și performanțele sale.

1. Introducere

În domeniul tehnologiei circuitelor integrate hibride una dintre principalele probleme tehnologice se referă la interconectarea tranzistoarelor pe structurile hibride.

Metoda tehnologică prin termocompresiune utilizată actual pentru sudura tranzistoarelor și pentru unele circuite integrate hibride este inaplicabilă, datorită următoarelor inconveniente:

— suprafețele de sudură nu pot fi tratate corespunzător;

— nu pot fi folosiți decapanți;

— creșterea excesivă a temperaturii structurii ar putea distruge anumite componente pasive de pe circuit;

— unele materiale utilizate pentru sudură (de exemplu aluminiul) sînt greu de sudat;

— tensiunile mecanice mari necesare sudurii prin termocompresiune pot provoca fisurarea structurilor (piesele de sudat fiind subțiri — uzual de ordinul 10 ÷ 500 μm).

Toate aceste dezavantaje pot fi eliminate dacă sudura acestor componente se realizează prin metoda ultrasonică.

2. Metoda de sudură prin ultrasunete

Metoda de sudură ultrasonică constă în presarea statică a celor două piese de sudat, una contra celeilalte și excitarea unei vibrații elastice la o frecvență ultrasonică, unda elastică de contur generată astfel propagîn-

Manuscris primit la data de 11 octombrie 1982

* Șef de lucrări dr. ing. Catedra Tehnologie electronică și fiabilitate; Ing. I.C.C.E.

du-se pe o direcție paralelă cu suprafața de contact dintre cele două piese de sudat. Deformarea relativă a pieselor de sudat datorită efectului combinat de pretensionare statică normală și tensionare dinamică tangențială are drept rezultat îndepărtarea particulelor străine în special a oxizilor de pe suprafața pieselor și adaptarea suprafețelor în așa fel încît să se producă contactul intim între cele două piese.

Frecvența undei elastice de contur se situează în domeniile sonor și ultrasonor, uzual 10 kHz ÷ 200 kHz.

Sudura prin ultrasunete se poate face prin puncte, în linie dreaptă și între discuri. În cazul sudurii prin puncte piesele de sudat sînt menținute sub presiunea hornului numit și sonotrod și suprafața plană a mesei de lucru, zona de sudură avînd în general forma unei elipse.

Sonotrodul are rolul de a transmite cu eficiență maximă energia undei elastice de la un traductor piezoelectric sau piezomagnetic celor două componente de sudat.

Sonotrodul este format dintr-un capilar de carbură de tungsten sau ceramică. Materialul din care este confecționat sonotrodul este de o mare importanță deoarece trebuie să fie suficient de dur și să nu se sudeze de piesa care trebuie sudată; totodată sonotrodul trebuie să aibă calități elastice deosebite, să nu transmită cîmpul electric sau magnetic de comandă și să-și păstreze în timp dimensiunile.

Un capilar confecționat din carbură de tungsten se poate utiliza la aproximativ 50.000 de suduri, iar unul din ceramică la aproximativ 35.000 de suduri.

Forța transversală aplicată sonotrodului necesară pretensionării statice normale a componentelor trebuie să fie de ordinul 0,1 N în cazul sudurii cu fir de aluminiu.

Unda elastică necesară pentru excitarea firului de sudat și a structurii trebuie să aibă o putere de ordinul a 10 mW local, ceea ce necesită o putere de 50 mW la nivelul sonotrodului.

Durata procesului de sudură este în general de ordinul zecimilor de secundă.

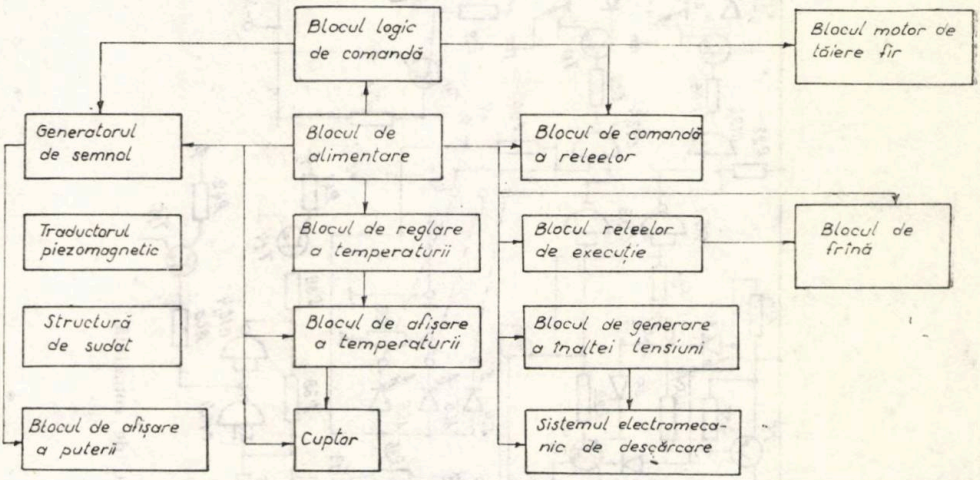
3. Descrierea instalației de sudură ultrasonică.

Instalația de sudură ultrasonică realizată este compusă dintr-o parte electronică de comandă și o parte mecanică; caracteristic este faptul că aparatura electronică are o îmbinare totalitară cu diferitele elemente mecanice. Această soluție constructivă este impusă de faptul că complexitatea de reglaje mecanice, indiferent de gradul lor de finețe, nu poate funcționa precis și la momentul cerut fără un reglaj electronic foarte precis.

Schema bloc a instalației de sudură ultrasonică prezentată în fig. 1 a fost concepută astfel încît să poată realiza sudura pe ambază și sudură conexiuni, putîndu-se lucra pe două canale distincte.

Blocul logic de comandă este unul dintre cele mai complexe circuite ale instalației, avînd rolul de a coordona întregul proces de sudură, asigurînd succesiunea corectă și durata diferitelor operații. Acest bloc conține următoarele circuite:

— circuit de întîrziere a impulsului de sudare;
— circuit de temporizare a sudurii;
— circuit de comutare a canalelor de sudură;
— circuit de comandă a releelor de fir;
— circuit basculant bistabil de comandă.



1. Schema bloc a instalației pentru sudură ultrasonică.

Blocul logic are interconexiuni cu generatorul de ultrasunete pentru a comanda canalele de putere, cu circuitul de relee pentru a comanda frînele și cu motorul pentru acționarea tăietorului de fir; el are schema electrică de principiu din fig. 2.

Circuitul de temporizare pentru întîrzierea sudurii comandă declanșarea operației de sudare cu o întîrziere reglabilă în domeniul 0,1 — 2 sec. Întîrzierea este impusă de necesitatea unei suduri corespunzătoare, care nu trebuie efectuată sub șocuri mecanice, sudura trebuind să înceapă după comutarea releelor de acționare a frînelor de prindere a firului și de avans a firului.

Acest circuit echipat cu circuitul integrat CDB 4121 prezintă avantajul că după declanșarea impulsului, ieșirile sînt independente de tranzițiile ulterioare ale semnalelor de intrare și depind numai de constanta de timp de încărcare. Totodată compensarea internă pe care o posedă CDB 4121 face ca durata întîrzierii să fie independentă de variațiile tensiunii de alimentare. Microîntrerupătorul MS_1 are rolul de a realiza începerea perioadei de întîrziere. Izolarea galvanică de restul circuitului a microîntrerupătorului MS_1 a asigurat independența funcționării acestui circuit de durata manipulării și respectiv de eventualele impulsuri parazite care ar sosi pe conductoarele de legătură spre microîntrerupător.

Circuitul de temporizare a sudurii echipat cu circuitul CDB 473 (fig. 2) fixează durata operației de sudură reglabilă în domeniul 50 m. sec. ÷ ÷ 1 sec. Deoarece timpii necesari sudurii pe structură sînt în general mici spre deosebire de cei necesari sudurii pe terminal au fost realizate fizic două canale distincte specializate pentru sudura pe structuri și respectiv

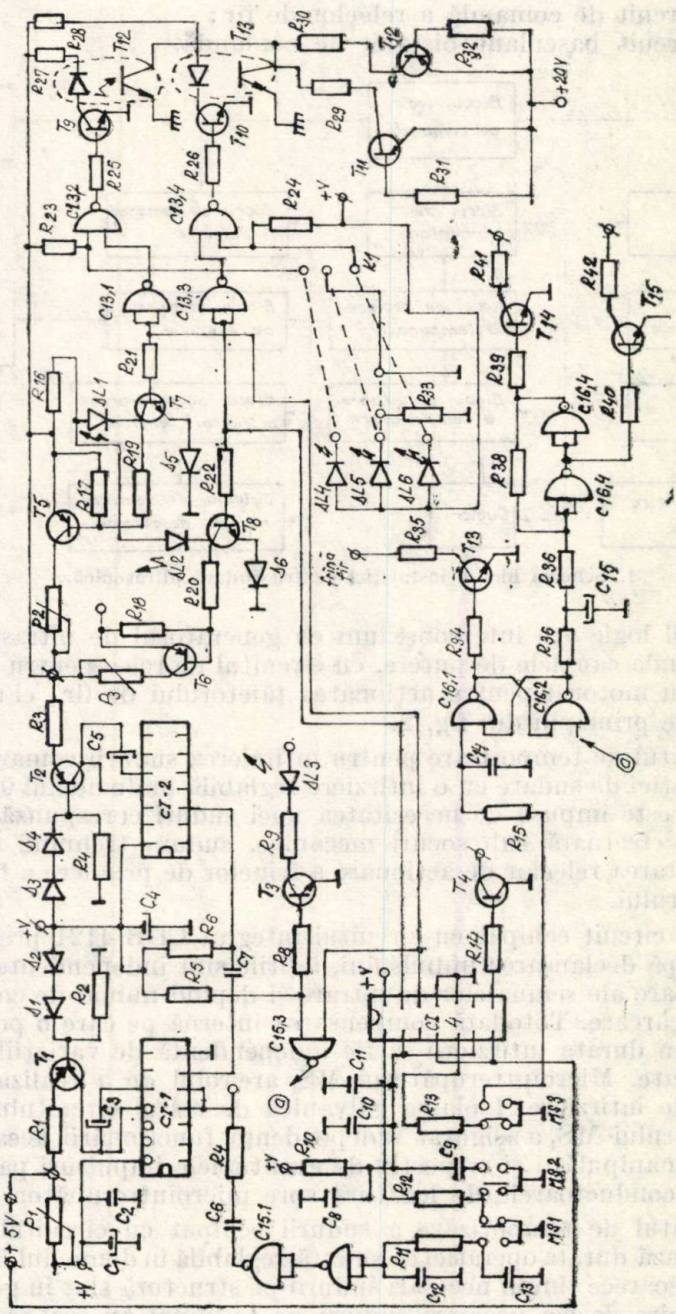


Fig. 2. Schema electronică a blocului de comandă.

terminale fiecare cu cîte o temporizare proprie. Din aceleași considerente de imunitate împotriva impulsurilor parazite au fost folosite condensatoare cu tantal pe circuitul de alimentare și generatoare de curent constant pentru încărcarea condensatoarelor de temporizare.

Circuitul de comandă a canalelor de sudură (fig. 2) permite selectarea automată a canalului de lucru dorit; acest circuit este echipat cu porți logice TTL de tip SI—NU cu două intrări; totodată pentru separarea galvanică între masa circuitului și generatorul de ultrasunete semnalul logic de comandă pentru comutarea canalelor de sudură se transmite prin optocuploare realizate din diode electroluminiscente și fototranzistoare de infraroșu.

Circuitul de comandă a releelor pentru fir (fig. 2) rezolvă o problemă de mecanică fină, asigurînd acționarea frînelor de fir numai în timpul celei de a doua suduri. Acționarea bobinei releului de cuplare și decuplare a frînei pentru fir este realizată, de asemenea, prin optocuplor în infraroșu. În acest mod se realizează prinderea corectă a firului de aur necesar sudurii, respectiv avansul său. Circuitul basculant bistabil pentru comandă asigură succesiunea corectă a operațiilor procesului de pregătire și realizare a sudurii, inclusiv comanda releului de acționare a motorului de tăiere și formare a bilei. El este echipat cu un circuit integrat TTL de tip CDB 473, fiind compus din două circuite bistabile de tip JK, fiecare avînd cîte două ieșiri complementare, un circuit de tact și un circuit de resetare. Unda elastică de contur este produsă cu ajutorul unui traductor piezomagnetic realizat la Institutul de Cercetare Științifică și Inginerie tehnologică pentru Electronică din București fiind excitat la rezonanță de către un generator sinusoidal cu o putere electrică reglabilă, la o frecvență de 100 kHz.

În cazul sudurii pe unele metale este necesară și o încălzire locală nu prea ridicată, această temperatură depinzînd în mare măsură de materialele care urmează a fi sudate.

4. Concluzii

Instalația pentru sudură ultrasonică a fost realizată pentru rezolvarea unei probleme tehnologice concrete în domeniul cercetării dispozitivelor electronice. Metoda de lucru a acestei instalații elimină inconvenientele prezentate de metoda clasică de sudură prin termocompresiune.

Instalația poate realiza sudură ultrasonică a ambazelor și terminalelor prin puncte și în linie dreaptă pe o lungime de maximum 15 mm.

Instalația realizată permite o poziționare precisă a locului de sudură, element esențial în cazul padurilor de contact al căror diametru este de 20 ÷ 40 μm.

Grosimea pieselor de sudat poate fi de minimum 2 μm, limita superioară fiind 2,5 mm. Timpul de sudură este de ordinul 0,1 ÷ 1 sec. cu o putere elastică de 100 mW. Aparatura electronică a instalației pentru sudură ultrasonică a fost proiectată și realizată numai cu componente electronice produse în țara noastră.

Instalaţia pentru sudură ultrasonică realizată permite analiza pro blemelor de cercetare privind montajul dispozitivelor electronice permiţînd creşterea randamentului de montare a acestor dispozitive şi respectiv a fiabilităţii lor în funcţionare.

BIBLIOGRAFIE

1. *Vătăşescu A., Bodea, M., ş.a.*, Circuite integrate lineare. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.
2. *Săvescu M.*, Circuite electronice. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.
3. *Iancu, O., Cojocaru Z., Schiopu P.*, Ferite piezomagnetice. Tehnologie şi performanţe. In : Cercetări în Tehnologie electronică şi Fiabilitate. Ed. Did. şi Ped. Buc., 1979.

Installation for Ultrasonic Welding. Technology and Performances.

This paper presents an electronic system for ultrasonic welding used in technology of integrated circuits. Details of circuit operation are indicated, as well as performances of this system.

C.Z.: 621.311.1
621.316

ZONAREA SISTEMELOR ELECTROENERGETICE – ETAPĂ INTERMEDIARĂ ÎN STUDIUL REGIMURILOR DINAMICE

M. EREMIA, A. DIACONU *

În lucrare se prezintă un nou procedeu de zonare a sistemelor electroenergetice în vederea studiilor de stabilitate statică și tranzitorie. Modelul matematic propus ia în considerare atît variațiile unghiurilor rotorice cît și distanțele electrice ce separă generatoarele.

Algoritmul și programul de calcul au fost testate cu bune rezultate pe exemple concrete.

1. Introducere

Sistemele electroenergetice au ajuns astăzi la o dezvoltare spectaculoasă. Cu o structură ierarhică cu multe nivele, ele au atins un mare grad de complexitate și o întindere geografică remarcabilă.

O problemă de actualitate în studiul stabilității sistemelor o constituie, pe de o parte reducerea ordinului rețelelor, iar pe de altă parte, reducerea ordinului dinamic prin echivalarea generatoarelor. Aceste necesități sînt impuse de următoarele aspecte:

a) reprezentarea detaliată pe calculator a unui sistem electroenergetic este practic imposibilă;

b) timpul necesar introducerii datelor și în particular al timpului de execuție al programelor de calcul este, în general, limitat;

c) în studiile de stabilitate statică și tranzitorie există o zonă privilegiată, a cărei comportare interesează în mod deosebit, așa-zisa zonă în studiu.

Pînă în prezent, zonarea sistemelor electroenergetice vaste se făcea, fie prin metode empirice, bazate pe experiența inginerească, fie cu ajutorul unor metode, avînd la bază criteriul distanțelor electrice (admitanțe electrice). Scopul acestei lucrări este de a expune o metodă de studiu mai exactă pentru coerența generatoarelor, care dă posibilitatea reprezentării generatoarelor prin trei modele diferite: complet, liniar sau simplificat.

Manuscris primit la data de 12 septembrie 1982
* Șef lucrări dr. ing.; Ing., Catedra Rețele electrice

Algoritmul și programul de calcul realizat ia în considerare, pe lîngă distanțele electrice dintre generatoare și variațiile unghiurilor rotorice, definind în acest sens un factor de zonare [1].

2. Prezentarea modelului matematic

Studiul de coerență a generatoarelor pleacă de la accepțiunea existenței în sistem a unei zone în studiu și a unor zone externe față de aceasta.

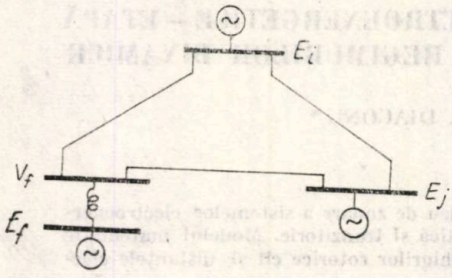


Fig. 1

În rețeaua extinsă, cuprinzînd generatoarele — reprezentate printr-o tensiune electromotoare E în spatele reactanțelor tranzitorii x'_d și consumatorii liniarizați, se stabilește generatorul din zona în studiu față de care se cercetează coerența generatoarelor. La bornele acestuia se consideră un defect — scurt circuit trifazat — și se calculează variațiile unghiurilor rotorice ale generatoarelor.

Se procedează mai întîi, la reducerea matricei admitanțelor nodale la bornele interne ale generatoarelor și la nodul f de defect — bornele generatorului din zona în studiu (fig. 1); în această rețea se determină distanțele electrice $\underline{Y}_{ij}$ — dintre bornele interne ale generatoarelor i și j, respectiv $\underline{Y}_{if}$ — dintre borna internă a generatorului i și nodul de defect, f.

Puterea aparentă de transfer dintre generatoarele i și j, $\underline{S}_{ij}$, este dată de relația:

$$\underline{S}_{ij} = \underline{E}_i \underline{Y}^*_{ij} (\underline{E}^*_i - \underline{E}^*_j) \tag{1}$$

în care: $\underline{E}_i$, $\underline{E}_j$ sînt t.e.m. în spatele reactanțelor tranzitorii ale generatorului i, respectiv j;

$\underline{Y}_{ij}$ — admitanța dintre nodurile interne i și j;

Exprimînd fazorii în coordonate polare și separînd părțile reale se obține expresia puterii active ce pleacă de la nodul i:

$$P_i = E_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq f}}^{n} E_j Y_{ij} \cos(\theta_i - \delta_j) + E_i V_f Y_{if} \cos(\theta_i - \delta_f) \tag{2}$$

în care:

θ_i sînt defazajele tensiunii la borne față de nodul de referință;

δ — unghiul intern;

V_f — modulul tensiunii pe fază la bornele generatorului în studiu (considerat și nod de defect).

În relația (2) se pot pune în evidență cele două tipuri de distanțe electrice $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq f}}^{n} \underline{Y}_{ij}$ și $\underline{Y}_{if}$. În timp ce modificarea primului termen influențează puterea de transfer între generatorul i și celelalte generatoare, cel de-al doilea termen influențează modificarea oscilațiilor rotorice.

Pentru a exemplifica calculul variațiilor unghiurilor rotorice, $\Delta\delta$, se consideră cazul simplu al unui generator ce debitează pe o bară de putere infinită (fig. 2).

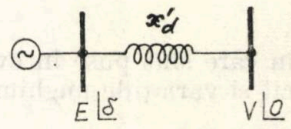


Fig. 2

Expresia puterii electromagnetice debitate de generator este :

$$P_e = \frac{EV}{x'_d} \sin \delta \tag{3}$$

În vederea evaluării comportării generatorului la un scurtcircuit trifazat la bornele acestuia se va folosi criteriul ariilor. Conform acestui criteriu, sistemul rămîne stabil dacă aria de accelerare este mai mică sau cel mult egală cu aria de frînare.

Cuplul de accelerare, considerat ca diferența dintre cuplul mecanic și cuplul electric, este dat de relația [3] :

$$C_{ac} = C_m - C_e = J \frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}$$

au ținînd seama de relația (3) :

$$C_m = J \frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{EV}{x'_d} \sin \delta \tag{4}$$

în care J este momentul cinetic al maselor în mișcare.

Ecuația neliniară (4) nu se poate rezolva sub forma ei generală decît cu ajutorul integralelor eliptice [2]. Soluția ecuației, pusă sub forma $\delta = f(t)$, dă variația în timp a unghiului și permite să se stabilească dacă mașina rămîne sau nu în sincronism. Aplicînd metoda diferențelor finite se obține variația unghiului rotoric într-un interval de timp [2] :

$$\Delta\delta = \frac{P_{e(0-)} - P_{e(0+)}}{T_a} \omega_0 t_c^2 \tag{5}$$

în care :

T_a este timpul de lansare al grupului, în secunde ;
t_c — timpul de defect, în secunde ;
$P_{e(0-)}, P_{e(0+)}$ — puterea electromagnetică debitată înainte, respectiv după apariția defectului.

Relația (5) reprezintă variația unghiului rotoric al mașinii sincrone în momentul apariției scurtcircuitului și poate da indicații cu privire la coerența generatoarelor.

Pe baza celor arătate se definește factorul de zonare [1]:

$$F_i = \Delta\delta_i \frac{Y_{ii}}{Y_{if}} \tag{6}$$

în care sînt puse în evidență atît distanțele electrice reprezentate în (3) cît și variațiile unghiurilor rotorice din (5).

3. Algoritmul de calcul

Principalele etape ale algoritmului sînt următoarele:

1. Extinderea matricei admitanțelor nodale

- se calculează reactanța tranzitorie în axa d a mașinii, în u.r., pentru nodurile generatoare :

$$x'_{di} = \frac{x'_{di}\,\%}{100} \frac{U^2_{ngi}}{S_{ngi}} \qquad i \in g \tag{7}$$

în care x'_{di} este reactanța tranzitorie în axa h a generatorului i, în procente;

U_{ngi} — tensiunea nominală a generatorului, în kV;

S_{ngi} — puterea aparentă nominală a generatorului i, în MVA.

- se liniarizează sarcinile din nodurile receptoare

$$\underline{Y}_{si} = \frac{\underline{S}^*_i}{V^2_i} \qquad i \in r$$

- se completează matricea admitanțelor nodale cu noi laturi

$$\underline{Y}_{gi} = j \frac{1}{x'_{di}} \qquad i \in g \tag{8}$$

și se modifică termenii diagonali cu relația:

$$\underline{Y}'_{ii} = \underline{Y}_{ii} + \underline{Y}_{gi} + \underline{Y}_{si} \tag{9}$$

în care termenii Y_{gi} și Y_{si} apar după cum la nodul f sînt generatoare respectiv consumatori.

2. Reducerea matricei admitanțelor nodale la nodurile generatoare prin subprogramul de eliminare ordonată a nodurilor pasive. De menționat, utilizarea teoriei grafurilor orientate pentru prima dată în această problemă [5].

Relațiile de calcul pentru eliminarea succesivă a nodurilor pasive j sînt următoarele [3]:

$$\underline{Y}_{ii}^{\text{nou}} = \underline{Y}_{ii}^{\text{vechi}} - \frac{\underline{Y}_{ij}^{\text{vechi}} - \underline{Y}_{ji}^{\text{vechi}}}{\underline{Y}_{jj}^{\text{vechi}}}$$

$$\underline{Y}_{ik}^{\text{nou}} = \underline{Y}_{ik}^{\text{vechi}} - \frac{\underline{Y}_{ij}^{\text{vechi}} - \underline{Y}_{jk}^{\text{vechi}}}{\underline{Y}_{jj}^{\text{vechi}}} \tag{10}$$

Valorile admitanțelor laturilor reduse la nodurile generatoare se înregistrează în matricea $[\underline{Y}_{gg}]$.

3. Calculul tensiunii electromotoare din spatele reactanței tranzitorii la momentul t_{0-} :

$$\underline{E}_{gi} = \underline{V}_i + jx'_{di}\left(\frac{\underline{S}_i}{\underline{U}_i}\right)^* \tag{11}$$

4. Calculul curenților din nodurile generatoare

$$\underline{I}_{gi} = \left(\frac{\underline{S}_i}{\underline{V}_i}\right)^* \tag{12}$$

5. Simularea unui defect în nodul în studiu [4].
În acest scop se modifică matricea $[\underline{Y}_{gg}]$ prin eliminarea liniei și coloanei corespunzătoare nodului de defect.

6. Calculul noilor valori ale tensiunii $\underline{E}_{gi}$ în momentul t_{0+}. Pentru aceasta se rezolvă, printr-o eliminare Gauss, sistemul de ecuații :

$$\underline{Y}_{gg}\underline{E}_{gi} = \underline{I}_{gi} \tag{13}$$

7. Se calculează noile puteri electromagnetice în nodurile generatoare, în u.r.

$$P_{e(0+)i} = \frac{R_e\{\underline{E}_{gi}\underline{I}_{gi}^*\}}{P_{ni}} \tag{14}$$

în care P_{ni} este puterea activă nominală a generatorului i.

8. Variația unghiului rotoric se determină cu relația (4).

9. Se calculează factorul F cu relația (5).

4. Rezultate. Concluzii

Pe baza algoritmului prezentat a fost realizat programul de calcul ZONA. Utilizînd tehnici speciale de calcul ca eliminarea ordonată a nodurilor pasive și tehnici speciale de programare există posibilitatea realizării zonării unui sistem electroenergetic de 500 de noduri, dintre care 80 de noduri generatoare folosind o partiție de 90 k0.

Programul ZONA a fost testat pe o rețea de 16 noduri, dintre care 5 noduri sînt generatoare (fig. 3).

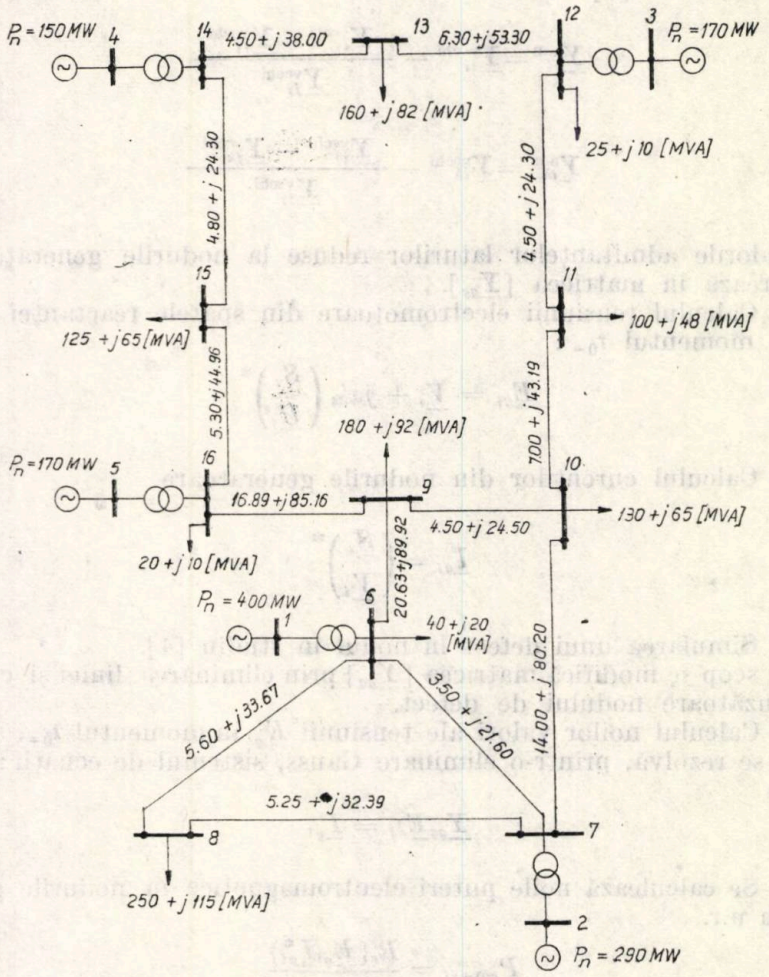


Fig. 3

Pentru rețeaua test din fig. 3 considerînd generatorul 1 ca nod în studiu și avînd în vedere rezultatele sintetizatoare din tabelul 1 rezultă:

— zona în studiu va fi formată din generatoarele 1 și 2;

— zona externă va cuprinde generatoarele 3, 4 și 5, care sînt coerente conform acestui criteriu.

Tabelul 1

Rezultatele zonării

Generator	Factorul F
1	0,00
2	0,52
3	2,05
4	1,92
5	2,11

Factorul F calculat de programul ZONA are o valoare orientativă, în principal el indicînd cît de largă poate fi zona în studiu. Pentru exemplul prezentat considerarea și a generatorului 3 în această zonă în cadrul studiilor de

stabilitate, poate conduce la corelări false, deoarece el are comportări asemănătoare cu generatoarele 4 și 5.

În general, zona în studiu trebuie să se aleagă pentru un factor $F < 1$.

Aceeași concluzie a rezultat și din studiul variației unghiurilor pe rețeaua completă, obținute prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale mașinilor sincrone pe o durată pînă la 1 secundă [6]. În acest caz însă durata de calcul este mult mai mare.

BIBLIOGRAFIE

1. *Ghafurion, A., Cory, B.I.*, Determination of Equivalents for Power System Transient Stability Studies. Imperial College, London, S.W.7.
2. *Kovacs, K. P.*, Analiza regimurilor tranzitorii ale mașinilor electrice. Editura tehnică, București, 1980.
3. *Potolea, E.*, Calculul regimurilor de funcționare ale sistemelor electroenergetice. Editura tehnică, București, 1977.
4. *Potolea, E., Eremia, M., Crisciu, H.*, Utilizarea calculatoarelor numerice în studiul stabilității tranzitorii a sistemelor electroenergetice. Litografia I.P.B., 1980.
5. *Diaconu, A.*, Studiul stabilității sistemelor electroenergetice la mici perturbații prin metoda transmitanțelor. Proiect de diplomă, I.P.B., Catedra de rețele electrice, Facultatea Energetică, 1982.
6. *Eremia, M., Bulac, A., Bulac, C., Crisciu, H.*, Echivalenți dinamici în studiul stabilității tranzitorii a sistemelor electroenergetice vaste. Conferința națională de electrotehnică și electroenergetică, oct. 1982, Timișoara.

Electric Power System Partitioning as an Intermediate Stage in States Calculation

The paper presents a new procedure for partitioning the electric power systems as a first stage in dynamical and transient stability studies. The proposed mathematical model considers the rotor angle variations as well as the electrical distances between generators.
Good results have been obtained when testing the algorithm and the computer programme.

AUTOMATICĂ

C.Z.: 62—52:681.3

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОГО АЛГОРИТМА С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ТИРИСТОРНЫХ ПРИВОДОВ

И. ДУМИТРАКЕ, С. ДУМИТРИУ, Ф. МУНТЕАНУ *

В работе представлена процедура синтеза управляющего алгоритма с переменной структурой, предназначен электрических приводов постоянного тока, управляемые тиристорными преобразователями.

Анализируются ряд частностей связанные с имплементацией алгоритма на управляемой структурой с микропроцессором.

1. Введение

Выдающихся достижения в области технологии интегральных схем на широком и очень широком масштабе (ЛСИ, ВЛСИ) в области силовой электроники и электрических машин, приводили к важным мутациям в области элементов и систем управления электрических приводов. Особые требования к динамическим качествам систем электроприводов привели к развитию и применению новых структур алгоритмов управления на основе числовой техники.

Предлагаемый алгоритм для регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока разработан на основе дискретной модели процесса. Структура этого алгоритма меняется в зависимости от режима протекания тока: прерывный и непрерывный.

В конце работы изложены некоторые специфические аспекты в связи с внедрением алгоритма на регуляторе с микропроцессором.

2. Математическая модель тиристорного электропривода

Типичная структура с микросчетчик-регулятором для управления электропривода постоянного тока приведена на рис. 1.

Модель разработана для трехфазной схемы с тиристорными преобразователями, без уравнительного тока, и двигателя с независимым возбуждением (рис. 2).

Приятно в редакцию 11 октября 1982

* Проф. к.т.н. инж.; Старший преподаватель к.т.н. инж.; Старший преподаватель к.т.н. инж, Кафедра Автоматики

На рис. 3 приведены главные характеристики в зависимости от времени в прерывном и непрерывном режиме.

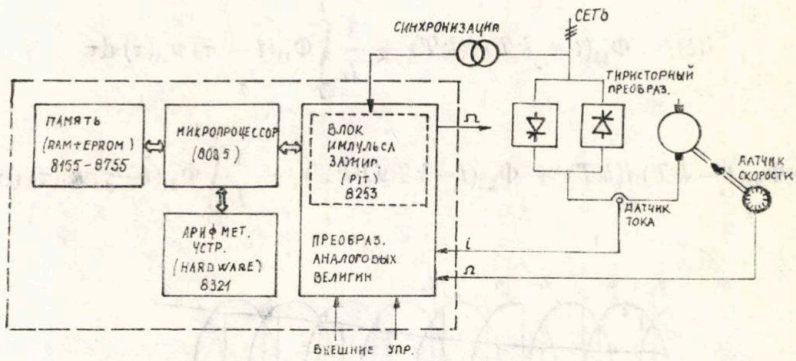


Рис. 1

Модель процесса в переменных состояний имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_a} & 0 \\ \dfrac{R}{K} & -\dfrac{1}{T_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_a \qquad (1)$$

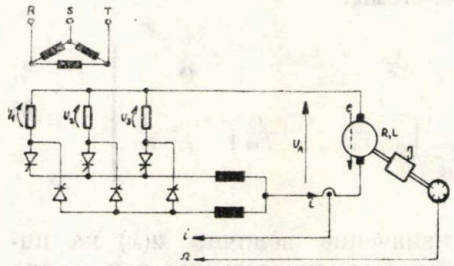


Рис. 2

где:

R, L — общее сопротивление (активное и индуктивное);

$T_a = L/R$, $T_m = RJ/K^2$ — постоянные времени ротора и двигателя, K — фактор пропорциональности.

Выходное напряжение тиристорного преобразователя (рис. 2) дается соотношением:

$$u_A(t) = \begin{cases} U \sin\left[\omega(t - kT) + \dfrac{5\pi}{6}\right]; & t \in [kT,\ kT + \alpha_k) \qquad (2) \\ U \sin\left[\omega(t - kT) + \dfrac{\pi}{6}\right]; & t \in (kT + \alpha_k,\ (k+1)\,T]. \qquad (3) \end{cases}$$

Интервал дискретизация равняется 1/3 периода переменного тока сети ($T = 20/3$ мсек).

Решение дифференциальных уравнений (1) при начальных условиях $i(t_0) = i(kT)$, $\Omega(t_0) = \Omega(kT)$ имеет вид:

$$i(t) = \Phi_{11}(t - kT)\, i(kT) + \frac{1}{L}\int_{kT}^{t} \Phi_{11}(t - \tau)\, u_A(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

$$\Omega(t) = \Phi_{21}(t - kT)\, i(kT) + \Phi_{22}(t - kT)\Omega(kT) + \frac{1}{L}\int_{kT}^{t} \Phi_{21}(t - \tau) u_A(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

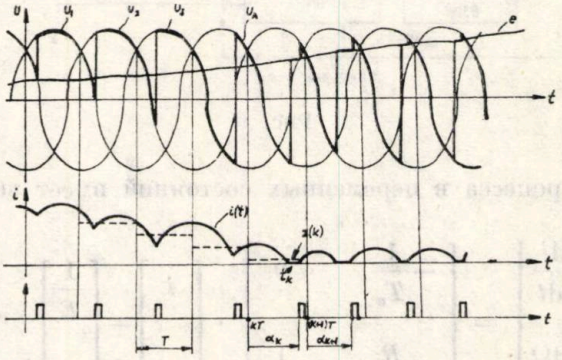


Рис. 3

где $\Phi(t)$ переходная матрица состояний системы:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{Ta}} & 0 \\ \dfrac{R/K}{1 - Tm/Ta}\left(e^{-\frac{t}{Ta}} - e^{-\frac{t}{Tm}}\right) & e^{-\frac{t}{Tm}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Алгоритм управления вычисляет значение величны $u(k)$ на интервале kT, $(k+1)T$. Это значение применяется как импульс зажигания тиристора на следующем интервале $(k+1)T$, $(k+2)T$.

Естественно, чтобы учитывать в качестве входной величины процесса $u(k) = \alpha_{k+1}/T$.

Выходная величина (скорость) будет $y(k) = \Omega(kT)$.

Вместо мгновенного значения тока уместно использовать среднее значение тока $z(k)$ на интервале дискретизации:

$$z(k) = \frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T} i(t)\, \mathrm{d}t \tag{7}$$

Для непрерывных режимов, интегрируя (1) получается:

$$z(k) = \frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T} i(t)\,\mathrm{d}t = c_1 i(k) + f(\alpha_k/T), \tag{8}$$

где ввиду упрощения обозначили $x(kT) = x(k)$.

Вводим следующие переменные состояния:

$$\begin{cases} x_1(k) = \alpha_k/T = u(k-1) & (9) \\ x_2(k) = z(k) - f[x_1(k)] & (10) \\ x_3(k) = \Omega(k) & (11) \end{cases}$$

На основе (5) в момент $(k+1)T$ имеем:

$$x_3(k+1) = \Phi'_{21} \cdot x_2(k) + \Phi_{22} \cdot x_3(k) + h[x_1(k)], \tag{12}$$

где

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(T),\ \Phi'_{21} = \Phi_{21}/c_1,\ c_1 = (1-\Phi_{11})\,T_a/T.$$

После некоторых математических выкладок получается соотношение:

$$x_2(k+1) = \Phi_{11}x_2(k) + g[x_1(k)] \tag{13}$$

Нелинейная модель процесса в непрерывном режиме принимает вид:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = u(k) \\ x_2(k+1) = \Phi_{11}x_2(k) + g[x_1(k)] \\ x_3(k+1) = \Phi'_{21}x_2(k) + \Phi_{22}x_3(k) + h[x_1(k)] \\ y(k) = x_3(k) \end{cases} \tag{14}$$

В прерывном режиме (рис. 3) среднее значение тока получается путем интегрирования уравнения (4)

$$z(k) = \frac{1}{T}\left[\int_{kT}^{kT+t_k^d} i(t)\,\mathrm{d}t + \int_{kT+\alpha_k}^{(k+1)T} i(t)\,\mathrm{d}t\right] = f^*[x_1(k-1)] + g^*[x_1(k)] \tag{15}$$

где f^*, g^* — нелинейные функции.

Аналогичным образом, определяя $x_2(k) = z(k) - g^*[x_1(k)]$, результирует система уравнений — математическая модель прерывного режима процесса:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = u(k) \\ x_2(k+1) = f^*[x_1(k)] \\ x_3(k+1) = \Phi'_{21}x_2(k) + \Phi_{22}x_3(k) + h[x_1(k)] \\ y(k) = x_3(k) \end{cases} \tag{16}$$

Несмотря на то, что Φ_{ij}, Φ'_{21} вычисляются легко, модели (14), (16 сильно нелинейны потому что $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$, $f^*(\cdot)$, $g^*(\cdot)$ сложные нелинейные функции.

3. Алгоритм с переменной структурой

Путем линеаризации математических моделей (14) получается (17). Такая процедура применяется потому, что тиристорные преобразователи имеют большой коэффициент усиления (значит узкая область для α_k).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G & \Phi_{11} & 0 \\ H & \Phi'_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \quad 0 \quad 1]\,\mathbf{x}(k), \end{cases} \tag{17}$$

где вектор переменных состояния $\mathbf{x}(k)$ легко реконструируется:

$x_1(k) = u(k-1)$ является предыдущем управлением,

$x_2(k) = z(k) - Fu(k-1)$ реконструируется с помощью вычислительных программ.,

$x_3(k)$ — измеряемый.

Таким образом весь вектор состояний может быть реконструирован. Алгоритм регулирования с обратной связью по состоянию задается соотношением:

$$\begin{aligned} u(k) &= K_0 r(k) - K_1 x_1(k) - K_2 x_2(k) - K_3 x_3(k) = \\ &= K_0 r(k) - (K_1 - K_2 F)u(k-1) - K_2 z(k) - K_3 y(k), \end{aligned} \tag{18}$$

где $r(k)$ задание системы в момент kT.

K_i — коэффициент пропорциональности, которые вычисляются из условия "dead-beat" $y(k+3) = r(k)$.

В прерывном режиме, путем линеаризации (16), результирует аналогичным образом управление

$$u(k) = K_0^* r(k) - (K_1^* - K_2^* G^*)\,u(k-1) - K_2^* z(k) - K_3^* y(k), \tag{19}$$

где K_i^* и G^* могут быть вычислены из условия „dead-beat".

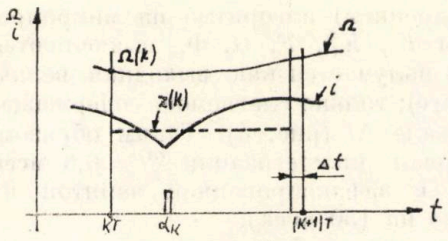


Рис. 4

Схема пограммы на микросчетчике-регуляторе приведена на рис. 5. Алгоритм в прерывном варианте задается (19), а в непрерывном варианте (18). Граница между теми двумя режимами является нелинейной (эллиптической) функцией от $z(k)$ и $y(k)$.

Субоптимальное поведение получается учитывая простое граничное условие:

$$z(k) < z^*. \tag{20}$$

Если выполняется (20) то режим является прерывным, иначе непрерывным. Значение z^* зависит от структуры процесса и может быть определено экспериментально.

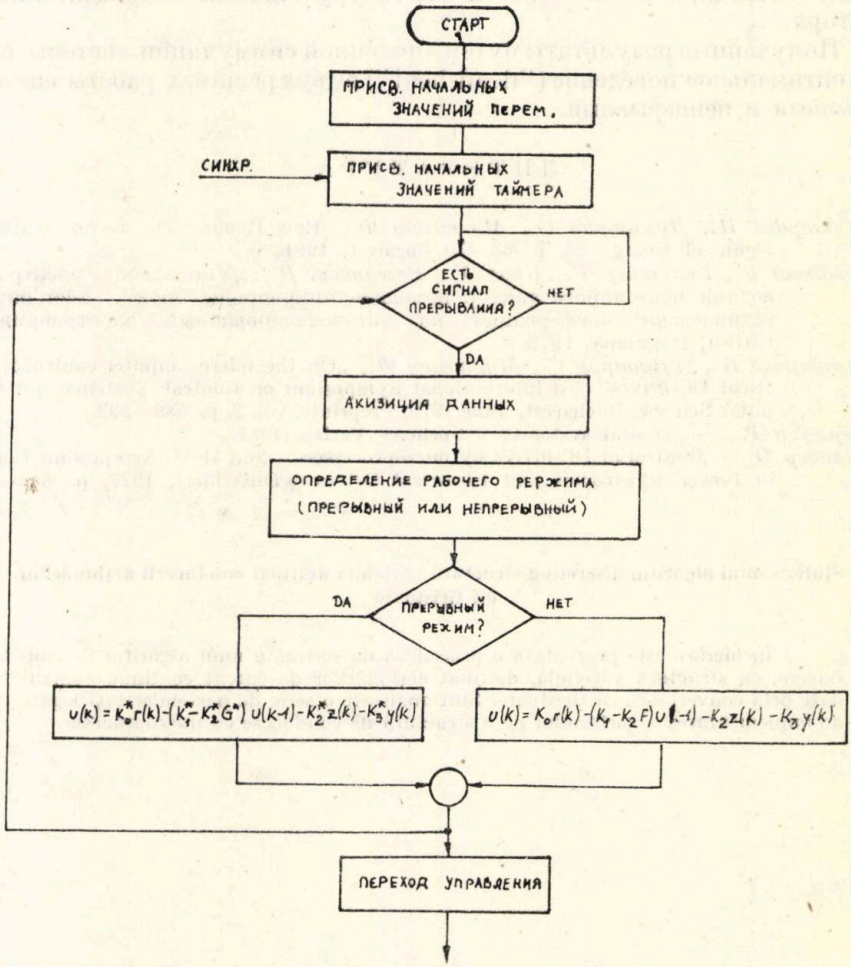


Рис. 5

В связи с имплементацией (внедрением) алгоритма на микропроцессоре подчеркиваем, что параметры K_i, K_i^*, F, G, Φ_{ij} вычисляются „off-line"; среднее значение тока $z(k)$ получается как выходная величина интегрирующего элемента (hardware); только слагаемое, содержащее $z(k)$ должно быть вычислено в интервале Δt (рис. 4). Таким образом, время счета $u(k)$ не превышает интервал дискретизации $T = 6{,}6$ мсек (известно, что операция умножения с зафиксированной запятой на микросчетчике длится приблизительно на 150 μсек).

4. Выводы

Разработка более точных математических моделей в дискретном виде для совокупности тиристорный преобразователь — двигатель постоянного тока позволяет применение более сложных алгоритмов управления благодаря включению в структуру системы микросчетчика-регулятора.

Полученные результаты путем численной симмуляции системы показали оптимальное поведение ("dead-beat") в двух режимах работы системы: прерывный и непрерывный.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Думитраке И., Думитриу С., Мунтеану Ф.*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., 26, p. 63—70 Bucarest, 1981.
2. *Шенфельд Р., Гайнтнер Г., Круг Х., Розенталь В.*, „Управление электроприводами постоянного тока с помощью микропроцессоров". 5-ая научно-техническая конференция по автоматизированным электроприводам СЭВ-а, Варшава, 1979 г.
3. *Думитраке И., Думитриу С., Мунтеану Ф.*, „On the microcomputer control of electrical DC-drives" 3rd international Symposium on Control Systems and Computer Science, Bucharest, June 1979, Preprints, vol. 2, p. 583—592.
4. *Изерманн Р.*, — „Digital systems" — Springer Verlag, 1981.
5. *Шнайдер Э.*,—„Control of DC-drives by microprocessors". 2nd IFAC Symposium Contro in Power Electronics and Electrical Drives — Dusseldorf, 1977, p. 603—608

Sinteza unui algoritm discret cu structură variabilă destinat conducerii acţionărilor cu tiristoare

În lucrare este prezentată o procedură de sinteză a unui algoritm de conducere, cu structură variabilă, destinat acţionărilor de curent continuu comandate prin convertoare cu tiristoare. Sînt analizate o serie de particularităţi legate de implementarea algoritmului pe o structură de conducere cu microprocesor.

C.Z.: 519.1
512.62

ON FULL MATRIX FRACTION DESCRIPTIONS

P. STOICA *

Matrix-fraction descriptions (MFDs) with *all* elements of the matrix coefficients of the numerator and denominator polynomials taken as independent coordinates of the parameter space are discussed. Such MFDs will be here called „full MFDs" (FMFDs). The main result is a new and neat characterisation of the class of strictly proper rational matrices which can be uniquely represented by using FMFDs. That characterization is believed to provide additional insights into the FMFDs.

1. Introduction and preliminaries

Let $G(Z^{-1})$ be a discrete transfer function matrix of dimension ny x nu, the entries of wich are rational functions of the backward shift operator Z^{-1}. (The symbol Z will hence stand for the forward shift operator. It will also be used to denote an arbitrary complex variable but this should not lead to any confusions). Note that while we shall for convenience confine the analysis to the discrete case, similar results can be shown for continuous transfer function matrices.

In the sequel we shall assume that $G(Z^{-1})$ is strictly proper (s.p.). This means that $G(0) = 0$. Consider the following (left) matrix-fraction description of $G(Z^{-1})$:

$$G(Z^{-1}) = A(Z^{-1})^{-1}B(Z^{-1}) \tag{1.1.a}$$

where $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$ are matrix polynomials of dimensions $ny \times ny$ and $ny \times nu$, respectively, given by

$$\begin{aligned} A(Z^{-1}) &= I + A_1 Z^{-1} + \ldots + A_{na} Z^{-na} \\ B(Z^{-1}) &= B_1 Z^{-1} + \ldots + B_{nb} Z^{-nb} \end{aligned} \tag{1.1.b}$$

In the following we shall often use the abreviation MFD (na, nb) to designate (1.1). Note that in (1.1) $B_0 = 0$ follows simply from our assum-

Manuscript received March 18, 1982
* Senior lecturer, Automatic Control Dept.

ption that $G(0) = 0$. Also, as is well known, the numerator and denominator polynomials in (1.1) can always be chosen to be left coprime, and then it readily follows that A_0 must in that case be a nonsingular matrix. There is hence no restriction to take $A_0 = I$.

When using MFDs in system identification—application to which we shall particularly refer to in the following — it is necessary to parametrize in some way the matrix coefficients $\{A_i, B_j\}$ in (1.1). In the following we shall consider that *all* elements of the $\{A_i, B_j\}$ are taken as independent coordinates of the parameter space. A MFD parametrized in this way will be called a full MFD (FMFD or yet FMFD (na, nb) whenever the orders should be indicated).

FMFDs were studied in detail by Hannan, see [1—4]. He proved that a FMFD (na, nb) is uniquely specified through (1.1) if and only if the polynomials $A(Z^{-1})$, $B(Z^{-1})$ are left coprime and

$$\text{rank } [A_{na} \; B_{nb}] = ny \tag{1.2}$$

see [1]. He also showed, [2], [3] that the condition (1.2) will be fulfiled generically, that is there will be transfer function matrices $G(Z^{-1})$ not satisfying (1.2), but in the parameter space such $G(Z^{-1})$ will correspond to some sets of lower dimensions (this is in fact fairly obvious from (1.2)). The FMFD could thus be called a quasi-canonical MFD (or, perhaps less suggestive, a pseudocanonical MFD as suggested in [6]).

As compared to a canonical MFD, the FMFD has of course the drawback that it makes impossible the identification of some systems described by transfer function matrices which do not fulfil (1.2). However, this should not be viewed as a major problem since such „pathological" systems are unlikely to be encountered in practice, cf. the above discussion (and also [2—4]).

On the other hand, the FMFD (1.1) has only two structural indices — the orders na, nb — and this should be compared with the considerably larger number of integer-valued parameters required to describe various canonical MFDs. In practice, the structural indices will have to be scanned. This is clearly time consuming and as a consequence the small number of integer parameters needed to define the FMFD could be an important practical advantage for many applications.

In practice it is in fact not uncommon to use FMFD (n, n) rather than FMFD (na, nb), $na \neq nb$, just in order to reduce even more the number of structural parameters to be scanned. For a FMFD (n, n), the rank condition (1.2) reads

$$\text{rank } [A_n \; B_n] = ny \tag{1.3}$$

Clearly (1.3) is a „little" stronger than (1.2) for it is now essentially required that either A_n or B_n be nonsingular. However, since (1.3) is still generically fulfiled it seems indeed appropriate to use FMFDs (n, n) in order to take advantage of the only one structural index, n, which needs to be determined in such a case. It might be objected that a FMFD (n, n) will rarely be a parsimonious model. However, after a FMFD(n, n)

was fitted to the data we can also fit, if desired, some FMFDs (na, nb) with $\max(na, nb) = n$. For the values of n encountered in practice, the, number of na, nb — combinations which will have to be tried may now be reasonably small.

In the following we shall be concerned with the FMFD (n, n). We shall derive an alternative characterisation of the class of transfer functions $G(Z^{-1})$ which can be uniquely represented by using FMFDs (n, n). As contrasted with (1.3), that new characterisation will be in terms of some standard quantities associated with rational matrices (viz. observability index and McMillan degree). The analysis will also show a clear way to obtain the unique FMFD (n, n), if any, from a given transfer function matrix $G(Z^{-1})$.

Finally, we shall show that the more general FMFD (na, nb) can be treated in the same way.

2. Main result

Theorem. Consider a rational matrix $G(Z^{-1})$ and let $G^*(Z) = G(Z^{-1})$ (For instance, if $G(Z^{-1}) = Z^{-2}/(1 - 0.5\ Z^{-1})$ then $G^*(Z) = 1/(Z^2 - 0.5\ Z)$). Assume that $G(Z^{-1})$ is strictly proper and let ν and δ denote the observability index and, respectively, the McMillan degree of $G^*(Z)$. Then the following statements are equivalent:

i) The FMFD(n, n) of $G(Z^{-1})$ is unique.

ii) The following relations hold

$$n = \nu \tag{2.1. a}$$

$$\delta = \nu \cdot ny \tag{2.1. b}$$

iii) $G(Z^{-1})$ has a MFD (n, n) with $A(Z^{-1})$ and $B(Z^{-1})$ left coprime and

$$\text{rank } [A_n \ B_n] = ny \tag{2.2}$$

Proof:

We shall prove that i) $\Leftrightarrow$ ii) and ii) $\Leftrightarrow$ iii). Consider first the equivalence i) $\Leftrightarrow$ ii). Introduce the following matrix polynomials

$$X(Z) = X_1 Z + \ldots + X_n Z^n \quad Y(Z) = Y_1 Z + \ldots + Y_n Z^n$$

of dimensions $ny \times ny$ and $ny \times nu$, respectively. It can easily be shown that i) holds if and only if

$$X(Z)G^*(Z) = Y(Z) \tag{2.3}$$

implies $X(Z) = 0$, $Y(Z) = 0$. Let $\mathscr{A}(Z)^{-1} \cdot \mathscr{B}(Z)$ be the row — proper factorization of $G^*(Z)$, with

$$\mathscr{A}(Z) = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1 Z + \ldots + \mathscr{A}_\nu Z^\nu \quad \mathscr{B}(Z) = \mathscr{B}_0 + \mathscr{B}_1 Z + \ldots + \mathscr{B}_{\nu-1} Z^{\nu-1}$$

Note that $\mathscr{B}_\nu = 0$ follows from our assumption that $G(Z^{-1})$ is strictly proper which here means that $\lim_{Z\to\infty} G^*(Z) = 0$. Since $\mathscr{A}(Z)$ and $\mathscr{B}(Z)$ are left coprime, there exist polynomials $M(Z)$ and $N(Z)$ such that

$$\mathscr{A}(Z)M(Z) + \mathscr{B}(Z)N(Z) = I,$$

cf. e.g. [5]. We then have

$$X(Z)M(Z) + Y(Z)N(Z) = X(Z)\mathscr{A}(Z)^{-1}$$

which shows that the solutions of (2.3) are given by

$$X(Z) = L(Z)\cdot\mathscr{A}(Z) \quad Y(Z) = L(Z)\cdot\mathscr{B}(Z) \tag{2.4}$$

where $L(Z)$ is a matrix polynomial restricted only by the condition that the degrees of the right hand sides of (2.4) be n.

Assume first that (2.1) holds. Since then $\mathscr{A}_\nu$ is nonsingular it follows easily that $L(Z) \equiv 0$ and thus ii) $\Rightarrow$ i). Assume next that $n > \nu$. Then, regardless the value of δ we can take $L(Z)$ as an arbitrary polynomial of degree $n - \nu$. Thus i) $\Rightarrow n \leqslant \nu$. Since n cannot be less than ν (for in that case $[Z^nA(Z^{-1})]^{-1}[Z^nB(Z^{-1})]$ would be a left factorization of $G^*(Z)$ with $Z^nA(Z^{-1})$ of degree $n < \nu$, and this is clearly impossible), it follows that we must have $n = \nu$. Finally, assume that $n = \nu$ but $\delta < \nu ny$. Then $\mathscr{A}_\nu$ is singular. Let $L_1 \neq 0$ be a $ny \times ny$ — matrix the rows of which belong to the null space of $\mathscr{A}_\nu^T$. Take

$$\begin{aligned} X(Z) &= L_1Z\mathscr{A}(Z) = L_1\mathscr{A}_{\nu-1}Z^\nu + \ldots + L_1\mathscr{A}_0Z \\ Y(Z) &= L_1Z\mathscr{B}(Z) = L_1\mathscr{B}_{\nu-1}Z^\nu + \ldots + L_1\mathscr{B}_0Z \end{aligned} \tag{2.5}$$

Since $\mathscr{A}(Z)$ and $\mathscr{B}(Z)$ are left coprime, we necessarily have rank $[\mathscr{A}_0\ \mathscr{B}_0] = ny$. Hence, not all coefficients in (2.5) can be zero and therefore we have found a nontrivial solution of (2.3). This shows that i) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (2.1. b) and the proof of the equivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) is complete.

Consider next the second equivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii). Assume that iii) holds. It then follows from lemma A given in the Appendix that the matrix polynomials

$$A^*(Z) = Z^nA(Z^{-1}) = IZ^n + A_1Z^{n-1} + \ldots + A_n$$

$$B^*(Z) = Z^nB(Z^{-1}) = B_1Z^{n-1} + \ldots + B_n$$

are left coprime. As a consequence, $A^*(Z)^{-1}B^*(Z)$ is the (normalized) row proper factorization of $G^*(Z)$ and then (2.1) follows. The implication ii) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ iii) follows similarly by applying lemma A to the row proper factorization of $G^*(Z)$.

Some remarks on the above result are now in order.

Remark 1: Whenever a unique FMFD (n, n) exists, its order is given by (2.1a). Somewhat surprisingly within relation (2.1) appear the observability index and McMillan degree of $G^*(Z)$ and not of $G(Z^{-1})$. Note that ν and δ may well differ from the corresponding quantities associated to $G(Z^{-1})$ (as the simplest examples show).

Remark 2: The last lines of the above proof show how the unique FMFD (n, n) of a given s.p. transfer function matrix $G(Z^{-1})$ can be obtained, provided of course that the conditions for it to exist be fulfiled. Indeed, by using a standard technique, see e.g. [5], we get first the row proper factorization $\mathscr{A}(Z)^{-1} \cdot \mathscr{B}(Z)$ of $G^*(Z)$. Then, provied that (2.1. b) holds, or equivalently that $\mathscr{A}_\nu$ is nonsingular, we simply form the unique FMFD (n, n), $n = \nu$, as

$$A(Z^{-1}) = \mathscr{A}_\nu^{-1} Z^{-\nu} \mathscr{A}(Z)$$

$$B(Z^{-1}) = \mathscr{A}_\nu^{-1} Z^{-\nu} \mathscr{B}(Z).$$

Remark 3: As was explained in section 1, we believe that in practice, where apriori structure informations are in general lacking the FMFD (n, n) should normally be prefered to the FMFD(na, nb) in the preliminary stage of structural identification. That was the main reason why we have concentrated the analysis on FMFDs (n, n). It is however worth noticing that the more general FMFD (na, nb) can be treated, in the same way. Indeed, it can easily be seen that theorem 1 will be valid for FMFDs (na, nb) as well, provided $G^*(Z)$ is re-defined as $G^*(Z) = Z^{nb-na} G(Z^{-1})$, (2.1.a) is changed to $na = \nu$, and (2.2) is replaced by the rank condition (1.2) on a MFD (na, nb). Now $G^*(Z)$ depends on the difference $na - nb$. It then appears that for $na \neq nb$, the alternative condition on $G^*(Z)$ for the unique FMFD (na, nb) to exist, will no longer be more useful than Hannan's condition, (1.2), in deriving the unique FMFD (na, nb) of a given s.p. $G(Z^{-1})$. (unlike the case $na = nb$, see Remark 2 above).

Appendix — On reciprocal matrix polynomials

Consider the following two matrix polynomials

$$A(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{na} z^{na} \qquad B(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_{nb} z^{nb}$$

of dimensions $ny \times nw$ and $ny \times nu$, respectively. Introduce the corresponding reciprocal polynomials

$$A^*(z) = z^{na} A(z^{-1}) \qquad B^*(z) = z^{nb} B(z^{-1})$$

As is known, $A(z)$, $B(z)$ left coprime does not necessarily imply that $A^*(z)$, $B^*(z)$ are also left coprime. We have, however, the following simple result.

Lemma A. The following statements are equivalent.

i) $A(z)$, $B(z)$ are left coprime and rank $[A_{na}\ B_{nb}] = ny$.

ii) $A^*(z)$, $B^*(z)$ are left coprime and rank $[A_0\ B_0] = ny$.

Proof:

Assume that i) holds. Then we have

$$\text{rank } [A(z)\ B(z)] = ny \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \tag{A.1}$$

If follows from (A.1) that

$$\text{rank } [A_0 \; B_0] = ny.$$

Furthermore, for $z \neq 0$ we can write

$$\text{rank } [A^*(z) \; B^*(z)] = \text{rank}[z^{na} A \; (z^{-1})z^{nb} B(z^{-1})] = \text{rank}[A^*(z) \; B^*(z)] = ny,$$

which together with rank $[A_{na} \; B_{nb}] = ny$ shows that $A^*(z)$ and $B^*(z)$ are left coprime. The implication i) $\Rightarrow$ ii) is thus proved. The implication ii) $\Rightarrow$ i) follows similarly since $A(z) = [A^*(z)]^*$ etc. ■

REFERENCES

1. *E. J. Hannan*, „The identification of vector mixed autoregressive moving average systems", Biometrika, vol. 56, pp 222—225, 1969.
2. *E. J. Hannan*, „The identification problem for multiple equation systems with moving average errors", Econometrica, vol. 39, pp 751—766, 1971.
3. *E. J. Hannan*, „The identification and parametrization of ARMAX and state space forms", Econometrica, vol. 44, pp 713—723, 1976.
4. *E. J. Hannan*, „A note on autoregressive-moving average identification", Biometrika, vol. 66, pp 672—674, 1979.
5. *T. Kailath*, „Linear Systems", Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1980.
6. *R. L. Kashyap, A. R. Rao*, „Dynamic Stochastic Models from Empirical Data". New York : Academic Press, 1976.

Asupra fracţiilor matriceale „pline"

Sînt discutate fracţii matriceale (FM) cu *toate* elementele coeficienţilor matriceali ai polinoamelor numitor şi numărător considerate coordonate independente ale spaţiului parametrilor. Astfel de FM vor fi numite în acest articol, FM „pline" (FMP). Rezultatul principal este o caracterizare nouă şi netă a clasei de matrice raţionale strict proprii care pot fi reprezentate în mod unic, utilizînd FMP. Se arată că această caracterizare poate fi utilă în relevarea unor proprietăţi ale FMP.

I. P. Informaţia c. 1199

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ELECTROTEHNICĂ, ENERGETICĂ, AUTOMATICĂ — CALCULATOARE, ELECTRONICĂ

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti", şi «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЁТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА

Выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti", « Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti ».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне:

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL — COMPUTERS, ELECTRONICS

The Bulletin is issued quarterly continuing the old scientific periodicals: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ÉLECTROTECHNIQUE, ÉNERGÉTIQUE, AUTOMATIQUE — ORDINATEURS, ÉLECTRONIQUE

parait tous les trois mois, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est:

Adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ROMÂNIA
Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)

1983 OKT 14

Lei 35

1130/2

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

SERIA: ELECTROTEHNICĂ,
ENERGETICĂ, AUTOMATICĂ-CALCULATOARE, ELECTRONICĂ

TOMUL XLIV NUMĂRUL 4 ANUL 1982
OCTOMBRIE—DECEMBRIE

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*

MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. docent ing. *Florea Oprea*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Prof. dr. ing. *Marin Rădoi*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent ing. *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu*.

Editor: Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București. Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța postală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper trough ILEXIM import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest ROMANIA

Sumar

MATEMATICĂ

M. Roşculeţ

Operator integral asociat la o ecuaţie cu derivate parţiale, liniară, de ordin oarecare, cu coeficienţi constanţi, într-un număr oarecare de variabile 3

D. D. Bainov, S. S. Miluşeva

Aplicarea metodei de mediere unei probleme la limită pentru sisteme integro-diferenţiale Fredholm neexplicite relativ la derivată (l. rusă) 15

D. Suciu

Asupra unei teoreme de izomorfism în algebre universale 27

FIZICĂ

I. M. Popescu, P. Sterian, N. Puşcaş

Calculul susceptibilităţilor neliniare de ordinele 5, 7 şi 9 în aproximaţia neglijării structurii fine 30

D. Anghelescu, Amelitta Vogel, Maria Haiduc, Rozalia Niţu

Observaţii asupra multiplicităţii şi distribuţiei unghiulare într-o interacţiune cu primar de mare energie în emulsia nucleară expusă în satelitul artificial „Intercosmos 6" 35

ELECTROTEHNICĂ

A. Moraru, Cristina Buda, V. Dimancea, M. Cremenescu

Cîmpul electric în vecinătatea conductoarelor multiple 39

P. Cristea, Rodica Tuduce

Generarea asistată de calculator a problemelor de analiză a circuitelor electrice în regim permanent (l. engleză) 49

Cristiana Popeea

Regimul tranzitoriu iniţial al cîmpului electromagnetic cvasistaţionar produs de un sistem de conductoare paralele 61

ELECTRONICĂ

D. Dascălu, Gh. Brezeanu, M. Suciu, P. Al. Dan

Efectul tratamentului de sinterizare asupra caracteristicilor de străpungere ale diodelor Schottky planare Al/n—Si. (l. engleză) 67

D. A. Stoichescu

Circuite de codare şi decodare cu structură variabilă pentru transmisii de date cu detecţia şi corecţia erorilor 76

C. Băleanu, D. Tomescu

Un punct de vedere asupra distribuţiei funcţionale în sistemele de calcul 85

AUTOMATICĂ

P. Stoica

Identificarea sistemelor din măsurători perturbate 92

Summary

MATHEMATICS

M. Roşculeţ

Integral Operator Associated to an Equation with Partial Derivatives 3

D. D. Bainov, S. S. Miluşeva

On the Average of the Boundary Problem for Fredholm Integral-Differential Systems 15

D. Suciu

On an Isomorphism Theorem in Universal Algebras 27

PHYSICS

I. M. Popescu, P. Sterian, N. Puşcaş

Nonlinear Susceptibilities of the 5, 7, and 9 Order Calculus without Fine Structure Consideration 30

D. Anghelescu, Amelitta Vogel, Maria Haiduc, Rozalia Niţu

Multiplicity and Angular Distribution at an Interaction of High Energy in Nuclear Emulsion Exposed in Artificial Satellite „Intercosmos 6 35

ELECTROTECHNICS

A. Moraru, Cristina Buda, V. Dimancea, M. Cremenescu

The Electric Field between Multiple Conductors 39

P. Cristea, Rodica Tuduce

Computer Aided Generation of Steady State Circuit Analysis Problems 49

Christiana Popeea

Initial Transients of the Quasistationary Electromagnetic Field Generated by a System of Parallel Conductors 61

ELECTRONICS

D. Dascălu, Gh. Brezeanu, M. Suciu, P. Al. Dan

Effect of Sintering Treatment upon the Breakdown Characteristics of Planar Al/n—Si Schottky Diodes 67

D. A. Stoichescu

Variable Coders and Decoders for Data Transmission with Error Detection and Correction 76

C. Băleanu, D. Tomescu

A Point of View on Functional Distribution of Computing Systems 85

AUTOMATIC CONTROL

P. Stoica

System Identification from Noise-Obscured Measurements 92

C.Z.: 517.944/.947
517.91/.93

OPERATOR INTEGRAL ASOCIAT LA O ECUAȚIE CU DERIVATE PARȚIALE, LINIARĂ, DE ORDIN OARECARE, CU COEFICIENȚI CONSTANȚI, ÎNTR-UN NUMĂR OARECARE DE VARIABILE

M. ROȘCULEȚ *

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ urma unei funcții analitice în $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ și E un operator diferențial liniar, cu coeficienți constanți, de ordin oarecare, în variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se obține formula integrală (26).
Se exploatează acest rezultat pentru soluțiile analitice ale unor clase de ecuații cu derivate parțiale în teoremele 2, 3 și 4.

1. Să considerăm funcția $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ definită în D din $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \times \ldots \times \mathbf{C}_n$, cu argumentele ξ_k date de

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1 + a_{11}e^{m_{11}\theta_1} + a_{12}e^{m_{12}\theta_2} + \ldots + a_{1r}e^{m_{1r}\theta_r},\\
\xi_2 &= x_2 + a_{21}e^{m_{21}\theta_1} + a_{22}e^{m_{22}\theta_2} + \ldots + a_{2r}e^{m_{2r}\theta_r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= x_n + a_{n1}e^{m_{n1}\theta_1} + a_{n2}e^{m_{n2}\theta_2} + \ldots + a_{nr}e^{m_{nr}\theta_r},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

unde am pus

$$m_{11}\theta_1 = m_{11}^1\theta_1^1 i_1 + m_{11}^2\theta_1^2 i_2 + \ldots + m_{11}^n\theta_1^n i_n,$$

și în general

$$m_{ij}\theta_j = m_{ij}^1\theta_j^1 i_1 + m_{ij}^2\theta_j^2 i_2 + \ldots + m^n{}_{ij}\theta_i^n i_n, \tag{1'}$$

cu $\mu + i_k\eta \in \mathbf{C}_k$, $i_k^2 + 1 = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

m_{ij}^k, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n^2 \times r$

numere întregi, θ_j^k, $j = 1, 2, \ldots, r$; $k = 1, 2, \ldots, n$ parametri reali, $0 \leqslant \theta_j^k \leqslant 2\pi$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$.

Manuscris primit la data de 16 ianuarie 1982
* Prof. dr. ing., Catedra Matematici III

În ipoteza că f este analitică în D în raport cu toate argumentele putem scrie

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[(a_{11} e^{m_{11}\theta_1} + a_{12} e^{m_{12}\theta_2} + \ldots + a_{1r} e^{m_{1r}\theta_r}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \tag{2}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\left. + (a_{n1} e^{m_{n1}\theta_1} + a_{n2} e^{m_{n2}\theta_2} + \ldots + a_{nr} e^{m_{nr}\theta_r}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{(s)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dezvoltarea (2) se mai scrie

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{\lambda} \frac{a_{11}^{\lambda_{11}} a_{12}^{\lambda_{12}} \ldots a_{1r}^{\lambda_{1r}} a_{21}^{\lambda_{21}} a_{22}^{\lambda_{22}} \ldots a_{2r}^{\lambda_{2r}} \ldots a_{n1}^{\lambda_{n1}} a_{n2}^{\lambda_{n2}} \ldots a_{nr}^{\lambda_{nr}}}{(\lambda_{11})!\,(\lambda_{12})! \ldots (\lambda_{1r})! \ldots (\lambda_{n1})!\,(\lambda_{n2})! \ldots (\lambda_{nr})!} \times \tag{2'}$$

$$\times A_\lambda \frac{\partial^s f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}},$$

unde am pus

$$A_\lambda = \exp(m_{11}\theta_1\lambda_{11} + m_{21}\theta_1\lambda_{21} + \ldots + m_{n1}\lambda_{n1}\theta_1) \times$$

$$\times \exp(m_{12}\lambda_{12}\theta_2 + m_{22}\theta_2\lambda_{22} + \ldots + m_{n2}\lambda_{n2}\theta_2) \times \tag{2''}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\times \exp(m_{1r}\theta_r\lambda_{1r} + m_{2r}\theta_r\lambda_{2r} + \ldots + m_{nr}\lambda_{nr}\theta_r)$$

cu λ_{ij} numere întregi, pozitive sau nule, satisfăcînd relaţiile

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{r1} = \lambda_1,$$

$$\lambda_{21} + \lambda_{22} + \ldots + \lambda_{2r} = \lambda_2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{2'''}$$

$$\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nr} = \lambda_n,$$

$$\lambda_{ki} \leqslant \lambda_k, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = s \geqslant 1.$$

2. Urmărim să obţinem o formulă integrală pentru soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$c_1 \frac{\partial^{\alpha_1} u}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + c_2 \frac{\partial^{\alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_{21}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{2n}}} + \ldots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r} u}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} = 0 \tag{3}$$

unde c_k sînt constante reale. În acest scop folosim metodele din lucrările [2], [3] şi [4].

Să cerem numerelor m_{ij}^k să satisfacă condițiile care sînt cerute ca argumentele exponențialelor să fie nule oricare ar fi θ_i^j, anume

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11}(m_{11}^1\theta_1^1 i_1 + m_{11}^2\theta_1^2 i_2 + m_{11}^3\theta_1^3 i_3 + \ldots + m_{11}^n\theta_1^n i_n) + \\
&+ \lambda_{21}(m_{21}^1\theta_1^1 i_1 + m_{21}^2\theta_1^2 i_2 + m_{21}^3\theta_1^3 i_3 + \ldots + m_{21}^n\theta_1^n i_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda_{n1}(m_{n1}^1\theta_1^1 i_1 + m_{n1}^2\theta_1^2 i_2 + m_{n1}^3\theta_1^3 i_3 + \ldots + m_{n1}^n\theta_1^n i_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda_{1r}(m_{1r}^1\theta_r^1 i_1 + m_{1r}^2\theta_r^2 i_2 + m_{1r}^3\theta_r^3 i_3 + \ldots + m_{1r}^n\theta_r^n i_n) + \\
&+ \lambda_{2r}(m_{2r}^1\theta_r^1 i_1 + m_{2r}^2\theta_r^2 i_2 + m_{2r}^3\theta_r^3 i_3 + \ldots + m_{2r}^n\theta_r^n i_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda_{nr}(m_{nr}^1\theta_r^1 i_1 + m_{nr}^2\theta_r^2 i_2 + m_{nr}^3\theta_r^3 i_3 + \ldots + m_{nr}^n\theta_r^n i_n) = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Condițiile impuse cer ca coeficienții elementelor hipercomplexe $i_1, i_2, \ldots, i_n$ să fie nuli, apoi coeficienții lui θ_i^j să fie de asemenea nuli. Sîntem astfel conduși la următoarele condiții pentru numerele întregi m_{ij}^k

$$\begin{aligned}
&\lambda_{11}m_{11}^1 + \lambda_{21}m_{21}^1 + \lambda_{31}m_{31}^1 + \ldots + \lambda_{n1}m_{n1}^1 = 0, \\
&\lambda_{11}m_{11}^2 + \lambda_{21}m_{21}^2 + \lambda_{31}m_{31}^2 + \ldots + \lambda_{n1}m_{n1}^2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{11}m_{11}^n + \lambda_{21}m_{21}^n + \lambda_{31}m_{31}^n + \ldots + \lambda_{n1}m_{n1}^n = 0,
\end{aligned} \tag{4'}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_{12}m_{12}^1 + \lambda_{22}m_{22}^1 + \lambda_{32}m_{32}^1 + \ldots + \lambda_{n2}m_{n2}^1 = 0, \\
&\lambda_{12}m_{12}^2 + \lambda_{22}m_{22}^2 + \lambda_{32}m_{32}^2 + \ldots + \lambda_{n2}m_{n2}^2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{12}m_{12}^n + \lambda_{22}m_{22}^2 + \lambda_{32}m_{32}^n + \ldots + \lambda_{n2}m_{n2}^n = 0,
\end{aligned} \tag{4^2}$$

$$\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{1r}m_{1r}^1 + \lambda_{2r}m_{2r}^1 + \lambda_{3r}m_{3r}^1 + \ldots + \lambda_{nr}m_{nr}^1 = 0, \\
&\lambda_{1r}m_{1r}^2 + \lambda_{2r}m_{2r}^2 + \lambda_{3r}m_{3r}^2 + \ldots + \lambda_{nr}m_{nr}^2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{1r}m_{1r}^n + \lambda_{2r}m_{2r}^n + \lambda_{3r}m_{3r}^n + \ldots + \lambda_{nr}m_{nr}^n = 0;
\end{aligned} \tag{4^r}$$

Celor r sisteme scrise mai sus (4′), (4″), ..., (4^r) în variabilele $\lambda_{i1}, \ldots$ $\ldots, \lambda_{ir}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectiv le cerem să admită şi alte soluţii în afară de cea nulă $\lambda_{ij} = 0$ fapt care conduce la condiţiile

$$\det |m_{i1}^k| = 0, \ \det |m_{i2}^k| = 0, \ldots, \ \det |m_{ir}^k| = 0 \tag{5}$$

$i, k = 1, 2, \ldots, n$. Să cerem numerelor λ_{ij}^1 să îndeplinească şi

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{r1} = \lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{1r} = \lambda_1, \\ &\alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{r2} = \lambda_{21} + \lambda_{22} + \ldots + \lambda_{2r} = \lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \ldots + \alpha_{rn} = \lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nr} = \lambda_n, \end{aligned} \tag{5′}$$

deci putem lua $\alpha_{ij} = \lambda_{ji}$.

Din sistemul (4′,) (4″), ..., (4^r) obţinem, $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_{k1} = (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} m_{11}^1 & m_{21}^1 & \ldots & m_{k-1,1}^1 & m_{k+1,1}^1 & \ldots & m_{n-1,1}^1, & m_{n1}^1 \\ m_{11}^2 & m_{21}^2 & \ldots & m_{k-1,1}^2 & m_{k+1,1}^2 & \ldots & m_{n-1,1}^1 & m_{n1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{11}^{n-1} & m_{21}^{n-1} & \ldots & m_{k-1,1}^{n-1} & m_{k+1,1}^{n-1} & \ldots & m_{n-1,1}^{n-1} & m_{n,1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

(5″)

$$\lambda_{kr} = (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} m_{1r}^1 & m_{2r}^1 & \ldots & m_{k-1,r}^1 & m_{k+1,r}^1 & \ldots & m_{n,r}^1 \\ m_{1r}^2 & m_{2r}^2 & \ldots & m_{k-1,r}^2 & m_{k+1,r}^2 & \ldots & m_{n,r}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{1,r}^{n-1} & m_{2r}^{n-1} & \ldots & m_{k-1,r}^{n-1} & m_{k+1,r}^{n-1} & \ldots & m_{nr}^{n-1} \end{vmatrix}$$

încît, dacă sistemul (4^h) admite soluţia nenulă

$$\lambda_{1h}, \lambda_{2h}, \ldots, \lambda_{nh},$$

atunci o admite şi pe

$$\mu_h\lambda_{1h}, \mu_h\lambda_{2h}, \ldots, \mu_h\lambda_{nh}, \ \mu_h \in \mathrm{R}.$$

Obţinem astfel relaţiile

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{r1} = \mu_1\lambda_{11} + \mu_2\lambda_{12} + \ldots + \mu_r\lambda_{1r}, \\ &\alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{r2} = \mu_1\lambda_{21} + \mu_2\lambda_{22} + \ldots + \mu_r\lambda_{r2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \ldots + \alpha_{rn} = \mu_1\lambda_{n1} + \mu_2\lambda_{n2} + \ldots + \mu_r\lambda_{nr}, \end{aligned} \tag{6}$$

și

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \ldots + \lambda_{ni}),$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = s = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \ldots + \lambda_{ni})$$

3. Să ne ocupăm acum de integrala multiplă de ordin $n \cdot r$, anume

$$I = \frac{1}{(2\pi)^{nr}} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} \int_{0}^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, d\theta_i^j, \tag{7}$$

în care să introducem dezvoltarea (2′) a lui f în condițiile restrictive cerute numerelor întregi m_{ij}^k (4′), ..., (4^r), (5), (5′), (5″) și (6). În ipoteza că putem integra termen cu termen obținem relația

$$I = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$(8) + \sum_{\lambda} \frac{a_{11}^{\mu_1\lambda_{11}} a_{12}^{\mu_2\lambda_{12}} \ldots a_{1r}^{\mu_r\lambda_{1r}},\ a_{21}^{\mu_1\lambda_{21}} a_{22}^{\mu_2\lambda_{22}} \ldots a_{2r}^{\mu_r\lambda_{2r}} \ldots a_{n1}^{\mu_1\lambda_{n1}} \ldots a_{nr}^{\mu_r\lambda_{nr}}}{(\mu_1\lambda_{11})! \ldots (\mu_r\lambda_{1r})!\ (\mu_1\lambda_{21})! \ldots (\lambda_r\mu_{2r})! \ldots (\mu_1\lambda_{n1})! \ldots (\mu_r\lambda_{nr})!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{\mu_1(\lambda_{11}+\lambda_{21}+\cdots+\lambda_{n1})+\mu_2(\lambda_{12}+\lambda_{22}+\cdots+\lambda_{n2})+\cdots+\mu_r(\lambda_{1r}+\cdots+\lambda_{nr})} f}{\partial x^{\mu_1\lambda_{11}+\mu_2\lambda_{12}+\cdots+\mu_r\lambda_{1r}}\ \partial x_2^{\mu_1\lambda_{21}+\mu_2\lambda_{22}+\cdots+\mu_r\lambda_{2r}} \ldots \partial x_n^{\mu_1\lambda_{n1}+\cdots+\mu_r\lambda_{nr}}}$$

În relația astfel obținută să punem

$$(9)\quad \begin{aligned} a_{11} &= \alpha_{11}\, c_1^{\frac{\alpha_{11}}{1}} \nu_{10}\nu_{11} \ldots \nu_{1,\alpha_{11}-2}, \\ a_{12} &= \alpha_{21} c_2^{\frac{\alpha_{21}}{1}} \nu_{20}\nu_{21} \ldots \nu_{2,\alpha_{21}-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1r} &= \alpha_{r1} c^{\frac{\alpha_{r1}}{1}} \nu_{r0}\nu_{r1} \ldots \nu_{r\alpha_{r1}-2}, \end{aligned}$$

încît dacă notăm cu A_λ coeficientul operatorului diferențial din partea a doua din relația (8), cu înlocuirea (9) devine

$$A_\lambda = \mathscr{A}_\lambda \cdot B_\lambda \cdot c_1^{\mu_1} \cdot c_2^{\mu_2} \ldots c_r^{\mu_r},$$

cu

$$A_\lambda = [\alpha_{11}\nu_{10}\nu_{11}\ldots\nu_1,\alpha_{11}-2]^{\mu_1\lambda_{11}}\cdot[\alpha_{21}\nu_{20}\nu_{21}\ldots\nu_2,\alpha_{21}-2]^{\mu_2\lambda_{12}}\cdot\ldots \tag{10}$$
$$\ldots\cdot[\alpha_{r1}\nu_{r0}\nu_{r1}\ldots\nu_r,\alpha_{r1}-2]^{\mu_r\lambda_{1r}},$$

şi

$$B_\lambda = (a_{21})^{\mu_1\lambda_{21}}\cdot(a_{22})^{\mu_2\lambda_{22}}\cdot(a_2)^{\mu_r\lambda_{2r}},\times$$
$$\times(a_{31})^{\mu_1\lambda_{31}}\cdot(a_{32})^{\mu_2\lambda_{32}}\ldots(a_{3r})^{\mu_r\lambda_{3r}},\times \tag{10'}$$
$$\times(a_{n1})^{\mu_1\lambda_{n1}}\cdot(a_{n2})^{\mu_2\lambda_{n2}}\ldots(a_{nr})^{\mu_r\lambda_{nr}}\times B^*$$

unde B^* este dat de

$$B^* = \prod_{k=1}^{r}\frac{1}{(\mu_k\lambda_{1k})!}\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{(\mu_k\lambda_{2k})!}\cdots\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{(\mu_k\lambda_{nk})!}. \tag{10''}$$

4. Să introducem operatorii integrali

$$Y_1 = \prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{r}\int_0^\infty e^{-a_{ij}}\,da_{ij},\ a_{ij}>0 \tag{11}$$

şi

$$Y_2 = \prod_{j=1}^{r}\prod_{k=0}^{\alpha_{j1}-2}\int_0^\infty \nu_{jk}^{k}e^{-\nu_{jk}^{\alpha_{j1}}}\,d\nu_{jk}^{j_1} \tag{12}$$

care au proprietăţile

a) $$Y_1(1)=1,\ Y_2(1)=\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{\alpha_{k1}-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_{k1}}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\alpha_{k1}}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)$$

deoarece

$$\int_0^\infty e^{-a_{ij}}\,da_{ij}=1,\ a_{ij}>0$$

şi

$$\int_0^\infty e^{-\nu^p}\nu^q\,d\nu=\frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right),\ \nu>0,\ p>0$$

b)

$$\int_0^\infty a_{ij}^k\,e^{-a_{ij}}\,da_{ij}=k!$$

Să aplicăm operatorului Y_1 integralei I dată de (8). Ţinînd seamă de parametrii asupra cărora operează este suficient să-l aplicăm numai lui B_λ. Obţinem

$$Y_1(B_\lambda) = \frac{1}{B^*} \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{r} (\mu_j \lambda_{ij}) = \frac{1}{(\mu_{11}\lambda_{11})!\ (\mu_2\lambda_{12})! \dots (\mu_r\lambda_{1r})!} =$$

(13)

$$= \frac{1}{(\mu_1\lambda_{11})!\ (\mu_2\alpha_{21})! \dots (\mu_r\alpha_{r1})!}$$

deoarece $\lambda_{1k} = \alpha_{k1}$.

Să considerăm acum operatorul Y_2 pe care îl scriem astfel

14) $$Y_2 = Y_1^* Y_2^* \dots Y_r^*$$

cu

(14′) $$Y_k^* = \int_0^\infty \nu_{k0}^0 e^{-\nu_{k0}^{\alpha_{k1}}} d\nu_{k0} \int_0^\infty \nu_{k1}^1 e^{-\nu_{k1}^{\alpha_{k1}}} d\nu_{k1} \dots \int_0^\infty \nu_{k_1\alpha_{k1}-2}^{\alpha_{k1}-2} \cdot e^{-\nu_{k_1\alpha_{k1}-2}^{\alpha_{k1}}} d\nu_{k_1\alpha_{k1}-2}$$

deoarece avem

(14″) $$Y_k^*(1) = \frac{1}{\alpha_{k_1}^{\alpha_{k1}-1}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha_{k1}}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha_{k1}}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)$$

şi cum urmărim să obţinem o formulă integrală vom aplica integralei I operatorul normat

(15) $$\bar{Y}_2 = \frac{Y_2}{Y_2(1)} = \prod_{k=1}^{r} \frac{Y_k^*}{Y_k^*(1)} = \prod_{k=1}^{r} \bar{Y}_k^*.$$

Să aplicăm operatorul Y_k^* integralei I.

Dacă avem în vedere parametrii asupra cărora lucrează Y_k^* urmează că putem să-l aplicăm numai asupra lui A_λ, mai precis asupra termenului

$$[\alpha_{k1} \cdot \nu_{k0}\nu_{k1} \dots \nu_{k_1\alpha_1-2}]^{\mu_k\alpha_{k1}}$$

Avem de calculat deci expresia

$$Y_k^*[\alpha_{k1}\cdot \nu_{k0}\cdot \nu_{k1}\cdot \ldots \cdot \nu_{k,\,\alpha_{k1}-2}]^{\alpha_{k1}\mu_k} =$$

$$(16)\quad = (\alpha_{k1})^{\mu_k\alpha_{k1}}\cdot \frac{1}{\alpha_{k1}}\,\Gamma\left(\frac{\mu_k\alpha_{k1}+1}{\alpha_{k1}}\right)\ldots \frac{1}{\alpha_{k1}}\,\Gamma\left(\frac{\mu_k\alpha_{k1}\cdot+\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)=$$

$$= (\alpha_{k1})^{\mu_k\alpha_{k1}-\alpha_{k1}+1}\cdot \Gamma\left(\frac{\mu_k\alpha_{k1}+1}{\alpha_{k1}}\right)\ldots \Gamma\left(\frac{\mu_k\alpha_{k1}+\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)$$

însă avem efectiv

$$\Gamma\left(\frac{\alpha_{k1}\mu_k+1}{\alpha_{k1}}\right)=\frac{(\mu_k-1)\alpha_{k1}+1}{\alpha_{k1}}\cdot\frac{(\mu_k-2)\,\alpha_1+1}{\alpha_{k1}}\ldots\frac{1}{\alpha_{k1}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_{k1}}\right)$$

$$(17)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{\mu_k\alpha_{k1}+\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)=\frac{(\mu_k-1)\,\alpha_{k1}+\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\cdot\frac{\mu_k-2)\,\alpha_{k1}+\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\ldots$$

$$\ldots\frac{\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)$$

încît obţinem acest rezultat

$$Y_k^*[\alpha_{k1}\nu_{k0}\nu_{k1}\ldots\nu_{k,\alpha_{k1}-2}]^{\mu_k\alpha_{k1}}=$$

$$(16')\quad = (\alpha_{k1})^{\mu_k\alpha_{k1}-\alpha_{k1}+1}\cdot\frac{1}{(\alpha_{k1})^{\mu_k\alpha_{k1}}}\cdot\frac{(\alpha_{k1}\mu_k)!}{(\mu_k)!}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha_{k1}}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\alpha_{k1}-1}{\alpha_{k1}}\right)$$

deci dacă considerăm operatorul normat $\overline{Y}_k^*$ avem

$$(16'')\quad \overline{Y}_k^*(\alpha_{k1}\nu_{k0}\nu_{k1}\ldots\nu_{k,\alpha_{k1}-2})^{\mu_k\alpha_{k1}}=\frac{(\alpha_{k1}\mu_k)!}{\mu_k!}$$

Revenind la operatorul $\overline{Y}_2$ pe care îl aplicăm lui A obţinem acest rezultat foarte simplu

$$(18)\quad \overline{Y}_2(\mathcal{A}_\lambda)=\frac{(\alpha_{11}\mu_1)!\,(\alpha_{21}\mu_2)!\ldots(\alpha_{r1}\mu_r)!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_k!}$$

iar dacă notăm $\overline{Y}=\overline{Y}_1\cdot\overline{Y}_2$ obţinem relaţia fundamentală

$$(19)\quad \overline{Y}(A_\lambda)=\frac{c_2^{\mu_1}\cdot c_2^{\mu_2}\ldots c_r^{\mu_r}}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_r!}.$$

Prin urmare dacă $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ sînt numere întregi pozitive sau nule și

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = s \geqslant 1,$$

Aplicînd operatorul $\bar{Y}$ integralei I, în ipoteza că putem integra termen cu termen, respectînd condițiile impuse numerelor m_{ij}^k în aliniatele precedente obținem relația

$$\bar{Y}(\mathrm{I}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \ldots c_r^{\mu_r}}{\mu_1!\,\mu_2! \ldots \mu_r!} \times \tag{20}$$

$$\times \frac{\partial^{\mu_1(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{1n})+\mu_2(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{2n})+\ldots+\mu_r(\alpha_{r1}+\alpha_{r2}+\ldots+\alpha_{rn})} f}{\partial x_1^{\mu_1\alpha_{11}+\mu_2\alpha_{21}+\ldots+\mu_r\alpha_{r1}} \partial x_\alpha^{\mu_1\alpha_{12}+\mu_2\alpha_{22}+\ldots+\mu_r\alpha_{r2}} \ldots \partial x_n^{\mu_1\alpha_{1n}+\ldots+\mu_r\alpha_{rn}}}$$

sau, altfel scrisă

$$\bar{Y}(\mathrm{I}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \tag{20'}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \partial x_2^{\alpha_{12}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + \ldots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \partial x_2^{\alpha_{r2}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} \right]^{(s)} f$$

Am demonstrat

Teorema 1. Fie f o funcție analitică în $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 \times \ldots \times \mathbb{C}_n$. Avem următoarea relație integrală

$$Y_1 \bar{Y}_2 \frac{1}{(2\pi)^{nr}} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}\theta = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \tag{21}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \mathrm{d} x_2^{\alpha_{12}} \ldots \partial x_n^{\alpha_m}} + \ldots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \partial x_2^{\alpha_{r2}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} \right)^{(s)} f(x_1, \ldots, x_n)$$

unde am notat

$$\xi_k = x_k + a_{1k} e^{m_{k_1}\theta_1} + a_{k2} e^{m_{k_2}\theta_2} + \ldots + a_{kn} e^{m_{kn}\theta_n},$$

$$m_{ij}\theta_j = m_{ij}^1 \theta_j^1 i_1 + m_{ij}^2 \theta_j^2 i_2 + \ldots + m_{ij}^n \theta_j^n i_n,$$

$$\mu + i_k \eta = \mathbb{C}_k, \; i_k^2 + 1 = 0, \; m_{ij}^k, \; n^2 \times r$$

numere întregi,

θ_j^k, $j = 1, 2, \ldots, r$; $k = 1, 2, \ldots, n$, parametri reali, $0 \leqslant \theta_j^k \leqslant 2\pi$; numerele m_{ij}^k satisfăcînd condițiile (4′)—(4″) și (5)—(5″), cu a_{ir} date de (9), operatorul Y_1 dat de (11) iar $\bar{Y}_2 = \dfrac{Y_2}{Y_2(1)}$ cu Y_2 dat de (12).

Din teorema 1 și în cadrul condițiilor cuprinse în enunț rezultă

Teorema 2. Soluţiile analitice în $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 \times \ldots \times \mathbb{C}_r$, ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$c_1 \frac{\partial^{\alpha_1} u}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \partial x_2^{\alpha_{12}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + c_2 \frac{\partial^{\alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_{21}} \partial x_2^{\alpha_{22}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{2n}}} + \ldots + \tag{22}$$

$$+ c_r \frac{\partial^{\alpha_r} u}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} = 0,$$

c_k numere în R, verifică relaţia integrală

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tag{22'}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{nr}} Y_1 \bar{Y}_2 \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}\theta_i^j$$

5. Să modificăm pe a_1 din teorema 1, anume să-i înlocuim cu

$$a_{11} = \alpha_{11}(c_1 t)^{\frac{1}{\alpha_{11}}} \nu_{10} \nu_{11} \ldots \nu_{1,\alpha_{11}-2},$$

$$a_{12} = \alpha_{21}(c_2 t)^{\frac{1}{\alpha_{21}}} \nu_{20} \nu_{21} \ldots \nu_{2,\alpha_{21}-2}, \tag{23}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1r} = \alpha_{r1}(c_r t)^{\frac{1}{\alpha_{r1}}} \nu_{r1} \nu_{r2} \ldots \nu_{r,\alpha_{r1}-2},$$

Cu această unică modificare relaţia integrală (20) se scrie

$$\frac{1}{(2\pi)^{nr}} Y_1 \bar{Y}_2 \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}\theta_i^j = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \tag{24}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \left(c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + \ldots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} \right)^{(s)} f(x_1, \ldots, x_n)$$

Teorema 3. Soluţiile analitice în $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 \times \ldots \times \mathbb{C}_n$, ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\left(c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + c_2 \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_{21}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{2n}}} + \ldots + \right. \tag{25}$$

$$\left. + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} \right)^{p+1} u = 0$$

unde c_k sînt numere reale, în condițiile teoremei 1, dar cu a_{1j} dați de (23) satisfac relația integrală

$$\frac{1}{(2\pi)^{nr}} Y_1 \bar{Y}_2 \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, d\theta_i^j = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

(26)

$$+ \sum_{s=1}^{p} \frac{t^s}{s!} \left(c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + \ldots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{rn}}} \right)^{(s)} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Putem înlătura operatorii diferențiali din partea a doua printr-un procedeu datorit lui Miron Nicolescu [1] devenit clasic. Să introducem mediile succesive

$$\mu_k(x, t) = \frac{h+1}{t^{h+1}} \int_0^t t'^h \mu_{k-1}(x, t')\, dt', \quad k = 1, 2, \ldots, p \tag{27}$$

unde

$$\mu_0(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{nr}} Y_1 \bar{Y}_2 \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, d\theta_i^j \tag{27'}$$

obținem pentru mediile iterate $\mu_k(x, t)$ desfășurările

$$\mu_k(x, t) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

(28)

$$+ \sum_{s=1}^{p} \left(\frac{h+1}{s+h+1} \right)^k \frac{t}{s!} \left(c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + \ldots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{1r}} \ldots \partial x_n^{\alpha_{nr}}} \right)^{(s)} f(x_1, \ldots, x_n)$$

Din relațiile (26) și (28), în condițiile teoremei 3 obținem

Teorema 4. Soluțiile analitice în $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 \times \ldots \times \mathbb{C}_r$ ale ecuației cu derivate parțiale (25) satisfac relația integrală

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \mu_0(x, t) & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(x, t) & \frac{h+1}{h+2} & \left(\frac{h+1}{h+3}\right) & \ldots & \left(\frac{h+1}{h+p+1}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_p(x, t) & \left(\frac{h+1}{h+2}\right)^p & \left(\frac{h+1}{h+3}\right)^p & \ldots & \left(\frac{h+1}{h+p+1}\right)^p \end{vmatrix}$$

unde A este determinantul

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{h+1}{h+2} & \frac{h+1}{h+3} & \dots & \frac{h+1}{h+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \left(\frac{h+1}{h+2}\right)^p & \left(\frac{h+1}{h+3}\right)^p & \dots & \left(\frac{h+1}{h+p+1}\right)^p \end{vmatrix}$$

Pornind de la relaţia integrală (24) urmînd procedee cunoscute se pot obţine formule integrale pentru soluţiile analitice în $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 \times \dots \times \mathbb{C}_r$ ale ecuaţiilor

$$\left(c_1 \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_{11}} \dots \partial x_n^{\alpha_{1n}}} + \dots + c_r \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_1^{\alpha_{r1}} \dots \partial x_n^{\alpha_{rn}}}\right)^{(p)} u = \lambda u$$

cu $p = 1$ sau $p > 1$.

BIBLIOGRAFIE

1. *Nicolescu M.* Stud. şi Cercet. Mat. tom. V, nr. 3—4, 1954, pag. 243—332.
2. *Craiu Mariana, Roşculeţ M.* Stud. şi Cercet. Mat. vol. 20, nr. 9, 1968, pag. 1293—1312.
3. *Roşculeţ M.*, Stud. şi Cercet. Mat. vol. XIV, nr. 1, 1963, pag. 25—48.
4. *Roşculeţ M.*, Stud. şi Cercet. Mat. tom. 15, nr. 7, 1964, pag. 885—907.

Opérateur intégral associé à une equation aux dérivées partielles, linéaire d'ordre quelconque

Soient $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la trace d'une fonction analytique dans $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$ et E un opérateur linéaire, aux coefficients constants, d'ordre quelconque, dans les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. On obtient la formule intégrale (26). Ce résultat est utilisé pour les solutions analytiques des certaines classes d'équations aux derivées partielles dans les théorèmes 2, 3 et 4.

C.Z.: 621.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Д. Д. БАЙНОВ, С. С. МИЛУШЕВА*

Рассматриваются два варианта метода усреднения для решения краевой задачи

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x(t), y(t), x(t), \dot{y}(t), \int_0^1 \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds),$$

$$\dot{y}(t) = Y(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^1 \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds). \tag{1}$$

$$x(0) = x^0, \qquad R[\lambda, y(0), y(T)] = 0,$$

где $x, X \in R_n$, $y, Y, R \in R_m$, $\lambda \in \Lambda \subset R_\varkappa$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Доказаны теоремы о близости компонент $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1) и решения задачи Коши для соответствующих усредненных уравнений.

В работах [1], [2] был обоснован метод усреднения для решения двухточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе этот метод применяется для решения нелинейной двухточечной краевой задачи для систем интегро — дифференциальных уравнений типа Фредгольма неразрешенных относительно производной.

Надо отметить, что метод усреднения для задачи Коши для систем интегро —дифференциальных уравнений был обоснован в работах [3] —[6].

Пусть для системы

$$\dot{x}(t) = \varepsilon\, X(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^1 \varphi(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds)$$

$$\dot{y}(t) = Y(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \int_0^1 \varphi_1(t, s, x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s))\, ds), \tag{1}$$

Приятно в редакцию 14 декабря 1979

* Пловдивский университет — В. И. Ленина институт — София

где

$$x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}),\ y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}),\ X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}),$$

$$Y = (Y^{(1)}, \ldots Y^{(m)}),\ \varphi = (\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(q)}),\ \varphi_1 = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(\tau)}),$$

а $\varepsilon > 0$ — малый параметр, задано краевое условие

$$x(0) = x^{\circ}, \qquad R\,[\lambda,\ y(0),\ y(T)] = 0, \tag{2}$$

$$\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}),\ R = (R^{(1)}, \ldots R^{(m)}),\ \lambda \in \Lambda \subset R_m,$$

$$T = L\varepsilon^{-1},\ L = \text{const} > 0.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим вырожденную по отношение к ней систему

$$x = \text{const}, \qquad \dot{x} = \text{const}, \tag{3}$$

$$\dot{y}(t) = Y(t,\ x,\ y(t),\ \dot{x},\ \dot{y}(t), \int_0^1 \varphi_1(t,\ s,\ x,\ y(s),\ \dot{x},\ \dot{y}(s))\ \mathrm{d}s)$$

с краевым условием

$$R[\lambda,\ y(0),\ y(T)] = 0. \tag{4}$$

Пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda,\ T)$ краевой адачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существует независящее от параметра λ среднее значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,\ x,\ \psi(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda,\ T),\ \dot{x}, \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda,\ T), \tag{5}$$

$$\int_0^1 \varphi\left(t,\ s,\ x,\ \psi(s,\ x,\ \dot{x},\ \lambda,\ T)\ \dot{x}, \frac{\partial}{\partial s}\ \psi(s,\ x,\ \dot{x},\ \lambda,\ T)\right) \mathrm{d}s)\ \mathrm{d}t = \overline{X}\ (x,\ \dot{x}).$$

Тогда усредненым уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) будем называть уравнение

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t),\ \dot{\xi}(t)) \tag{6}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^{\circ}, \tag{7}$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A = (a_{ij})_{n,m}$, то по определению

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}},\ \|A\| = \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости компонент $x(t)$ решения $\{x(t),\ y(t)\}$ краевой задачи (1), (2) и решения задачи Коши (6), (7).

Теорема 1. Пусть:

1. **Функции** $\varphi(t,\ s,\ x,\ y,\ u,\ v)$ и $\varphi_1(t,\ s,\ x,\ y,\ u,\ v)$ определены **непрерывны и равномерно ограничены вместе со своими частными производными по** t для всех $t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ (x,\ y,\ u,\ v) \in G$, где G некоторая открытая область $2(n+m)$—мерного пространства переменных $x,\ y,\ u,\ v$.

Функция $X(t,\ x,\ y,\ u,\ v,\ z)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqslant 0$ и $(x,\ y,\ u,\ v,\ z) \in G \times G_1$, где G_1 — некоторая открытая область пространства R_q.

Функция $Y(t,\ x,\ y,\ u,\ v,\ w)$ определена, непрерывна и равномерно ограничена вместе со своими частными производными первого порядка для всех $t \geqslant 0$ и $(x,\ y,\ u,\ v,\ w) \in G \times G_2$, где G_2 — некоторая открытая область пространства R_q.

2. Существуют равномерно ограниченные в соответствующих проекциях области $G^* = \{t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ G \times G_1 \times G_2\}$ обратные матрицы

$$\left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1},\ \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{-1},\ \left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial v} - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial u}\left(I_1 - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial v}\right]^{-1},$$

где I_1 и I_2 — соответственно n и m — мерные единичные матрицы.

3. Через каждую точку области $G^*(t,\ x,\ y,\ u)$ ($G^*(t,\ x,y,u)$—проекция области G^* в пространстве переменных $t,\ x,\ y,\ u$) проходит единственная интегральная кривая краевой задачи (3), (4), соответствующая некоторому значению параметра λ, причем это решение определено для всех значений $t \in [0, \infty)$ и при этих значениях t целиком лежит в $G^*(x,\ y,\ u)$.

Пусть указанные решения краевой задачи (3), (4) задаются в форме

$$y = \psi(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda,\ T) \tag{8}$$

где ψ — m мерная, непрерывная по совокупности всех переменных вектор- функция.

4. Для всех $(x,\ u,\ \lambda) \in G^*(x,\ u) \times \Lambda$ существует независящий от параметра λ предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\left(t, x, \psi(t,\ x,\ u,\ \lambda,\ T), u, \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\ x,\ u,\ \lambda,\ T)\right), \tag{9}$$

$$\int_0^1 \varphi\left(t,\ s,\ x,\ \psi\ (s,\ x,\ u,\ \lambda,\ T),\ u, \frac{\partial}{\partial s}\psi(s,\ x,\ u,\ \lambda,\ T)\right) \mathrm{d}s)\ \mathrm{d}t = \bar{X}\ (x,u),$$

причем предельных переход в (9) произходит равномерно относительно совокупности $(x, u, \lambda) \in G^*(x, u) \times \Lambda$. Среднее значение $\bar{X}(x, u)$ — определена, непрерывна и равномерно ограничена функция для всех $(x,u) \in G^*(x, u)$ и удовлетворяет в $G^*(x,u)$ неравенством

$$\| \bar{X}(x, u) - \bar{X}(x', u') \| \leqslant c(\| x - x' \| + \| u - u' \|),$$

где C — положительная постоянная.

5. Краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $\{x(t), y(t)\}$ удовлетворяющее условием

$$x(0) = x^\circ, \; R[\lambda, y(0), y(T)] = 0,$$

где под λ подразумевается некоторое фиксированное значение параметра λ. Решение $\{x(t), y(t)\}$ определено на отрезке $[0, T]$ при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и не выходит из некоторой открытой подобласти $G^{*1}(x, y) \subset G^*(x, y)$, лежащей целиком внутри $G^*(x, y)$ вместе со своей границей.

6. Решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \tag{10}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x^\circ$ существует, однозначно определено при $t \geqslant 0$ для всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и кривая $\{\xi(t), \dot{\xi}(t)\}$ соответствующая этому решению на интеграле $0 \leqslant t < \infty$ не выходит из области $G^*(x, u)$.

7. Уравнение в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} Y + \frac{\partial W}{\partial v} \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial v} \right)^{-1} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial Y}{\partial w} \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \, ds \right) = X(t, x, y, u, v, z) - \bar{X}(x, u),$$

$$W|_{t=0} = 0, \; x = \text{const}, \; u = \text{const},$$

обладает некоторым решением $W = W(t, x, y, u, v)$, которое определено и равномерно ограничено вместе со своими частными производными первого порядка во всей области G^*.

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ решение краевой задачи (1), (2), а $\xi(t)$ решение задачи Коши (6), (7), то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$, можно указать такое $\varepsilon^\circ > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^\circ$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\eta(t)$ выражение

$$\eta(t) = x(t) - \varepsilon W(t,\ x(t),\ y(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t)), \tag{12}$$

где $\{(x(t),\ y(t)\}$ — решение краевой задачи (1), (2), а W — непрерывно дифференцируемое решение (11).

Оценим разность $\eta(t) - \xi(t)$, где $\xi(t)$ — решение усредненного уравнения (10) с начальным условием $\xi(0) = x^\circ$.

Имеем

$$\dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) = \dot{x}(t) - \varepsilon\left\{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial W}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}}\ddot{x}t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}}\ddot{y}(t) + \bar{X}(\xi(t),\ \dot{\xi}(t))\right\}.$$

Для определения $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$ продифференцируем систему (1):

$$\ddot{x}(t) = \varepsilon\left\{\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial X}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\ddot{x}(t) + \frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\ddot{y}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial X}{\partial z}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\ s,\ x(s),\ y(s),\ \dot{x}(s),\ \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s\right\},$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial Y}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\ddot{x}(t) + \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\ddot{y}(t) +$$

$$+ \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,\ s,\ x(s),\ y(s),\ \dot{x}(s),\ \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда

$$\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)\ddot{x}(t) - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\ddot{y}(t) = \varepsilon\left\{\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y}Y + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial X}{\partial z}\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}s\right\} + \varepsilon^2\frac{\partial X}{\partial x}X,$$

$$-\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\ddot{x}(t) + \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)\ddot{y}(t) = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}Y + \tag{14}$$

$$+ \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}X.$$

Решение системы (14) относительно $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$ представляем в виде

$$\dot{y}(t) = \varepsilon P$$
$$\ddot{y}(t) = \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}\,Y + \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s\right) + \varepsilon Q, \tag{15}$$

где

$$P = \left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\left\{I_1 + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} - \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\right]^{-1}\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\cdot\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\right\}\left[\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y}\,Y + \frac{\partial X}{\partial z}\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}\,X\right] + \left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\left[I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} - \right.$$

$$\left. - \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1 - \frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \dot{y}}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}\,Y + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}\,X\right],$$

$$Q = \left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial Y}{\partial x}\,X + \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y}\,Y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial X}{\partial z}\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}s - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\,X\right]\right\} + \frac{\mathrm{O}(\varepsilon)}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}\,Y + \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}\,X + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial \dot{x}}\left(I_1 - \varepsilon\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y}\,Y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial X}{\partial z}\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}\,X\right]\right\}.$$

Подставляя (15) в (13) получаем

$$\dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) = -\varepsilon\left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y}\,Y + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}}\left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}\,Y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s\right) - X(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) + \overline{X}(x, \dot{x})\right] +$$

$$+ \varepsilon[\overline{X}(\eta, \dot{\eta}) - \overline{X}(\xi, \dot{\xi})] + \varepsilon[\overline{X}(x, \dot{x}) - \overline{X}(\eta, \dot{\eta})] -$$

$$- \varepsilon^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} X + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} P + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} Q \right).$$

В силу условий теоремы

$$\begin{aligned} \| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| \leqslant \varepsilon c \, [\| \eta(t) - \xi(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| + \\ + \| \eta(t) - x(t) \| + \| \dot{\eta}(t) - \dot{x}(t) \|] + \varepsilon^2 \boldsymbol{M}, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial x} X + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} P + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} Q \right\| \leqslant \boldsymbol{M} = \text{const}. \tag{18}$$

Имея ввиду, что

$$\| \eta(t) - x(t) \| = \varepsilon \| W \| \leqslant \varepsilon \boldsymbol{M}_1, \tag{19}$$

$$\| \dot{\eta}(t) - \dot{x}(t) \in = \varepsilon \| \dot{W} \| \leqslant \varepsilon \boldsymbol{M}_2, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ — положительные постоянные, получаем

$$\| \dot{\eta}(t) - \dot{\xi}(t) \| \leqslant \frac{\varepsilon c}{1 - \varepsilon c} \| \eta(t) - \xi(t) \| + \frac{\varepsilon^2 (c\boldsymbol{M}_1 + c\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M})}{1 - \varepsilon c}, \tag{21}$$

$$[\eta(t) - \xi(t)]|_{=0} = \mathbf{0}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \| \eta(t) - \xi(t) \| \leqslant \frac{\varepsilon^2 (c\boldsymbol{M}_1 + c\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M})}{1 - \varepsilon c} \int_0^t \exp \{ \varepsilon c (1 - \varepsilon c)^{-1} (t - \tau) \} \, \mathrm{d}\tau = \\ = \varepsilon c^{-1} [\exp \{ \varepsilon c (1 - \varepsilon c)^{-1} t \} - 1] \ (c\boldsymbol{M}_1 + c\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}). \end{aligned} \tag{22}$$

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ имеем оценку

$$\| \eta(t) - \xi(t) \| \leqslant \varepsilon c^{-1} (c\boldsymbol{M}_1 + c\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}) [\exp \{ cL(1 - \varepsilon c)^{-1} \} - 1]. \tag{23}$$

Учитывая выражение для $\eta(t)$ находим

$$\begin{aligned} \| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \| x(t) - \eta(t) \| + \| \eta(t) - \xi(t) \| \leqslant \varepsilon \| W \| + \\ + \varepsilon c^{-1} (c\boldsymbol{M}_1 + c\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}) [\exp \{ cL(1 - \varepsilon c)^{-1} \} - 1]. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как функция W ограничена, то выражение, стоящее в правой части неравенства (24) при достаточно малом $\varepsilon (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^\circ,\ \varepsilon^\circ \leqslant \varepsilon^*)$ может быть сделано сколь угодно малым, т. е., справедливо неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

Этим теорема 1 доказана.

Переидем теперь к обоснованию второго варианта метода усреднения.

Пусть вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, \dot{x}, , \lambda, T)$ краевой задачи (3), (4), где λ рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от λ средние значения

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), \dot{x}, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \dot{x}, \lambda, T), z)\, \mathrm{d}t = X(x, \dot{x}, z) \qquad (25)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, s, x, \psi(s, x, \dot{x}, \lambda, T), \dot{x}, \frac{\partial}{\partial s} \psi(s, x, \dot{x}, \lambda, T))\, \mathrm{d}s = \overline{\varphi}(t, x, \dot{x}) \qquad (26)$$

Тогда усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2) назовем уравнение

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^1 \overline{\varphi}(t, \xi(s), \dot{\xi}(s))\, \mathrm{d}s) \qquad (27)$$

с начальным условием

$$\xi(0) = X^\circ. \qquad (28)$$

Докажем теорему о близости компонент $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ краевой задачи (1), (2) и решения $\xi(t)$ задачи Коши (27), (28).

Теорема 2. Пусть:

1. Выполнены условия 1, 2, 3, 5 теоремы 1.

2. Функция $\varphi(t, s, x, y, u, v)$ удовлетворяет в области $G^*(t, s, x, y, u, v)$ неравенству

$$\| \varphi(t, s, x, y, u, v) - \varphi(t, s, x', y, u', v) \| \leqslant \sigma_1(t, s)\, (\| x - x' \| + \| u - u' \|),$$

где функция $\sigma_1(t, s)$ со своей стороны удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \sigma_1(t, s)\, \mathrm{d}s \leqslant c_1 = \mathrm{const}.$$

3. Для всех $(x, u, z, \lambda) \in G^*(x, u, z) \times \Lambda$ и $(t, x, u, \lambda) \in G^*(t, x, u) \times \Lambda$ существуют независящие от параметра λ пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, u, \lambda, T, z)\, \mathrm{d}t = \overline{X}(x, u, z), \qquad (29)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x, \psi(s, x, u, \lambda, T), u, \frac{\partial}{\partial s}\psi(s, x, u, \lambda, T))\,ds = \bar{\varphi}(t, x, u), \quad (30)$$

причем предельные переходы в (29) и (30) производят равномерно относительно совокупности $(x, u, z, \lambda) \in G^*(x, u, z) \times \Lambda$, и $(t, x, u, \lambda) \in G^*(t, x, u) \times \Lambda$. Средние значения $\bar{X}(x, u, z)$ и $\bar{\varphi}(t, x, u)$ определены, непрерывны и равномерно ограничены для всех $(x, u, z) \in G^*(x, u, z)$ и $(t, x, u) \in G^*(t, x, u)$ и удовлетворяют условиям

$$\|\bar{X}(x, u, z) - \bar{X}(x', u', z')\| \leqslant c(\|x - x'\| + \|u - u'\| + \|z - z'\|),$$

$$\|\bar{\varphi}(t, x, u)\| \leqslant \sigma_2(t),$$

$$\|\varphi(t, s, x, y, u, v) - \bar{\varphi}(t, x, u)\| \leqslant \sigma_3(t, s),$$

где C — положительная постоянная, а функции $\sigma_2(t)$ и $\sigma_3(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sigma_2(\tau)\,d\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\,d\tau\int_0^t \sigma_3(\tau, s)\,ds \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

4. Решение усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon\bar{X}(\xi(t), \dot{\xi}(t), \int_0^1 \bar{\varphi}(t, \xi(s), \dot{\xi}(s))\,ds) \quad (31)$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x^\circ$, существует и однозначно определено при $t \geqslant 0$ для всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и кривая $\{\xi(t), \dot{\xi}(t)\}$ соответствующая этому решению, на этом интервале не выходит из области $G^*(x, u)$.

5. Уравнение в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y}Y + \frac{\partial W}{\partial v}\left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}Y + \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,ds\right) =$$

$$= X(t, x, u, v, z) - \bar{X}(x, u, z),$$

$$W|_{t=0} = 0, \qquad x = \text{const}, \qquad u = \text{const},$$

обладает некоторым решением $W = W(t, x, y, u, v)$, которое определено и равномерно ограничено вместе со своими частными производными первого порядка во всей области G^*.

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ — решение краевой задачи (1), (2), а $\xi(t)$ — решение усредненного уравнения (31) с начальным условием $\xi(0)=x^\circ$, то для любого сколь угодно малого δ можно указать такое $\varepsilon^\circ > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon^\circ$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим разность $\dot\eta(t) - \dot\xi(t)$, где $\xi(t)$ — решение усредненного уравнения (31) с начальным условием $\xi(0) = x^\circ$, а $\eta(t)$ — выражение (12).

Имеем

$$\dot\eta(t) - \dot\xi(t) = \dot x(t) - \varepsilon\left\{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\dot x(t) + \frac{\partial W}{\partial y}\dot y(t) + \frac{\partial W}{\partial \dot x}\ddot x(t) + \right. \tag{33}$$

$$\left. + \frac{\partial W}{\partial y}\ddot y(t) + \overline{X}(\xi(t),\ \dot\xi(t),\ \zeta(t))\right\},$$

где

$$\zeta(t) = \int_0^1 \overline{\varphi}(t,\ \xi(s),\ \dot\xi(s))\ \mathrm{d}s.$$

Продифференцировав систему (1) и подставляя (15) в (33) получаем

$$\dot\eta(t) - \dot\xi(t) = -\varepsilon\left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y}Y + \frac{\partial W}{\partial \dot y}\left(I_2 - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}Y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial Y}{\partial w}\int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}s\right) - X(t,\ x,\ y,\ \dot x,\ \dot y,\ z) + \overline{X}(x,\ x,\ z)\right] +$$

$$+ \varepsilon[\overline{X}(\eta,\ \dot\eta,\ \zeta) - \overline{X}(\xi,\ \dot\xi,\ \zeta)] + \varepsilon[\overline{X}(x,\ \dot x,\ z) - \overline{X}\,(\eta,\ \dot\eta,\ \zeta)] +$$

$$+ \varepsilon^2\left(\frac{\partial W}{\partial x}X + \frac{\partial W}{\partial \dot x}P + \frac{\partial W}{\partial \dot y}Q\right).$$

В силу условий теоремы 2 и неравенств (18), (19) и (20) находим

$$\| \dot\eta(t) - \dot\xi(t) \| \leqslant \frac{\varepsilon c}{1 - \varepsilon c}\| \eta(t) - \xi(t) \| + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon c}[c(M_1 + M_2)(1 + c_1) + M] +$$

$$+ \frac{\varepsilon c}{1 - \varepsilon c}[2\sigma_2(t) + \sigma_{30}(t)],$$

где

$$\sigma_{30}(t) = \int_0^1 \sigma_3 \ (t, \ s) \ \mathrm{d}s.$$

Отсюда, так как $\eta(0) = \xi(0)$, следует

$$\| \eta(t) - \xi(t) \| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon c} \int_0^t \Big\{ \varepsilon^2 [c(M_1 + M_2) \ (1 + c_1) + M] + \\ + \varepsilon c \ [2\sigma_2(\tau) + \sigma_{30}(\tau)] \Big\} \ \exp \ \{\varepsilon c (1 - \varepsilon c)^{-1} (t - \tau)\} \ \mathrm{d}\tau.$$

Введя функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(\tau) \ \mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_{30}(\tau) \ \mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

находим, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\| \eta(t) - \xi(t) \| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon c} \exp \{cL(1 - \varepsilon c)^{-1}\} \{\varepsilon [c(M_1 + M_2)(1 + c_1) + M] L + \\ + c[2\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + \gamma_2 (L\varepsilon^{-1}) \ L\}.$$

Из этого неравенства и из выражения (12) для $\eta(t)$ видно, что всегда можно выбрать $\varepsilon (\varepsilon < \varepsilon \leqslant \varepsilon^\circ, \ \varepsilon^\circ \leqslant \varepsilon^*)$ таким образом, чтобы на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ было справедливо неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \delta.$$

Этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байнов Д. Д.*, Метод усреднения для одной двухточечной краевой задачи. Математический вестник, 5 (20), св. 2. 1968.
2. *Байнов Д. Д.*, Асимптотические формулы для одной краевой задачи. Труды у международной конференции по нелинейным колебаниям т. 1, Киев, 1970.
3. *Филатов А.Н.*, Усреднение в системах дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений. Изд-во «ФАН», Ташкент, 1971.

4. *Филатов А. Н.*, Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Изд-во «ФАН», Ташкент, 1971.

5. *Иманалиев М. И., Тазабеков Р. Т.*, Метод усреднения в теории нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Изд-во «ИЛИМ», Фрунзе, 1970.

6. *Тазабеков Р. Т.*, Метод усреднения в системах нелинейных интегро-дифференциальных уравнений содержащих быстрые и медленные переменные. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Изд-во «ИЛИМ», Фрунзе, 1969.

Aplicarea metodei de mediere unei probleme la limită pentru sisteme integro-diferențiale Fredholm neexplicite relativ la derivată

În lucrare sînt date două variante ale metodei de mediere pentru rezolvarea unei probleme la limită pentru un sistem integrodiferențial de tip Fredholm cu parametru mic. De asemenea, sînt demonstrate teoreme de evaluare a abaterii soluției ecuației mediante.

C.Z.: 519.422
512.53/.55

ASUPRA UNEI TEOREME DE IZOMORFISM ÎN ALGEBRE UNIVERSALE

D. SUCIU *

În acest articol este definită imaginea unei congruențe printr-un homomorfism de algebre universale. Scopul central constă în „caracterizarea" acestei congruențe-imagine cu ajutorul congruenței inițiale și a relației de echivalență indusă de homomorfism.

Terminologie și notații. Fie Ω un domeniu de operatori; pentru orice Ω-algebră A, notăm cu $\mathscr{C}(A)$ laticea completă a congruențelor pe A. În cele ce urmează ne vor fi utile următoarele proprietăți:

P1. Fie $f: A \to B$ un homomorfism; atunci $\ker f \in \mathscr{C}(A)$.

P2. Fie $\alpha \in \mathscr{C}(A)$; vom nota cu $\alpha^s: A \to A/\alpha$ surjecția canonică. Atunci A/α poate fi organizată în mod unic ca o Ω-algebră astfel încît α^s să fie homomorfism; în plus $\ker \alpha^s = \alpha$.

Pentru demonstrația acestor proprietăți precum și pentru teorema de homomorfism folosită mai jos, cititorul se poate referi la Grätzer (1979).

Introducem următoarea definiție:

Definiție. Fie $f: A \to B$ un homomorfism, $\alpha \in \mathscr{C}(A)$, $\beta \in \mathscr{C}(B)$; spunem că f este (α, β)-compatibil dacă $(\forall)\ x, y \in A$, $(x, y) \in \alpha \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \beta$.

P3. Fie $f: A \to B$ $\alpha \in C(A)$, $\beta_i \in \mathscr{C}(B)$ $i \in I$ astfel încît f este (α, β_i)-compatibil $(\forall)\ i \in I$; atunci f este $(\alpha, \inf \beta_i)$-compatibil.

Această ultimă proprietate ne permite următoarea construcție: fiind date $f: A \to B$ și $\alpha \in \mathscr{C}(A)$ vom nota cu $f(\alpha)$ cea mai mică congruență pe B pentru care f este $(\alpha, f(\alpha))$-compatibilă.

Teoremă. Dacă $\alpha, \beta \in \mathscr{C}(A)$ atunci

$$(A/\alpha)/\alpha^s(\beta) \sim A/(\alpha \vee \beta) \sim (A/\beta)/\beta^s(\alpha)$$

Demonstrație

Vom utiliza teorema de homomorfism în forma următoare: dacă $f: A \to B$ este morfism de algebre, $\alpha \in \mathscr{C}(A)$ și $\alpha \subseteq \ker f$ atunci există

Manuscris primit la data de 23 septembrie 1981
* Ing., I.I.R.U.C.

un unic homomorfism, pe care îl vom nota f/α, de la A/α la B astfel încît $f/\alpha \circ \alpha^s = f$.

Mai utilizăm următoarea

Lema 1 Dacă $\alpha \in \mathscr{C}(A)$ $\beta \in \mathscr{C}(B)$ și $f: A \to B$ este (α, β)-compatibil, atunci $(\exists !)\ \bar{f}: A/\alpha \to B/\beta$ astfel încît $\beta^s \circ f = f \circ \alpha^s$.

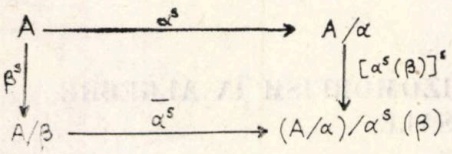


Fig. 1

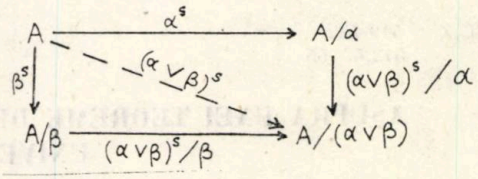


Fig. 2

Demonstrație. Definim pentru $(\forall)\ x \in A$, $\bar{f}(\alpha^s(x)) = \beta^s(f(x))$; $(\alpha\ \beta)$-compatibilitatea lui f ne asigură că $\bar{f}$ este bine definită; în plus se observă că $\bar{f}$ este morfism de Ω-algebre. Unicitatea rezultă astfel: fie $\bar{f}', \bar{f}'': A/\alpha \to B/\beta$ atunci $\bar{f}' \circ \alpha^s = \bar{f}'' \circ \alpha^s$ $(= \beta^s \circ f)$ și cum α^s este surjecție $\bar{f}' = \bar{f}''$.

Revenim la demonstrația teoremei. Conform lemei $(\exists)\bar{\alpha}^s$ astfel încît comută diagrama din fig. 1.

În plus, deoarece $\alpha, \beta \subseteq \alpha \vee \beta$, din teorema de homomorfism rezultă $(\exists)\ (\alpha \vee \beta)^s/\alpha$, $(\exists)\ (\alpha \vee \beta)^s/\beta$ astfel încît comută diagrama din fig. 2.

Demonstrația teoremei o vom încheia cu următoarea lemă, care de fapt arată ceva mai mult:

Lema 2 Atît (1) cît și (2) sînt diagrame de sumă fibrată în categoria Ω-algebrelor.

Demonstrație. Fie diagrama comutativă din fig. 3.

Se verifică faptul că α^s este $(\beta, \ker f)$-compatibil, deci $\alpha^s(\beta) \subseteq \ker f$; din teorema de homomorfism rezultă $(\exists !)\ f/\alpha^s(\beta): (A/\alpha)/\alpha^s(\beta) \to X$ astfel încît să comute triunghiul 1 din fig. 4.

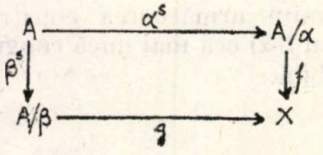


Fig. 3

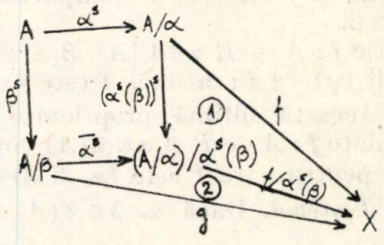


Fig. 4

Comutativitatea lui 2 rezultă din faptul că β^s este surjectiv și $g \circ \beta^s = f \circ \alpha^s = f/\alpha^s(\beta) \circ (\alpha^s(\beta))^s \circ \alpha^s = f/\alpha^s(\beta) \circ \bar{\alpha}^s \circ \beta^s$.

Deci (1) este o diagramă de sumă fibrată.

Fie din nou (3); să notăm cu $h = f \circ \alpha^s = g \circ \beta^s$. Rezultă $\alpha = \ker \alpha^s \subseteq \ker h$ și $\beta = \ker \beta^s \subseteq \ker h$ deci $\alpha \vee \beta \subseteq \ker h$ și, aplicînd teorema de homomorfism $(\exists !)\ h/(\alpha \vee \beta): A/(\alpha \vee \beta) \to X$ astfel încît $h = h/\alpha \vee \beta \circ$

$\circ (\alpha \vee \beta)^s$. Atunci $h/(\alpha \vee \beta) \circ (\alpha \vee \beta)^s/\alpha \circ \alpha^s = f \circ \alpha^s$ și, cum α^s este surjectivă, triunghiul 1 din fig. 5 comută.

Analog comută și 2. Homomorfismul $h/(\alpha \vee \beta)$ este unic cu această proprietate căci, dacă $k : A/(\alpha \vee \beta) \to X$ face 1 și 2 comutative, atunci $k \circ (\alpha \vee \beta)^s = h = h/(\alpha \vee \beta) \circ (\alpha \vee \beta)^s$ deci $k = h/(\alpha \vee \beta)$ (deoarece $(\alpha \vee \beta)^s$ este surjecție). Așadar și (2) este o diagramă de sumă fibrată.

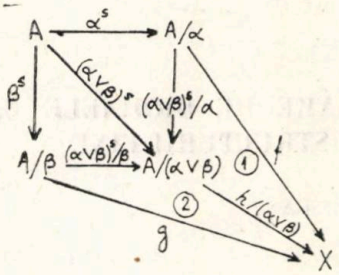


Fig. 5

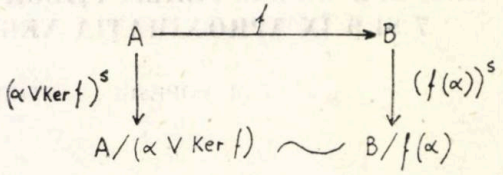


Fig. 6

Fie $f : A \to B$ un homomorfism surjectiv și $\alpha \in \mathscr{C}(A)$. Știm că $(\exists !)\, i : A/\ker f \to B$ un izomorfism astfel încît $f = i \circ (\ker f)^s$; aceasta ne permite să deducem din teoremă următorul

Corolar 1. $A/(\alpha \vee \ker f) \sim B/f(\alpha)$.

Observație. Din lema 2 se poate deduce ceva mai mult : acest izomorfism face comutativă diagrama din fig. 6.

Corolar 2. Fie $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ două homomorfisme surjective; atunci $f(\ker g \circ f) = \ker g$.

Demonstrație. Aplicînd corolarul 1 avem $B/f(\ker g \circ f) \sim A/(\ker f \vee \ker g \circ f) \sim A/\ker g \circ f$; în plus, notînd cu $i : B/f(\ker g \circ f) \to A/\ker g \circ f$ izomorfismul, avem $i \circ (f(\ker g \circ f))^s \circ f = (\ker g \circ f)^s$; dar $A/\ker g \circ f \sim C$ și, notînd $j : C \to A/\ker g \circ f$ izomorfismul cu proprietatea $(\ker g \circ f)^s = j \circ g \circ f$ avem $j \circ g \circ f = (\ker g \circ f)^s = i \circ (f(\ker g \circ f))^s$ și, cum j este surjectivă, $j \circ g = i \circ (f(\ker g \circ f))^s$ deci $\ker g = f(\ker g \circ f)$.

Menționăm că aceste rezultate rămîn valabile și pentru algebre heterogene.

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Grätzer*, (1979) „Universal Algebra" Springer-Verlag New York Inc.

On an Isomorphism Theorem in Universal Algebras

In this paper we define the image of a congruence under an universal algebra homomorfism. Our main purpose consists in the „description" of this image-congruence in terms of the initial one and the equivalence relation induced by the homomorfism.

C.Z.: 538.551.3
621.392.4

CALCULUL SUSCEPTIBILITĂȚILOR NELINIARE DE ORDINELE 5, 7 ȘI 9 ÎN APROXIMAȚIA NEGLIJĂRII STRUCTURII FINE

I. M. POPESCU, P. STERIAN, N. PUȘCAȘ *

În lucrare se stabilesc expresii de calcul pentru susceptibilitățile neliniare de ordinele 5, 7, și 9, funcție de elementele de matrice ale tranzițiilor de dipol electric care intervin în procesele neliniare pentru generarea armonicilor de ordin superior.

Regulile de selecție utilizate în calcul corespund neglijării structurii fine a nivelelor energetice implicate în tranziții.

I. Introducere

Producerea radiației coerente în UV și UV îndepărtat pe calea generării de armonici în medii optice cu neliniarități ridicate, folosind laseri de mare putere, deschide perspectiva extinderii tehnicilor de mixare neliniară pentru obținerea radiației coerente în domeniul razelor X. Rezultatele teoretice și experimentale privind generarea armonicii a 5-a au evidențiat posibilitatea obținerii unor eficiențe semnificative de conversie și pentru armonici mai ridicate [1, 2]. Modelele teoretice de analiză ale generării armoncilor de ordin superior cu ajutorul ecuațiilor cuplate de amplitudine implică cunoașterea susceptibilităților neliniare de diferite ordine pentru integrarea numerică a acestor ecuații în vederea stabilirii condițiilor experimentale optime de producere a interacțiilor [3]. Deși se cunoaște metoda generală de calcul al susceptibilităților neliniare de ordinul n [4], din literatură rezultă lipsa unor estimări a susceptibilităților de ordin mai mare decît 3, pe baza unor calcule complete pentru diferite medii atomice neliniare [5]. În lucrare ne propunem stabilirea unor expresii de calcul al susceptibilităților neliniare de ordinul 5, 7 și 9, funcție de elementele de matrice ale tranzițiilor de dipol implicate în procesul neliniar, integrabile prin cunoașterea funcțiilor de undă radiale.

Manuscris primit la data de 15 aprilie 1982

* Prof. dr. ing.; Conf. dr. ing.; Asist. fiz., Catedra Fizică

II. Calculul susceptibilităţilor neliniare

Formula generală de calcul a susceptibilităţilor neliniare a fost stabilită pe baza formalismului matricii densitate utilizîndu-se teoria perturbaţiilor, sub forma [4]:

$$\chi^{(r)}_{\mu a_1,\ldots,a_r}(\omega_1,\ldots,\omega_r) = \mathcal{S}_T \frac{(-1)^r n}{r!\,h^r} \cdot$$

$$\cdot \sum_{ab_1\cdots b_r} \rho^0_{aa} \frac{R^{\mu}_{ab} \cdot R^{a_1}_{b_1 b_2} \ldots R^{a_{r-1}}_{b_{r-1} b_r} R^{a_r}_{b_r a}}{(\omega_{ab_r} + \omega_1 + \ldots + \omega_r)(\omega_{ab_2} + \omega_2 + \ldots + \omega_r) \ldots (\omega_{ab_r} + \omega_r)} \quad (1)$$

În cazul generării armonicilor de ordin superior se consideră pentru calculul susceptibilităţilor tranziţiile de dipol electric caracteristice proceselor directe care implică neliniarităţi de ordinul armoncii studiate. Procesele în treaptă care implică neliniarităţi inferioare celei a susceptibilităţii calculate, care de asemenea pot conduce la procesul neliniar studiat nu au fost luate în considerare urmărindu-se simplificarea calculului. Se apreciază că aceste simplificări determină abateri ce pot fi estimate pentru corectarea rezultatelor obţinute. Regulile de selecţie utilizate în calculul elementelor de matrice ale tranziţiilor $\Delta l = \pm 1$; $\Delta m = 0$; $\Delta m_s = 0$, implică neglijarea structurii fine a nivelelor energetice implicate în tranziţii. Complexitatea calculului este determinată de necesitatea evaluării elementelor de matrice ale tranziţiilor de dipol prin tehnici obişnuite de calcul.

1. Susceptibilitatea neliniară de ordinul 5

Din formula (1) pentru cazul considerat al proceselor directe se obţine pentru $\chi^{(5)}$ expresia:

$$\chi^{(5)}(-5\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, \omega) = -\mathcal{S}_T \frac{n}{5!\,h^5} \cdot$$

$$\sum \rho_{aa} \left[\frac{R^{\mu}_{ab_1} R^{a_1}_{b_1 b_2} R^{a_2}_{b_2 b_3} R^{a_3}_{b_3 b_4} R^{a_4}_{b_4 b_5} R^{a_5}_{b_5 a}}{(\omega_{ab_1} + 5\omega)(\omega_{ab_2} + 4\omega)(\omega_{ab_3} + 3\omega)(\omega_{ab_4} + 2\omega)(\omega_{ab_5} + \omega)} + \right.$$

$$+ \frac{R^{a_1}_{ab_1} R^{\mu}_{b_1 b_2} R^{a_2}_{b_2 b_3} R^{a_3}_{b_3 b_4} R^{a_4}_{b_4 b_5} R^{a_5}_{b_5 a}}{(\omega_{ab_1} - \omega)(\omega_{ab_2} + 4\omega)(\omega_{ab_3} + 3\omega)(\omega_{ab_4} + 2\omega)(\omega_{ab_5} + \omega)} +$$

$$+ \frac{R^{a_1}_{ab_1} R^{a_2}_{b_1 b_2} R^{\mu}_{b_2 b_3} R^{a_3}_{b_3 b_4} R^{a_4}_{b_4 b_5} R^{a_5}_{b_5 a}}{(\omega_{ab_1} - \omega)(\omega_{ab_2} - 2\omega)(\omega_{ab_3} + 3\omega)(\omega_{ab_4} + 2\omega)(\omega_{ab_5} + \omega)} +$$

$$\left. + \frac{R^{a_1}_{ab_1} R^{a_2}_{b_1 b_2} R^{a_3}_{b_2 b_3} R^{\mu}_{b_3 b_4} R^{a_4}_{b_4 b_5} R^{a_5}_{b_5 a}}{(\omega_{ab_1} - \omega)(\omega_{ab_2} - 2\omega)(\omega_{ab_3} - 3\omega)(\omega_{ab_4} + 2\omega)(\omega_{ab_5} + \omega)} + \right.$$

$$+\frac{R^{a_1}_{ab_1}R^{a_2}_{b_1b_2}R^{a_3}_{b_2b_3}R^{a_4}_{b_3b_4}R^{\mu}_{b_4b_5}R^{a_5}_{b_5a}}{(\omega_{ab_1}-\omega)(\omega_{ab_2}-2\omega)(\omega_{ab_3}-3\omega)(\omega_{ab_4}-4\omega)(\omega_{ab_5}+\omega)}+$$

$$+\frac{R^{a_1}_{ab_1}R^{a_2}_{b_1b_2}R^{a_3}_{b_2b_3}R^{a_4}_{b_3b_4}R^{a_5}_{b_4b_5}R^{\mu}_{b_5a}}{(\omega_{ab_1}-\omega)(\omega_{ab_2}-2\omega)(\omega_{ab_3}-3\omega)(\omega_{ab_4}-4\omega)(\omega_{ab_5}-5\omega)}\Big] \tag{2}$$

unde $R_{ij}=e\langle i|z|j\rangle$ reprezintă elementele matricii de dipol, ρ_{aa} — probabilitatea ocupării nivelului fundamental, n — densitatea de atomi pe unitatea de volum iar S_T — este operaţia de simetrizare totală. Dacă se introduce factorul de frecvenţă :

$$A_{ab_1\cdots,b_5}=\frac{1}{(\omega_{ab_1}+5\omega)(\omega_{ab_2}+4\omega)(\omega_{ab_3}+3\omega)(\omega_{ab_4}+2\omega)(\omega_{ab_5}+\omega)}+\cdots \tag{3}$$

expresia (2) poate fi scrisă compact astfel :

$$\chi^{(5)}(-5\omega;\omega,\omega,\omega,\omega,\omega)=-\frac{n}{5!\,\hbar^5}\sum_{ab_1\cdots b_5}R_{ab_1}R_{b_1b_2}R_{b_2b_3}R_{b_3b_4}R_{b_4b_5}R_{b_5a}A_{ab_1,\cdots,b_5} \tag{4}$$

În continuare se exprimă elementele matricii de dipol, funcţie de nivelele energetice implicate cu ajutorul regulilor de selecţie considerate obţinîndu-se pentru susceptibilitate expresia :

$$\chi^{(5)}(5\omega)=\frac{ne^6}{5!\,\hbar^5}\sum_{b_1\cdots b_5}\Big[\Big(\Big\langle aso\,\frac12\Big|z\Big|b_1po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_1po\,\frac12\Big|z\Big|b_2so\,\frac12\Big\rangle$$

$$\Big\langle b_2so\,\frac12\Big|z\Big|b_3po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_3po\,\frac12\Big|z\Big|b_4so\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_4so\,\frac12\Big|z\Big|b_5po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_5po\,\frac12$$

$$\Big|z\Big|aso\,\frac12\Big\rangle A_{b_1p;\ b_2s;\ b_3p;\ b_4s;\ b_5p}\Big)+\Big(\Big\langle aso\,\frac12\Big|z\Big|b_1po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_1po\,\frac12$$

$$\Big|z\Big|b_2do\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_2do\,\frac12\Big|z\Big|b_3fo\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_3fo\,\frac12\Big|z\Big|b_4do\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_4do\,\frac12\Big|z\Big|b_5po$$

$$\frac12\Big\rangle\Big\langle b_5po\,\frac12\Big|z\Big|aso\,\frac12\Big\rangle A_{b_1p;\ b_2d;\ b_3f;\ b_{44}d;\ b_5p}+\Big\langle aso\,\frac12\Big|z\Big|b_1po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_1po\,\frac12$$

$$\Big|z\Big|b_2do\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_2do\,\frac12\Big|z\Big|b_3po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_3po\,\frac12\Big|z\Big|b_4so\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_4so\,\frac12\Big|z\Big|b_5po$$

$$\frac12\Big\rangle\Big\langle b_5po\,\frac12\Big|z\Big|aso\,\frac12\Big\rangle A_{b_1pb_2db_3pb_4sb_5p}\Big)+\Big(\Big\langle aso\,\frac12\Big|z\Big|b_1po\,\frac12\Big\rangle\Big\langle b_1po\,\frac12$$

$$\left|z\right|b_2 do\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_2 do\,\frac{1}{2}\left|z\right|b_3 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_3 po\,\frac{1}{2}\left|z\right|b_4 do\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_4 do\,\frac{1}{2}\left|z\right|b_5 po$$

$$\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_5 po\,\frac{1}{2}\left|z\right|aso\,\frac{1}{2}\Big\rangle A_{b_1 p b_2 d b_3 d b_4 d b_5 p}\Big)+\Big(\Big\langle aso\,\frac{1}{2}\left|z\right|b_1 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_1 po\,\frac{1}{2}$$

$$\left|z\right|b_2 so\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_2 so\,\frac{1}{2}\left|z\right|b_3 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_3 po\,\frac{1}{2}\left|z\right|b_4 do\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_4 do\,\frac{1}{2}\left|z\right|$$

$$b_5 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_5 po\left|z\right|aso\,\frac{1}{2}\Big\rangle A_{b_1 p;\, b_2 s;\, b_3 p;\, b_4 d;\, b_5 p}\Big)\Big] \tag{5}$$

Cu ajutorul notaţiei :

$$\langle n,\ l,\ 0\ |z|\ n',\ l+1{,}0\rangle = (l+1)\ R_{nl;\,n'l+1} \tag{6}$$

calculul elementelor de matrice se reduce la evaluarea unor integrale de tipul :

$$R_{nl;\,n'l+1} = \frac{1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}}\int_0^\infty r^3 R_{nl}\cdot R_{n'l+1}\,dr \tag{7}$$

unde R_{nl} sînt funcţiile de undă radiale ale atomilor consideraţi.

2. Susceptibilităţile neliniare de ordinul 7 şi 9

Utilizîndu-se aceeaşi metodă se obţin pentru susceptibilităţile neliniare de ordinul 7 şi 9 expresii de forma :

$$\chi^{(7)}(7\omega) = \frac{ne^8}{7!\,\hbar^7}\sum_{b_1\cdots b_7}\Big[\Big\langle aso\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_1 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_1 po\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_2 so\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_2 so\,\frac{1}{2}$$

$$\Big|z\Big|b_3 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_3 po\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_4 so\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_4 so\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_5 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_5 po\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_6 so\,\frac{1}{2}\Big\rangle$$

$$\Big\langle b_6 so\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_7 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_7 po\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|aso\,\frac{1}{2}\Big\rangle A_{b_1 p;\, b_2 s;\, b_3 p;\, b_4 s;\, b_5 p;\, b_6 s;\, b_7 p} + \cdots\cdots$$

iar $\chi^{(9)}$

$$\chi^{(9)}(9\omega) = \frac{ne}{9!\,\hbar^9}\sum_{b_1\cdots b_9}\Big[\Big\langle aso\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_1 po\,\frac{1}{2}\Big\rangle\Big\langle b_1 po\,\frac{1}{2}\Big|z\Big|b_2 so\,\frac{1}{2}\Big\rangle$$

$$\left\langle b_2 so\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|b_3 po\ \frac{1}{2}\right\rangle\left\langle b_3 po\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|b_4 so\ \frac{1}{2}\right\rangle\left\langle b_4 so\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|b_5 po\ \frac{1}{2}\right\rangle\left\langle b_5 po\ \frac{1}{2}\right.$$

$$\left|z\middle|b_6 so\ \frac{1}{2}\right\rangle\left\langle b_6 so\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|b_7 po\ \frac{1}{2}\right\rangle\left\langle b_7 po\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|b_8 so\ \frac{1}{2}\right\rangle\left\langle b_8 so\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|b_9 po\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left\langle b_9 po\ \frac{1}{2}\middle|z\middle|aso\ \frac{1}{2}\right\rangle A_{b_1 p;\, b_2 s;\, b_3 p;\, b_4 s;\, b_5 p;\, b_6 s;\, b_7 p;\, b_8 s;\, b_9 p} + \ldots\ldots\ldots$$

III. Coneluzii

Expresiile stabilite pentru susceptibilităţile neliniare de diferite ordine pot fi utilizate pentru estimarea cantitativă a acestora cu ajutorul calculatorului în vederea caracterizării interacţiilor care intervin în procesele de generare de armonici de ordin superior. De asemenea, expresiile evaluate ale susceptibilităţilor permit trasarea curbelor de dispersie pentru diferite medii atomice în vederea optimizării condiţiilor de interacţie prin adaptarea indicilor.

BIBLIOGRAFIE

1. *A. G. Akmanov ş. a.*, Zh ETF Pis. Red. vol. 10, pp. 244 — 249, 1969 (JETF Lett., vol. 10, pp. 154—157 ., 1969)
2. *V. G. Tunkin, T. Usmanov, A. Shahizov*, Kvantovaya Electronica, vol. 11, pp. 117 — 118, 1972 (Sov. J. Quant. Electron., vol. 2, pp. 487—488, 1973)
3. *J. A. Armstrong, N. Bloembergen, I. Ducuing, P.S. Pershan*, Phys. Rev. vol. 127, pp. 1918 — 1939, 1962.
4. *P. N. Butcher*, „ Nonlinear optical phenomena" Bulletin 200 Engineering Experiment Station, Ohio State University, Columbus Ohio.
5. *I. V. Tomov*, M. *C. Richardson*, IEEE J. Quantum Electron vol. QE — 12 nr, 9 pp. 521 — 531, 1976.

Nonlinear Susceptibilities of the 5, 7, and 9 Order Calculus without Fine Structure Consideration

In the paper there are obtained expressions for the 5, 7 and 9 order nonlinear susceptibilities calculus, using the matrix elements of the electric dipol transitions, which describe the nonlinear processes for harmonics generation.

The selection rules used in calculus do not take into consideration the fine structure of the energetic levels.

C.Z.: 539.11/.15
539.16

OBSERVAȚII ASUPRA MULTIPLICITĂȚII ȘI DISTRIBUȚIEI UNGHIULARE ÎNTR-O INTERACȚIUNE CU PRIMAR DE MARE ENERGIE ÎN EMULSIA NUCLEARĂ EXPUSĂ ÎN SATELITUL ARTIFICIAL „INTERCOSMOS 6"

D. ANGHELESCU, AMELITTA VOGEL, MARIA HAIDUC, ROZALIA NIȚU *

Este prezentată o interacțiune generată de un nucleu ^{12}C a cărui energie a fost estimată la 10^{14} eV. Determinarea multiplicității și a distribuției unghiulare necesită elaborarea unei metode noi, specifică jeturilor cu număr foarte mare de urme.

Interacțiunile cu nucleele din emulsia fotografică (nucleară) a particulelor cu energie mare conduc la generarea de particule noi, relativiste, în special pioni, al căror număr mediu (pe interacțiune) $\bar{n}_s$ crește odată cu energia particulelor primare, de la aproximativ 7,6 la 22,2, pentru energii inițiale variind de la 200 GeV la 3 000 GeV, în radiația cosmică [1], [2], [3], [4].

În lucrarea de față prezentăm unele prime rezultate obținute asupra multiplicității și distribuției unghiulare într-o stea generată de interacțiunea unei particule cu energia estimată la 10^{14} eV. Evenimentul (figura 1) a fost observat într-un bloc de emulsii format din 50 de plăci, cu grosimea nominală de 450 μm, expus acțiunii razelor cosmice în satelitul artificial „Intercosmos 6", condițiile experimentului fiind prezentate în 1977 la o conferință internațională de la Plovdiv [5].

Explorarea emulsiilor, după developare, a dus la identificarea a două evenimente deosebite, două cascade foarte mari, una detectată la IUCN Dubna și alta la CASS București, ambele fiind inventariate în catalogul sovietic [6], cea semnalată în figura 1, obiectul acestei note, fiind înregistrată 1^+. Măsurătorile au fost efectuate utilizînd un microscop KSM 1 ale cărui caracteristici tehnice permit determinări exacte precum și eliminarea eventualelor erori datorite distorsiei (absența distorsiei a fost evidențiată de măsurări asupra electronilor relativiști, măsurări efectuate în diferite regiuni ale plăcilor explorate).

Manuscris primit la data de 23 martie 1982

* Conf. dr. ing.; Șef lucrări dr., Catedra Fizică; Șef. lab.; Fizician princ., Institutul Central de Fizică

Interacţiunea considerată (figura 1) a fost produsă de o particulă ionizantă identificată, prin măsurători de raze δ, ca fiind un nucleu de carbon. Alături de urma acestuia există o altă urmă, a cărei ionizare corespunde unui nucleu ^4_2He. Cuasiparalelismul celor două urme (unghiul dintre ele este de 15′) sugerează o origine comună, în interacţiunea primară

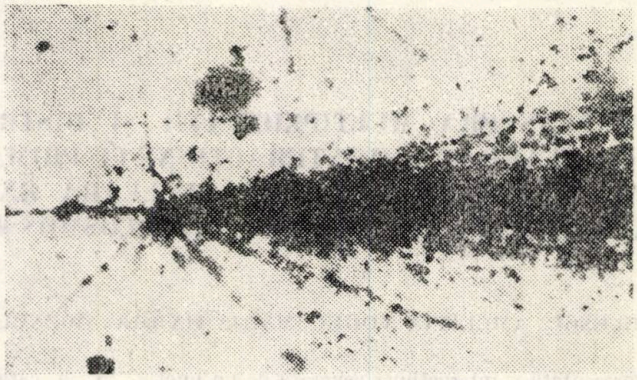


Fig. 1 — Interacţiunea produsă de o particulă ionizantă identificată

(datorită unei particule din radiaţia cosmică). Cele două urme au fost urmărite înapoi, pînă la ieşirea din blocul de emulsii, ceea ce arată că interacţiunea primară s-a produs în afara blocului. Urma particulei $\alpha(^4_2He)$ însoţeşte jetul de particule generate în interacţiunea $_6C$ — Nucleu din emulsie şi fiind uşor de recunoscut (datorită ionizării mai puternice corespunzătoare celor două sarcini elementare) a fost utilizată ca urmă de referinţă.

Analiza secundarilor care constituie cascada arată că din punct de vedere al distribuţiei unghiulare se pot distinge două subgrupe:

1°. Urme al căror unghi cu direcţia particulei iniţiale ($_6C$) este mai mare de 5°. Notînd acest unghi cu θ, valorile numerice au fost calculate cu relaţia curent utilizată

$$\cos\theta = \cos\rho_p \cos\rho_s \cos(\alpha_s - \alpha_p) + \sin\rho_p \sin\rho_s$$

unde ρ_p şi ρ_s reprezintă unghiurile de dip ale primarului respectiv secundarului, iar α_p şi α_s unghiurile dintre proiecţiile aceloraşi urme cu o direcţie arbitrară, ambele situate în planul emulsiei.

S-a observat un număr de 126 particule secundare care pot fi înglobate în această categorie.

2°. Secundarilor emişi într-un con îngust ($\theta < 5°$) nu li se poate aplica procedeul anterior, deoarece multitudinea de particule a dus la o ionizare foarte puternică şi la înnegrirea completă a plăcii. În consecinţă, în apropierea locului unde s-a produs interacţiunea, nu se pot distinge urmele individuale şi deci nu li se pot măsura unghiurile α şi ρ. În scopul obţinerii unor rezultate cantitative a fost elaborată o metodă nouă, [7], adecvată acestei situaţii. În esenţă, metoda constă în a măsura coor-

donatele, (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2), în două puncte situate pe urma secundarului, la o distanță mare de locul de generare, astfel încît urma să devină distinctă, și în două puncte de pe urma de referință a particulei α care străbate și însoțește jetul de secundari. (Evident, procedeul propus implică existența unei urme de referință precum și posibilitatea urmăririi în plăci diferite a secundarilor). Utilizînd indicii s pentru urmele particulelor secundare, generate în interacțiune, respectiv r pentru urma de reper (particula α) se poate calcula unghiul θ cu relația

$$\cos\theta = \frac{\Delta x_r \Delta x_s + \Delta y_r \Delta y_s + \Delta z_r \Delta z_s}{\sqrt{\Delta x_r^2 + \Delta y_r^2 + \Delta z_r^2}\sqrt{\Delta x_s^2 + \Delta y_s^2 + \Delta z_s^2}}$$

În final s-a aplicat o corecție, ținînd seama de unghiul de înclinare de 15′ a particulei α față de urma generatoare a interacțiunii.

Metoda elaborată s-a dovedit a fi eficace și, cu ajutorul ei, au fost identificate urmele a 345 particule secundare înglobate în conul cu o deschidere de 5°. Măsurarea unghiurilor, conform metodologiei propuse, s-a concretizat prin distribuția unghiulară reprodusă în diagrama din fig. 2.

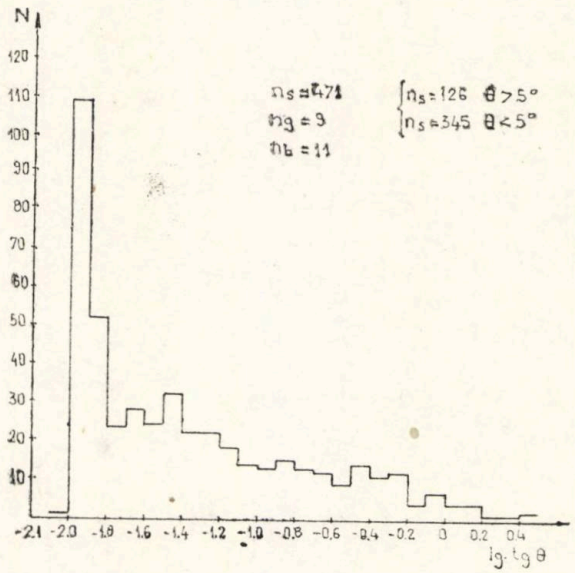


Fig. 2 — Distribuția unghiulară — jet cosmic

În ceea ce privește multiplicitatea, trebuie observat că este apreciabil superioară (chiar ținînd seama de fluctuații) valorilor așteptate pe baza modelelor teoretice, corespunzătoare energiei dezvoltate, ceea ce conferă un interes suplimentar problemei studiate.

Mulțumim pe această cale tovarășelor Sabina Herișanu și Doina Mocanu pentru măsurătorile efectuate.

BIBLIOGRAFIE

1. *H. Wintzeler*, Nucl. Phys., 69, 661, (1963)
2. *I. Otterland*, Prepint L.U.I.P., 7804, Lund (1978)
3. *I. Babecki, G. Novak*, Izv. Acad. Nauk SSSR, 42, 7 (1978)
4. *M. Haiduc, D. Haşeganu, M. Marcu, A. Marin*, Rev. de Phys., 25, 4 (1980)
5. **Lucrăr le** Conferinţei de Raze cosmice, Plovdiv, august (1977)
6. **Catalogul** sovietic al interacţiunilor înregistrate în experimentul „Intercosmos 6".
7. *D. Anghelescu, A. Vogel, M. Haiduc, R. Nifu*, Sesiunea jubiliară de comunicări ştiinţifice IPB, 1981.

Multiplicité et distribution angulaire dans une intéraction de haute énergie dans l'émulsion nucléaire exposées dans le satellite artificiel „Intercosmos 6"

On présente une intéraction provoquée par un noyau ^{12}C dont l'énergie est estimée a 10^{14} eV. Une nouvelle méthode vient d'être élaborée concernant l'étude de la multiplicité et de la distribution angulaire dans les étoiles ayant un très grand nombre de branches.

C.Z.: 621.315 : 537.212

CÎMPUL ELECTRIC ÎN VECINĂTATEA CONDUCTOARELOR MULTIPLE

A. MORARU, CRISTINA BUDA, V. DIMANCEA, M. CREMENESCU *

Se studiază cîmpul electric în vecinătatea suprafeței conductoarelor multiple simetrice, compuse din conductoare elementare cilindrice, folosind metoda transformării conforme a domeniului și aproximarea formei suprafeței conductoarelor elementare. Conductoarele elementare pot fi de aceeași polaritate sau de polarități alternate. Se dau relații simple pentru intensitatea maximă a cîmpului la suprafața conductoarelor și se trasează liniile echipotențiale.

1. Introducere

În legătură cu reducerea efectului Corona în vecinătatea conductoarelor liniilor aeriene de foarte înaltă tensiune se folosesc fascicule de conductoare multiple. Cunoașterea repartiției cîmpului electric din vecinătatea acestor conductoare prezintă interes atît pentru determinarea condițiilor de amorsare a descărcării Corona, cît și pentru unele perturbații introduse de liniile de foarte înaltă tensiune [1].

În literatura de specialitate se cunosc mai multe lucrări care abordează această temă, în cazuri particulare, dintre care se remarcă [2] și [3]. În lucrarea de față se studiază cîmpul electric al unui conductor multiplu în cazul general (cu n subconductoare), în cele două situații posibile: subconductoare de aceeași polaritate și subconductoare de polarități opuse.

Metoda folosită este aceea a transformării conforme a domeniului și aproximarea formei suprafeței subconductoarelor, iar scopul urmărit este obținerea unei forme constructive optime pentru care cîmpul electric să fie minim.

2. Studiul cîmpului electric în vecinătatea unui conductor multiplu format din subconductoare de aceeași polaritate

2.1. *Modelul de calcul*

Se va studia cazul unui conductor rectiliniu multiplu format din *n subconductoare* de diametru d, dispuse echidistant, tangente la interiorul unui cerc de rază ρ_0. Cîmpul fiind plan-paralel, va fi studiat într-o secțiune

Manuscris primit la data de 12 iulie 1982

* Conf. dr. ing., Catedra Electrotehnică; Studenți Facultatea Energetică

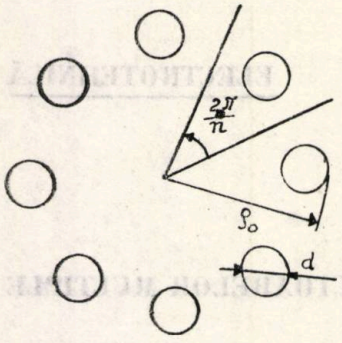


Fig. 1. Conductor multiplu cu subconductoare de aceeași polaritate.

transversală. Conductorul multiplu se consideră destul de departe de alte conductoare, astfel încît sarcina electrică totală să fie egal și uniform distribuită pe cele n subconductoare (fig. 1).

Din considerente de simetrie problema poate fi studiată în diedrul de unghi $\frac{2\pi}{n}$, delimitat de două linii de cîmp mediatoare ale distanței dintre subconductoare. Cîmpul conductorului cilindric se aproximează cu cel al unui conductor filiform situat undeva în interiorul secțiunii lui.

Se consideră deci un conductor filiform încărcat cu sarcină electrică, situat pe bisectoarea diedrului considerat (fig. 2a), la raza ρ_1.

Folosind transformarea conformă $w = z^n$, acest diedru pe care-l considerăm în planul complex $z(\rho, \varphi)$, se transformă în întregul plan complex $w(r, \theta)$ (fig. 2b). Acest plan este prevăzut cu o tăietură de-a lungul semiaxei $u < 0$. Transformarea inversă este $z = (w)^{1/n}$.

Relațiile care rezultă între coordonatele polare în cele două plane, sînt:

$$\frac{r}{h} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n, \quad \theta = n\varphi \quad \text{sau} \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n}. \tag{1}$$

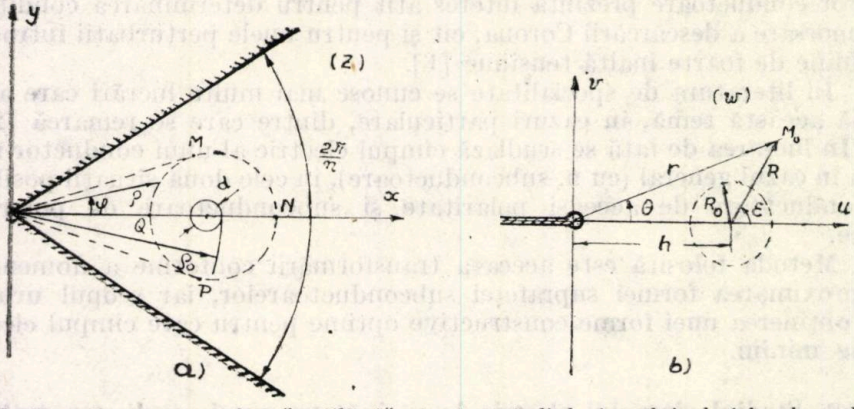


Fig. 2. Transformarea conformă utilizată pentru studiul cîmpului electric al conductorului multiplu cu subconductoare de aceeași polaritate: a) planul original, b) planul imagine.

2.2. *Potențialul și cîmpul electric*

Potențialul în planul (w) este dat de expresia:

$$V = Q \ln \frac{h}{R} + V_0 \tag{2}$$

unde: V_0 este potențialul de referință ales în originea sistemului de axe,

R este distanţa de la conductorul filiform la punctul curent, h este abscisa de amplasare a conductorului filiform, iar $Q = \frac{\rho_l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}$ este un coeficient constant.

În planul (w) liniile echipotenţiale sînt cercuri, exprimate parametric sub forma:

$$\begin{cases} r \cos \theta = h + R \cos \varepsilon \\ r \cdot \sin \theta = R \sin \varepsilon \end{cases} \quad \text{sau} \quad r^2 + h^2 - 2hr \cos \theta = R^2 \tag{3}$$

Se calculează raza de curbură a unei echipotenţiale în planul (z):

$$R_{c_{I,II}} = \frac{\rho R_0}{n \cdot h \cdot \cos(n\varphi) \pm \sqrt{R_0^2 - h^2 \cdot \sin^2(n\varphi)}} \tag{4}$$

între coordonatele polare existînd relaţia de legătură:

$$\rho^n = h \cdot \cos(n\varphi) \pm \sqrt{R_0^2 - h^2 \cdot \sin^2(n\varphi)} \tag{5}$$

Semnul „+" corespunde părţii exterioare a liniei echipotenţiale (porţiunea MNP, fig. 2a), caz în care $\sin(n\varphi) \leqslant \frac{R_0}{h}$, iar semnul „—" corespunde părţii interioare (MQP).

În imediata apropiere a conductorului filiform ($R_0 \ll h$) raza de curbură R_c variază foarte puţin, deci şi în planul (z) linia echipotenţială este aproape circulară şi aproximează bine forma conductorului. Se consideră deci, $R_c = \frac{d}{2}$ la $\varphi = 0$ şi $\rho = \rho_0$ (cu semnul „+" pentru exteriorul conductorului unde cîmpul electric este maxim), şi rezultă:

$$d = \frac{2 \cdot \rho_0}{1 + n \dfrac{h}{R_0}} \quad \text{sau} \quad \frac{h}{R_0} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\rho_0}{d} - 1\right) \tag{6}$$

şi ţinînd cont de expresia (2) obţinem:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{(1 + R_0/h)^{1/n}} \tag{7}$$

Dacă V' este potenţialul conductorului multiplu în raport cu un punct aflat la distanţa H, de potenţial nul (de exemplu pe sol), se obţin constantele:

$$Q = \frac{V'}{\ln\left[\dfrac{h}{R_0}\left(\dfrac{H^n}{\rho_1^n} - 1\right)\right]} \quad (8) \quad \text{şi} \quad V_0 = \frac{V' \ln\left(\dfrac{H^n}{\rho_1^n} - 1\right)}{\ln \dfrac{h}{R_0}\left[\dfrac{H^n}{\rho_1^n} - 1\right]} \tag{9}$$

raportul h/R_0 fiind definit implicit de relaţia (6).

Cîmpul electric este maxim pe bisectoarea diedrului şi are expresia:

$$E_{max} = -\left.\frac{\partial V}{\partial \rho_e}\right|_{\rho_e = \rho_0} = \frac{n \cdot V'\left(\dfrac{h}{R_0} + 1\right)}{\rho_0 \ln\left[\dfrac{h}{R_0}\left(\dfrac{H^n}{\rho_1^n} - 1\right)\right]} \tag{10}$$

Pentru trasarea liniilor echipotenţiale s-a întocmit un program de calcul bazat pe ecuaţiile parametrice (3) în care se aleg razele cercurilor din planul-imagine (w) astfel încît să se obţină variaţii de potenţial egale. În figura 3 se dau pentru exemplificare liniile echipotenţiale trasate în cazul a $n = 2$ şi $n = 10$ conductoare.

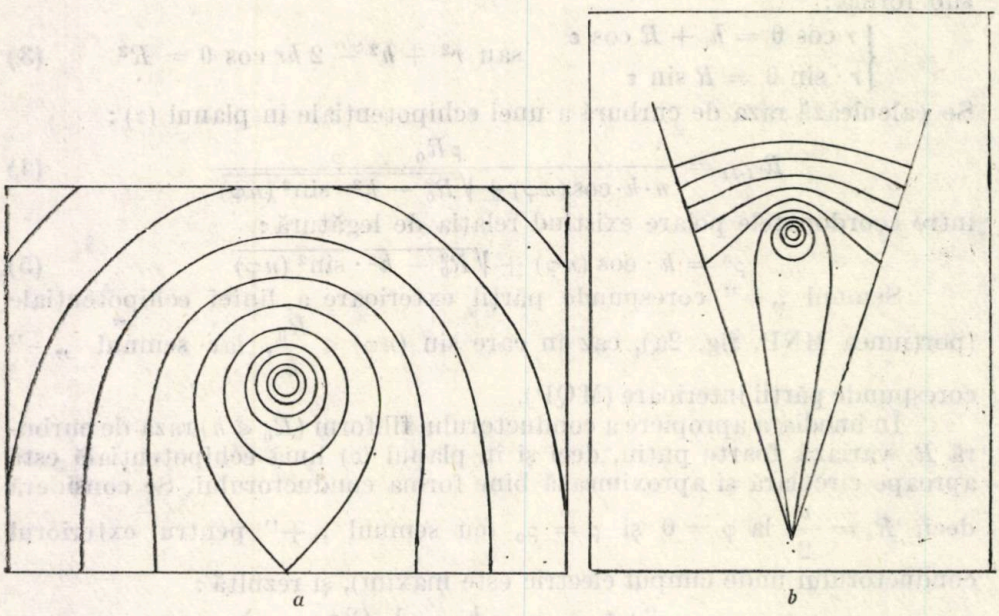


Fig. 3. Forma liniilor echipotenţiale ale conductorului multiplu cu conductoare elementare de aceeaşi polaritate a) n = 2, b) n = 10.

Liniile echipotenţiale care în planul (z) se închid în jurul unui subconductor component, corespund în planul (w) echipotenţialelor circulare ($R_0 < h$, $V > V_0$), iar liniile care se închid numai în jurul conductorului multiplu, rămînînd deschise în diedrul $\frac{2 \cdot \pi}{n}$, corespund cercurilor deschise din planul (w).

2.3. *Influenţa divizării conductorului de fază asupra cîmpului electric maxim*

Intensitatea maximă a cîmpului electric, obţinută în relaţia (10) se compară cu cea a unui conductor cilindric de rază a, aflat la potenţialul $\overline{V'}$ şi distanţa H faţă de punctul ales ca origine a potenţialelor.

Potenţialul şi intensitatea cîmpului conductorului cilindric satisfac relaţiile:

$$V_c = V' = Q' \ln \frac{H}{a}; \qquad E_c = \frac{Q'}{a} = \frac{V'}{a \ln \frac{H}{a}} \tag{11}$$

Se definește factorul de reducere p:

$$p = \frac{E_{max}}{E_c} = \frac{a}{\rho_0} \cdot \frac{\left(\frac{2\rho_0}{d} + n - 1\right) \cdot \ln \frac{H}{a}}{\ln \left\{\left(\frac{H^n}{\rho_0^n} - 1\right)\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2\rho_0}{d} - 1\right) + 1\right] + 1\right\}} \qquad (12)$$

În funcție de diametrul conductorului cilindric cu care se face comparația, factorul p poate avea diferite valori. Astfel:

a) comparația se face cu un subconductor component ($a = d/2$):

$$p = \frac{d}{2 \cdot \rho_0} \cdot \frac{\left(\frac{2\rho_0}{d} + n - 1\right) \ln \frac{2H}{d}}{\ln \left\{\left(\frac{H^n}{\rho_0^n} - 1\right)\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot \rho_0}{d} - 1\right) + 1\right] + 1\right\}} \qquad (13)$$

b) comparația se face cu un conductor cilindric care ar avea secțiunea egală cu suma secțiunilor subconductoarelor componente $\left(a = \sqrt{n} \cdot \frac{d}{2}\right)$:

$$p = \frac{\sqrt{n} \cdot d}{2 \cdot \rho_0} \cdot \frac{\left(\frac{2\rho_0}{d} + n - 1\right) \ln \frac{2H}{\sqrt{n} \cdot d}}{\ln \left\{\left(\frac{H^n}{\rho_0^n} - 1\right)\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2\rho_0}{d} - 1\right) + 1\right] + 1\right\}} \qquad (14)$$

Dependența factorului p funcție de numărul de conductoare n pentru diferite valori ale raportului $\frac{\rho_0}{d}$, în cazul celor două ipoteze, se dă în fig. 4a și 4b.

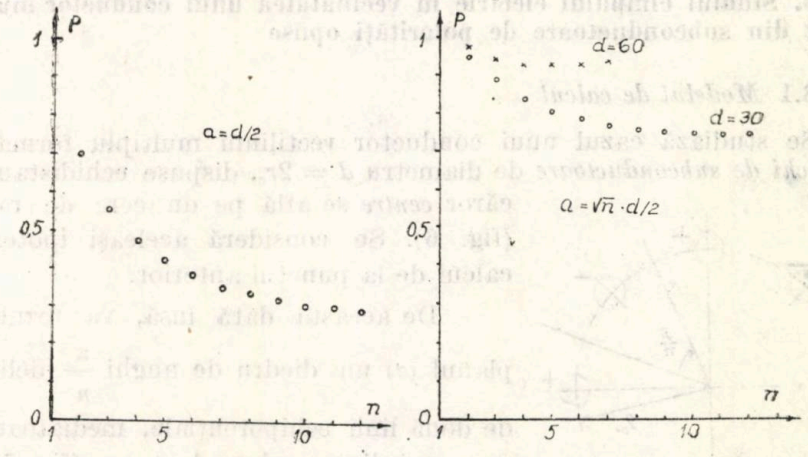


Fig. 4. Factorul de reducere al intensității maxime a cîmpului electric, pentru $H = 10$ m, $\rho_0 = 150$ mm, în funcție de numărul de conductoare elementare: a) la diametru constant al conductorului elementar ($d = 30$ mm), b) la secțiune constantă a conductorului multiplu $\left(A = \frac{\pi}{4} d^2\right)$.

În prima ipoteză p scade permanent cu numărul de conductoare n, iar în cea de a doua există un număr n optim pentru care factorul de reducere p este minim.

Se poate reprezenta şi dependenţa factorului de reducere p cu distanţa, avînd ca parametru numărul de conductoare n. Se obţine familia de curbe descrescătoare din fig. 5a şi 5b.

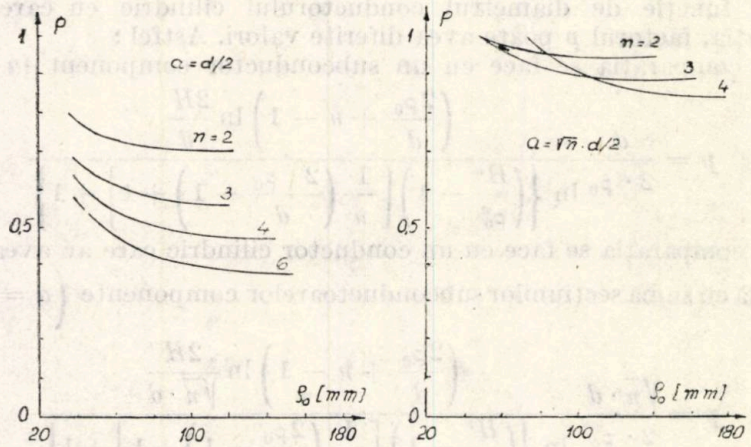


Fig. 5. Factorul de reducere al intensităţii maxime a cîmpului electric, pentru H = 10 m, în funcţie de raza exterioară a conductorului multiplu : a) la diametru constant al conductorului elementar (d = 30 mm), b) la secţiune constantă a conductorului multiplu $\left(A = \frac{\pi}{4} 30^2\right)$.

3. Studiul cîmpului electric în vecinătatea unui conductor multiplu format din subconductoare de polarităţi opuse

3.1 *Modelul de calcul*

Se studiază cazul unui conductor rectiliniu multiplu format din *n perechi de subconductoare* de diametru $d = 2r_c$, dispuse echidistant, ale căror *centre* se află pe un cerc de rază ρ_0 (fig. 6). Se consideră aceleaşi ipoteze de calcul de la punctul anterior.

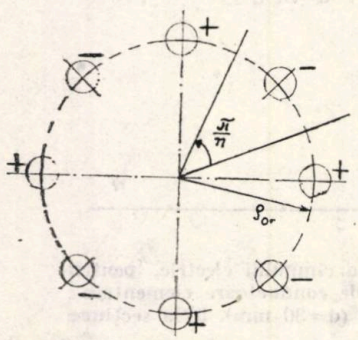


Fig. 6. Conductor multiplu cu subconductoare de polarităţi alternate.

De această dată însă, va rezulta în planul (z) un diedru de unghi $\frac{\pi}{n}$ delimitat de două linii echipotenţiale, mediatoare ale distanţei dintre subconductoare (fig. 7). Folosind transformarea conformă $w = z^n$ acest diedru se va transforma în planul imagine $w(r, \theta)$, în tot semiplanul superior. Transformarea inversă este $z = (w)^{1/n}$.

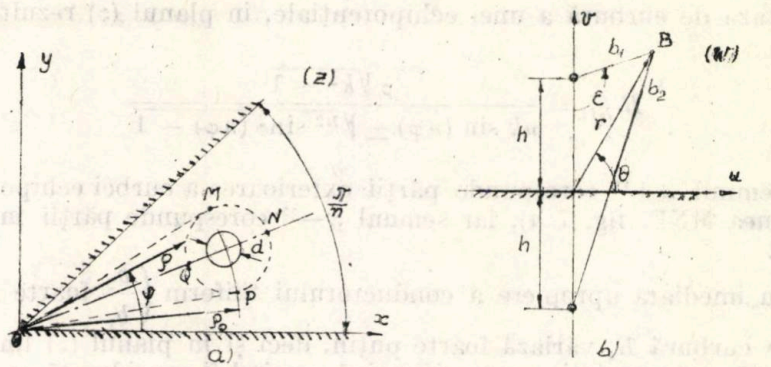


Fig. 7. Transformarea conformă utilizată pentru studiul cîmpului electric al conductorului multiplu cu conductoare elementare de polarităţi alternate : a) planul original, b) planul imagine

Relaţiile rezultate între coordonate în urma transformării, sînt :

$$\frac{r}{h} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n, \quad \theta = n\,\varphi, \quad \text{sau} \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n}. \tag{15}$$

3.2 *Potenţialul şi cîmpul electric*

ın planul (w), pentru determinarea potenţialului şi intensităţii cîmpului electric, se utilizează metoda imaginilor geometrice (fig. 8b). Axa Ou se consideră de potenţial nul.

În acest caz potenţialul în planul (w) este dat de expresia :

$$V = Q \ln \frac{b_2}{b_1} + V_0 \tag{16}$$

unde : V_0 este potenţialul de referinţă ales pe suprafaţa diedrului $\frac{\pi}{n}$, b_1 este distanţa de la conductorul filiform la punctul curent, b_2 este distanţa de la imaginea conductorului filiform la punctul curent, iar $Q = \frac{\rho_l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}$ este un coeficient constant.

Dacă punctul curent (B) parcurge o linie echipotenţială atunci raportul $\frac{b_2}{b_1}$ se păstrează constant. Totodată :

$$\begin{cases} b_1^2 = h^2 + r^2 - 2hr \cdot \sin\theta \\ b_2^2 = h^2 + r^2 + 2hr \cdot \sin\theta \end{cases} \tag{17}$$

unde $h = \rho_0^n$

deci expresiile parametrice ale liniilor echipotenţiale sînt de forma :

$$\frac{b_2^2}{b_1^2} = \frac{h^2 + r^2 + 2hr \cdot \sin\theta}{h^2 + r^2 - 2hr \cdot \sin\theta} = \frac{k+1}{k-1} \quad \text{sau} \quad h^2 + r^2 - 2khr \sin\theta = 0 \tag{18}$$

unde $k = \frac{b_2^2 + b_1^2}{b_2^2 - b_1^2}$

Raza de curbură a unei echipotențiale, în planul (z) rezultă:

$$R_{c_{I,II}} = \frac{\rho\sqrt{k^2-1}}{nk\sin(n\varphi) \pm \sqrt{k^2\sin^2(n\varphi)-1}} \tag{19}$$

Semnul „+" corespunde părții exterioarea a curbei echipotențiale (porțiunea MNP, fig. 7 *a*), iar semnul „—" corespunde părții interioare (MQP).

În imediata apropiere a conductorului filiform $\left(\frac{b_2}{b_1} \text{ foarte mare}\right)$, raza de curbură R_c variază foarte puțin, deci și în planul (z) linia echipotențială are o variație nesemnificativă, putînd fi considerată ca un cerc care aproximează forma conductorului. Totodată pentru $n \geqslant 2$ cîmpul electric este maxim în punctele conductorului aflate pe cercul de rază ρ_0, deci $\rho = \rho_0$ și $|\sin(n\rho)| = 1/k$. Rezultă:

$$r_c = \frac{\rho_0\sqrt{k^2-1}}{n} \quad \text{și} \quad k = \sqrt{1+n^2\frac{r_c^2}{\rho_0^2}} \tag{20}$$

dacă se cunoaște potențialul V al conductorului, rezultă:

$$V = \frac{1}{2}Q\ln\frac{k+1}{k-1}, \quad k = \text{th}\left(\frac{V}{Q}\right); \quad Q = \frac{2\cdot V}{\ln\dfrac{\sqrt{1+n^2r_c^2/\rho_0^2}+1}{\sqrt{1+n^2\,r_c^2/\rho_0^2}-1}} \tag{21}$$

Componentele intensității cîmpului electric, obținute cu relația $E = -\text{grad}_2 V$, sînt:

$$\begin{cases} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial\rho} = -\dfrac{2nQ\,\rho_0^n\rho^{n-1}\cdot\sin(n\varphi)(\rho_0^{2n}-\rho^{2n})}{(\rho_0^{2n}+\rho^{2n})^2-4\rho_0^{2n}\cdot\rho^{2n}\cdot\sin^2(n\varphi)} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = -\dfrac{2nQ\rho_0^n\rho^{n-1}\cdot\cos(n\varphi)(\rho_0^{2n}+\rho^{2n})}{(\rho_0^{2n}+\rho^{2n})^2-4\rho_0^{2n}\cdot\rho^{2n}\cdot\sin^2(n\varphi)} \end{cases} \tag{22}$$

Intensitatea maximă a cîmpului electric rezultă la $\sin(n\varphi) = 1/k$ și $\rho = \rho_0$:

$$E_{max} = E_\varphi = \frac{Q}{\rho_0\cdot r_c}\sqrt{\rho_0^2+n^2\cdot r_c^2} \tag{23}$$

Această expresie poate fi pusă sub forma $\frac{E_{max}}{E_0} = \frac{y}{\text{argth}\,1/y}$ unde $E_0 = \frac{V}{r_c}$ este intensitatea cîmpului electric de referință și $y = \sqrt{1+\left(\frac{nr_c}{\rho_0}\right)^2}$.

În fig. 8 s-a reprezentat $\frac{E_{max}}{E_0}$ în funcție de raportul $\frac{nr_c}{\rho_0}$.

În fig. 9 s-a reprezentat variația cîmpului electric cu distanța ρ de la mijlocul fascicolului de conductoare, pentru $\varphi = 0$.

La distanțe mari cîmpul electric scade cu puterea $(n + 1)$ a distanței.

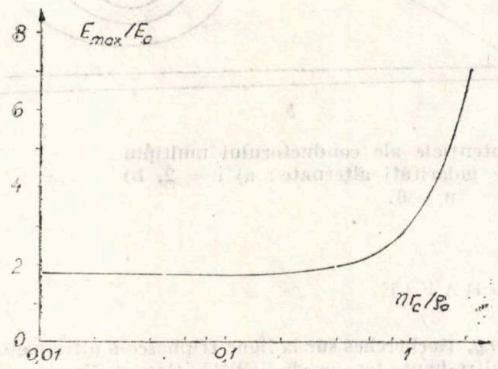


Fig. 8. Variația raportului E_{max}/E_0 în funcțiune de n r_c/ρ_0.

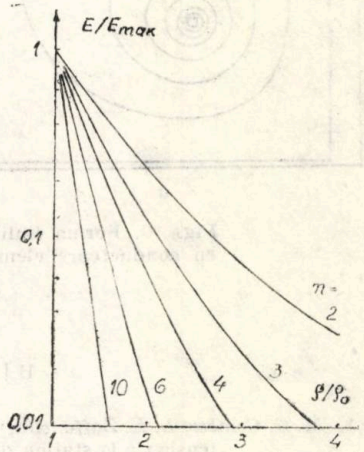
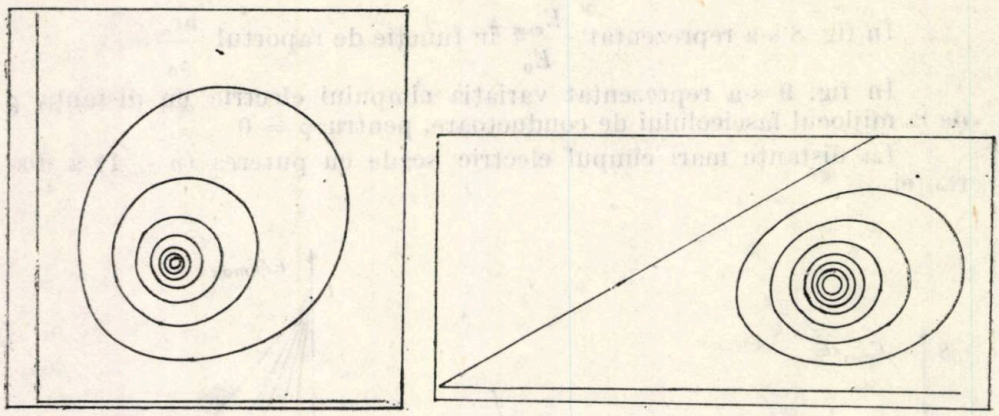


Fig. 9. Variația cu distanța a intensității cîmpului electric al conductorului multiplu cu conductoare elementare de polarități alternate.

Pentru trasarea liniilor echipotențiale ecuațiile parametrice (18) se pun sub forma:

$$\begin{cases} r_1^2 = b_1^2 + 1 - 2b_1 \cdot \cos \varepsilon \\ \cos \theta = \dfrac{b_1}{r} \cdot \sin \varepsilon \\ \sin \theta = \dfrac{1 - b_1 \cos \varepsilon}{r} \\ b_1^2 - b_2^2 + 4 - 4b_1 \cos \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Linia echipotențială corespunde raportului $\frac{b_2}{b_1}$ = constant, conform (16), (fig. 7b). Pe această bază s-a elaborat un program de calcul pentru trasarea liniilor echipotențiale, cu diferențe de potențial egale între ele. Se obțin pentru diferite valori ale numărului de conductoare n, formele din fig. 10 (în cazul de față s-a luat $n = 2$ și $n = 6$).



a b

Fig. 10. Forma liniilor echipotenţiale ale conductorului multiplu cu conductoare elementare de polarităţi alternate : a) n = 2, b) n = 6.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. G. Comber, L. E. Zaffanella, F. S. Young,* Recherches sur la ligne triphasée à ultra-haute tension à la station d'essais à ultra-haute tension de l'EPRI. Raport Nr. 31—10 CIGRE, aug./sept. 1978.
2. *E. H. Gehring, A. C. Peterson, C. F. Clark, T. C. Rednour,* I.E.E.E. Trans. P.A.S., Vol. 86, p. 278—290, 1967.
3. *M. S. Abou-Seada, E. Nasser,* I.E.E.E. Trans. — P.A.S., Vol. 90, Nr. 4, p. 1822—1829, 1971.

The Electric Field between Multiple Conductors

Using the conformal maping and the approximation of the cilindrical conductor surfaces, the electrical field of symmetrical multiple conductors, with cilindrical elementary conductors, is analysed. The component conductors may be of the same polarity or of alternate polarities. Simple relations are established for the highest electrical field strength on the conductor surfaces and the equipotentials are drawn.

C.Z.: 621.3.012.8 :681.3
538.551

COMPUTER AIDED GENERATION OF STEADY STATE CIRCUIT ANALYSIS PROBLEMS

P. CRISTEA, RODICA TUDUCE *

An algorithm for computer generation of steady-state circuit analysis problems is presented. The algorithm, implemented as a FORTRAN program, has proved a valuable teaching aid for class and home work.

1. Introduction

It is well known that a thorough study of most engineering topics, including circuit analysis, asks for the active participation of the students in the learning process. A form of such active learning consists in solving problems independently. This requires the elaboration of various problems, having different functions in teaching:

— first approach problems — sometimes simple routine exercises — that should be solved by the average student in 5 to 10 minutes,

— problems of intermediate complexity — needing 10 minutes to one hour — to be used for class or individual work, and for testing or examinations as well,

— problems of higher complexity — closer to practical engineering applications and implying several hours of work and sometimes the use of a computer — to be used as revision subjects for independent work.

The generation of such problems, of a desired type and complexity, with known answers, in a number large enough to provide every student of a considered working group with a distinct, but similar, set of problems (especially for homeworks and examinations), is a difficult and time consuming task without the use of a computer.

The paper presents an algorithm for the generation of steady-state circuit analysis problems (d.c. or a.c. — with or without controlled sources), which has been used for several years by the Department of Electrotechnics, Faculty of Automatics, and has proved a valuable didactic aid.

Manuscript received 29 March 1982
* Associate prof.; Lecturer, Electrotechnics Dept.

By a slight adjustment, the algorithm and the programs may be used for yielding nonharmonic steady — state circuit analysis problems. In the following, the references will be made to the a.c. — algorithm and the corresponding program.

2. General requirements

The algorithm yields a desired number of a.c. analysis problems, satisfying the following conditions:

▭ the circuits must have different topologic structures, randomly scattered among the possible structures for the desired complexity, i.e. for the given:

— number of nodes,

— minimal allowed rank of each node (minimum number of branches incident to a node),

— minimal imposed number of branches,

— number of magnetic couplings,

— number of controlled sources (randomly chosen from the four types: $E(I)$, $J(U)$, $E(U)$, $J(I)$),

▭ diferent values must be attributed to the circuit element parameters, by choosing them randomly from the user specified ranges of allowed values,

▭ the problems must have complete answers (usually, branch currents and voltages), their values being also randomly chosen from the corresponding allowed ranges of values,

▭ the text of each problem must be printed as a ticket, comprising the circuit data (for the student), and the answers (in a separable section). Each problem is identified by two numeric labels (e.g., the group number, and the number of the student — for the revision papers). The program will adjust the printing in order to achieve the best paper usage (maximum possible number of tickets on each printer page), without writing a problem on two successive pages.

3. Basic algorithm structure

The main algorithm steps, and the corresponding program modules (Fig. 1), are the following:

begin
  read the user specified input data {**INPUT** module};
  iter for the desired number of problems;
    * generate the network graph {**GRAPH** module};
    * establish the essential incidence matrix {**ESS** module};
    * specify the branch currents and voltages {**CV** module};

* introduce the magnetic couplings {**MC** module};
* introduce the controlled sources {**CS** module};
* specify the branch imittances and independent source parameters {**ZYEJ** module};
* write the texts {**PRINT** module};

end

end

In order to generate the necessary random numbers, the program comprises two other modules: **NAL** — for integers, and **FAL** — for real numbers.

The function *NAL* (*MIN*, *MAX*, *INCR*) returns pseudoaleatory integers $NAL = MIN + K * INCR$, with $K = 0, 1, 2, \ldots, [(MAX - MIN)/INCR]$. (see Appendix 2). The function *FAL* is simply *FLOAT* (*NAL*).

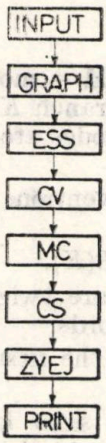


Fig. 1

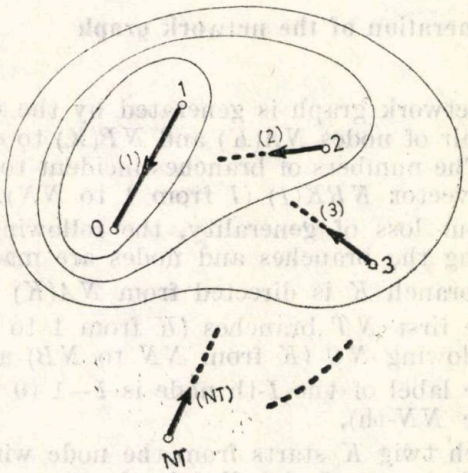


Fig. 2

4. The input module

The input data specified by the user, and read by the INPUT module are:

- job — size parameters:
  - *NG* — number of groups (sets of problems),
  - *NS* — number of students in a group (problems in a set),
  - *NF* — faculty index (optional),
- topologic parameters:
  - *MNB* — minimum number of branches,
  - *NN* — number of nodes,
  - *NMC* — number of magnetic couplings (mutual inductances),
  - *INCS* — imposed number of controlled sources,
  - *MNRK* — minimum allowed node rank,
- limit values and increments:
  - *MC*, *MV*, *MZ*, *MY*, *MP* — maximum absolute values for the real and imaginary parts of the currents, voltages,

impedances, admittances and homogeneous controlled source parameters,

MCI, *MVI*, *MZI*, *MYI*, *MPI* – the increments (i.e. the minimum allowed differences) in the values of the above specified variables and parameters.

All these numbers are integers. This avoids problems solving to become cumbersome. If fractional values are desired an adequate scaling has to be used.

The **INPUT** module also computes the necessary number of twigs $NT = NN - 1$ and the minimum required number of chords $MNC = MNB - NT$.

5. Generation of the network graph

The network graph is generated by the **GRAPH** – module by assigning a pair of nodes $NA(K)$ and $NB(K)$ to each branch K (K from 1 to NBR). The numbers of branches incident to the nodes are stored in a node rank vector $NRK(I)$ (I from 1 to NN).

Without loss of generality, the following conventions in labeling and directing the branches and nodes are made:

- a branch K is directed from $NA(K)$ to $NB(K)$,
- the first NT branches (K from 1 to NT) are twigs, and the following NC (K from NN to NB) are chords,
- the label of the I-th node is $I-1$ (0 – for the first, NT – for the NN-th),
- each twig K starts from the node with the same label K, and ends in a node labelled in the range $[0, K-1]$ (Fig.2).

Using the above conventions, the node lists of the twigs results immediately:

```
seq
    for K ← 1 to NT do NA(K) ← K;

    NB(1) ← 0;

    for K ← 2 to NT do NB(K) ← NAL(0, K−1, 1);
end
```

After defining the tree, the graph is completed with chords (K from NN to NBR), until the actual minimum node rank NS, and the actual number of branches NBR equal or exceed the respective imposed minima ($NS \geqslant MNRK$, $NBR \geqslant MNB$).

The end node $NB(K)$ of a chord K is the first node of minimum rank NS (NS from 1 up) found by scanning the node rank vector $NRK(I)$ in reverse order (I from NN to 1). The start node $NA(K)$ of the chord K is any node except $NB(K)$.

```
seq
    NBR ← NN
    NS ← 1
    do until NS ⩾ MNRK and NBR ⩾ MNB;
             I ← NN;
             do until I = 0;
                if NRK(I) = NS
                  then NB(NBR) ← I;
                       NRK(I) ← NRK(I) + 1;
                       K ← NAL(0, NT, 1);
                       if K = I
                          then K ← |K − 1|;
                       end
                       NA(NBR) ← K;
                       NRK(K) ← NRK(K) + 1;
                       NBR ← NBR + 1;
                  end
             end
             NS = NS + 1;
    end
end
```

This procedure ends when

$$((NS = MNRK) \wedge (NB \geqslant MNB)) \vee ((NS \geqslant MNRK) \wedge (NBR = MNB)).$$

The actual number of branches NBR of the generated network exceeds MNB, if $MNB < NN * MNRK/2$.

The actual number of chords is $NC = NBR - NT \geqslant MNC$.

If $MNRK > 2$ the graph does not contain branches connected in series. In most cases the obtained graph is strongly connected.

6. Essential incidence matrix

While generating the node lists $NA(K)$ and $NB(K)$, the **GRAPH**-module establishes at the same time the reduced node — chord incidence matrix **L** (of dimensions $NN \times NC$).

The node labeled „0" is chosen as reference node.

In the initially nulled matrix **L**, the following entries are fed in:

$$L(I, K) = \begin{cases} 1, \text{ if } NA(K + NT) = I; \\ -1, \text{ if } NB(K + NT) = I. \end{cases}$$

The node — chord incidence matrix is turned into the essential incidence matrix (i.e. the twig — chord incidence matrix) by the **ESS** — module. Due to the special way the twig nodes have been chosen, a simple procedure can be used. The note list $NB(J)$ of the twigs is scanned in reverse order (J from NT to 1) and, if $I = NB(J) \neq 0$, the J-th line of the matrix **L** is added to its I-th line (see Appendix 3).

7. Branch currents and voltages

The branch currents and voltages are the answers of the analysis problem, but — when generating a problem — it is more convenient to choose their values in advance.

First, the twing voltages and the chord currents are independently chosen in the corresponding allowed ranges:

for $K \leftarrow 1$ **to** NT **do**
$VLT(K) \leftarrow CMPLX(FAL(-MV,\ MV,\ MVI),\ FAL(-MV,\ MV,\ MVI))$;

for $K \leftarrow NN$ **to** NBR **do**

$CRT(K) \leftarrow CMPLX(FAL(-MC,\ MC,\ MCI),\ FAL(-MC,\ MC,\ MCI))$.

Then, the chord voltages and twig currents are computed using Kirchhoff's theorems:

for $K \leftarrow NN$ **to** NBR **do**

$$VLT(K) \leftarrow \sum_{J=1}^{NT} L(J, K - NT) * VLT(J);$$

for $K \leftarrow 1$ **to** NT **do**

$$CRT(K) \leftarrow \left(- \sum_{J=NN}^{NB} L(K, J - NT) * CRT(J) \right).$$

Because the entries of **L** are only 0 and $\pm$ 1, the above expressions are evaluated by carrying out only additions and subtractions.

8. Magnetic couplings

If magnetic couplings are required ($NMC > 0$), the program calls the **MC** — module.

Mutual inductances are introduced between twigs by performing the following operations:

seq
for $I \leftarrow 1$ **to** NMC **do**
* {establish the list of magnetically coupled twigs}
$LCM(I) \leftarrow J = NAL(1,\ NT,\ 1)$;
$LCM(2*I) \leftarrow K = NAL(1,\ NT,\ 1)$;
* {choose the mutual impedances}
$ZM(I) \leftarrow CMPLX\ (0,\ FAL(-MZ,\ MZ,\ MZI))$;
* {modify the initially nulled branch source vector — see Appendix 1}
$S(J) \leftarrow S(J) + ZM(I) * CRT(K)$;
$S(K) \leftarrow S(K) + ZM(I) * CRT(J)$;
end

The mutual reactances are either negative or positive, in order to take into account the two possible orientations of the currents flowing through the coupled coils, with respect to the reference coil terminals.

9. Controlled sources

If $INCS > 0$, the **CS** – module is called, and the following steps are accomplished for each required controlled source (I from 1 to $INCS$):

– establish the input branch
$IBL(I) \leftarrow K = NAL(1, NL, 1)$;
– choose the value of the controlled source parameter
$PAR(I) \leftarrow CMPLX(FAL(-MP, MP, MPI),$
$FAL(-MP, MP, MPI))$;
– choose the source type, the adequate parameter symbol and unit, by randomly assigning the value of the selection parameter
$M \leftarrow NAL(1, 4, 1)$:

M	$ITCS(I)$	$IPAR(I)$	$IUNIT(I)$
1	$E(I)$	Z	OHMS
2	$J(U)$	Y	SIEM
3	$E(U)$	A	blanks
4	$J(I)$	B	blanks

– choose the branch L containing the controlled source, and store its label in the $LCS(I)$ vector;
– modify the branch source vector:

if $M = 1$ or 4
then $S(L) \leftarrow S(L) - PAR(I) * VLT(K)$
else $S(L) \leftarrow S(L) - PAR(I) * CRT(K)$.

The voltage sources ($M = 1$ or 3) are introduced in the twigs, and the current sources ($M = 2$ or 4) in the chords. In order to avoid the generation of unbalanced networks, no branch is allowed to contain more than one controlled source. Thus, a list of available branches $LAB(J)$ is necessary. At the beginning, $LAB(J)$ contains all the branches:

$$LAB(J) \leftarrow J,\ J \text{ from 1 to } NBR;$$

and the numbers of available twigs and branches are $NAT \leftarrow NT$ and $NAB \leftarrow NBR$, respectively.

$$L \leftarrow LAB(J);$$

$$LCS(I) \leftarrow L;$$

the J-th available branch is randomly chosen:

```
if M = 1 or 3
   then J ← NAL(1, NAT, 1);
        LAB(J) ← LAB(NAT);
        NAT ← NAT − 1
   else J ← NAL(NN, NAB, 1);
        LAB(J) ← LAB(NAB);
        NAB ← NAB − 1.
```

Consequently, the list of available branches is shortened. After NAT becomes 0, no other controlled voltage sources are introduced in the twigs and, after $NAB = NT$, no other controlled current sources are introduced in the chords. Thus, the actual number of controlled sources NCS may sometimes be lower than $INCS$.

10. Branch imittances and independent sources

The **ZYEJ** – module establishes twig impedances and chord admittances:

```
if K ⩽ NT
   than IMIT(K) ← CMPLX(FAL(−MZ, MZ, MZI),
   FAL(−MZ, MZ, MZI))
   else IMIT(K) ← CMPLX(FAL(−MY, MY, MYI),
        FAL(−MY, MY, MYI))
```

The same module computes the final values of the branch source vector $S(K)$:

```
if K ⩽ NT
   than S(K) ← S(K) + IMIT(K) * CRT(K) − VLT(K);
   else S(K) ← S(K) − IMIT(K) * VLT(K) + CRT(K).
```

11. Results

The algorithm has been implemented as a **FORTRAN** program, which has been run on **FELIX 256–512** computers. Many sets of problems have been generated, both for d.c. and a.c. circuit analysis. The problems have been used for class and individual work, for testing and examinations. The program has proved a valuable teaching aid. Both the computer time and memory requirements are fairly simple and easy to meet. The user specifications consist of only two punch cards.

Figure 3 shows the text of an a.c. problem generated for $MNB = 8$, $NN = 5$, $NMC = 1$, $INCS = 2$, $MNRK = 2$, $MC = 5$, $MCI = 1$, $MV = 10$, $MVI = 2$, $MZ = MY = MP = 4$, $MZI = MYI = MPI = 1$.

GRUPA 322

BILETUL 28

****

LATURA	NODUL INITIAL	NODUL FINAL	IMITANTA	SURSA INDEP.
RAMURI	NA	NB	Z(OHMI)	E(VOLTI)
1	1	0	4+J(4)	-6+J(46)
2	2	0	4+J(0)	22+J(-24)
3	3	0	0+J(-4)	-26+J(-2)
4	4	1	4+J(2)	2+J(28)
CUPLE			Y(SIEMENS)	J(AMPERI)
5	1	4	4+J(-3)	3+J(52)
6	2	3	1+J(4)	68+J(26)
7	2	4	2+J(-2)	-22+J(9)
8	0	3	0+J(1)	12+J(-3)

LATURI CUPLATE INDUCTIV	IMPEDANTA MUTUALA(OHMI)
4 3	0+J 2

SURSE COMANDATE

TIPUL SURSEI	LATURA IESTRE	LATURA INTRARE	PARAMETRUL SURSEI
J(I)	6	8	B(6, 8)= -2+J(-1)
E(U)	1	1	A(1, 1)= 2+J(1)

GRUPA 322

BILETUL 28

****

LATURA	TENSIUNEA LA BORNE	CURENTUL
RAMURI	U(VOLTI)	I(AMPERI)
1	-10+J(-8)	-2+J(5)
2	-10+J(4)	3+J(-5)
3	0+J(-8)	3+J(-3)
4	-6+J(8)	1+J(7)
CUPLE		
5	6+J(-8)	3+J(2)
6	-10+J(12)	-1+J(0)
7	6+J(4)	-2+J(5)
8	0+J(8)	4+J(-3)

Fig. 3

Appendix 1. Branch characteristics

The algorithm uses the branch characteristics written in the form :

$$\mathbf{U_t} = \mathbf{Z_t}\,\mathbf{I_t} - \mathbf{E_t}, \tag{1}$$

$$\mathbf{I_c} = \mathbf{Y_c}\,\mathbf{U_c} + \mathbf{J_c}, \tag{2}$$

where $\mathbf{Z_t}$ and $\mathbf{Y_c}$ are the diagonal imittance matrices of the branches (twig impedances and chord admittances),

$\mathbf{E_t}$ — the equivalent twig e.m.f.s., and
$\mathbf{J_c}$ — the equivalent chord shortcircuit currents.

The equivalent twig e.m.f.s. are :

$$\mathbf{E_t} = -\mathbf{Z_m}\mathbf{I_m} + \mathbf{ZI_z} + \mathbf{AU_A} + \mathbf{E}, \tag{3}$$

where : $\mathbf{Z_m}$ are the magnetic coupling mutual impedances,
$\mathbf{Z}$ — transfer impedances of $E(I)$ — sources,
$\mathbf{A}$ — voltage gains of $E(U)$ — sources,
$\mathbf{E}$ — e.m.f.s. of independent voltage sources,
$\mathbf{I_m}$ — the current in the coupled coils, subset of the twig currents $\mathbf{I_t}$,
$\mathbf{I_z}$ — control (input) currents of $E(I)$ — sources, subset of the branch currents $\mathbf{I} = (\mathbf{I_t}\ ,\ \mathbf{I_c}\ )^T$,
$\mathbf{U_A}$ — control (input) voltages of $E(U)$ — sources, subset of the branch voltages $\mathbf{U} = (\mathbf{U_t}\ ,\ \mathbf{U_c}\ )^T$.

The equivalent chord short circuit currents are :

$$\mathbf{J_c} = \mathbf{YU_Y} + \mathbf{BI_B} + \mathbf{J}, \tag{4}$$

where : $\mathbf{Y}$ — transfer admittances of $J(U)$ — sources,
$\mathbf{B}$ — current gains of $J(I)$ — sources,
$\mathbf{J}$ — shortcircuit currents of independent current sources,
$\mathbf{U_Y}$ and $\mathbf{I_B}$ — input voltages and currents of $J(U)$ and $J(I)$ sources, subsets of branch voltages and currents.

The above characteristics correspond to networks having magnetic couplings and controlled voltage sources only in the twigs, and controlled current sources only in the chords This restriction does not limit the complexity and variety of generated circuits, but greatly simplifies the circuit generation and allows all the parameters and variables to be chosen from desired ranges.

The algorithm establishes the values of all terms in equations (1) — (4), except the independent source parameters, which result as :

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z_t}\,\mathbf{I_t} - \mathbf{U_t} + \mathbf{Z_m}\mathbf{I_m} - \mathbf{ZI_z} - \mathbf{AU_A}, \tag{5}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{I_c} - \mathbf{Y_c}\,\mathbf{U_c} - \mathbf{YU_Y} - \mathbf{BI_B}. \tag{6}$$

These parameters are stored in the branch source vector

$$S(K) = \begin{cases} E(K),\ K \text{ from } 1 \text{ to } NT; \\ J(K),\ K \text{ from } NN \text{ to } NBR, \end{cases}$$

and are sequentially computed by the modules **MC**, **CS**, and **ZYEJ**.

Appendix 2. Random number generator

The following **FORTRAN** function may be used to generate the necessary pseudoaleatory number sequences. Usually the control parameters are set to $N = 3$, $IT \in [1, 100]$.

```
FUNCTION NAL(MIN, MAX, INCR)
COMMON /D1/ IT, N
A = SQRT(FLOAT(IT))
K = A
K = 1000. *A - 1000 * K
K = K - K/N * N
    IT = IT + K
    A = FLOAT(IT)
    S = ABS(SIN(A))
    C = ABS(COS(A))
    IF(C.LT..001) C = .001
    M = (MAX - MIN)/INCR + 1
    J = .637 * ATAN2(S, C) * FLOAT(M)
    NAL = MIN + J * INCR
    RETURN
END
```

The procedure consists of two sections in order to obtain a more uniform distribution of the generated numbers over the range $[MIN, MAX]$. The value MAX is returned only if $(MAX - MIN) \vdots INCR$.

Appendix 3. Establishing the essential incidence matrix from the node — chord incidence matrix

The reduced node — branch incidence matrix can be partitioned as:

$$\mathbf{C}_{nb} = [\mathbf{C}_{nt} | \mathbf{C}_{nc}], \tag{1}$$

where $\mathbf{C}_{nt}$ is the node — twig incidence matrix,

$\mathbf{C}_{nc}$ — the node — chord incidence matrix.

It is well known that $\mathbf{C}_{nb}$ becomes the fundamental cutset incidence matrix, when $\mathbf{C}_{nt}$ is turned into the unit matrix by appropriate line additions:

$$\mathbf{C}_{tb} = [\mathbf{1}_t | \mathbf{\Lambda}], \tag{2}$$

where $\mathbf{\Lambda}$ is the essential incidence matrix.

Because $NA(J) = J$ and $I = NB(J) < J$, for J from 1 to NT (see §5), the $\mathbf{C}_{nt}$ matrix (which is not actually established by the program) is upper triangular, with all diagonal entries $+1$, and no more that one entry (-1) in each column J (in the line I). To eliminate such a (-1) entry, the line J must be added to the line I. To avoid the introduction of other (-1) entries in the line I, the line J must be cleared of any such entries prior to its adding to the line I. This is ensured by performing the line additions, starting from the last line in $\mathbf{C}_{nb}$ and going up (J from NT to 1). The procedure presented in §5 can be implemented as the following **FORTRAN** subroutine:

```
SUBROUTINE ESS
COMMON /D2/ NN, NT, NB(30), L(10, 20)
      NN1 = NN + 1
      DO 1 JJ = 2, NT
          J = NN1 - JJ
          I = NB(J)
              IF(I.EQ.0) GO TO 1
              DO 2 K = 1, NC
                  L(I, K) = L(I, K) + L(J, K)
2             CONTINUE
1       CONTINUE
RETURN
END
```

REFERENCES

1. *Cristea, P.* Rev. Roum. Sci. Techn. Electr. et Energ., *17* (1972), 2, p.p. 241—250.
2. *Cristea, P.*, E.E.A., Electrotehnica, *23*, (1975), 4, p.p. 145—155.
3. *Cristea,* P. Rev. Roum. Sci. Tech.-Electr. et Energ., *20* (1975), 2, p.p. 161—173.
4. *Preda, M., Cristea, P., Tuduce, R.*, E. E. A., Electrotehnica, *28*, (1980), 5, p.p. 211—220.
5. *Cristea, P., Tuduce, R.*, Symbolic and Numeric Hybrid Analysis — A Topologic Formulation, 4th Int. Conf. on Control Systems and Computer Science, 17—20 June 1981, Bucharest, vol. I, p.p. 30—34.
6. *Preda, M., Cristea, P., Spinei, F.*, Bazele electrotehnicii, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
7. *Preda, M., Cristea, P., Dorobanțu I.*, Analiza topologică a circuitelor electrice, Editura Tehnică, București- 1979.

ACKNOWLEDGEMENTS:

The authors would like to thank Monica Ionescu and Doina Nicolae for their help in the manuscript preparation, and A. Bălașa for writing a FORTRAN program implementation of the d.c. problem generation algorithm.

Generarea asistată de calculator a problemelor de analiza a circuitelor electrice în regim permanent

În lucrare este prezentat un algoritm pentru generarea cu calculatorul a problemelor de curent continuu și de curent alternativ. Circuitele au structuri topologice diferite, valori diferite ale parametrilor elementelor de circuit, însă complexități similare. Problemele sînt imprimate sub forma unor bilete și sînt acompaniate de răspunsuri. Programul a fost utilizat pentru generarea unor subiecte de examen și teme de casă, precum și pentru activitatea de seminar, astfel încît fiecărui student să îi revină o problemă distinctă.

C.Z.: 621.315 :538.12

REGIMUL TRANZITORIU INIȚIAL AL CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR PRODUS DE UN SISTEM DE CONDUCTOARE PARALELE

CHRISTIANA POPEEA *

În această lucrare se stabilesc ecuațiile satisfăcute în regim tranzitoriu inițial (adică pentru timpi mici) de cîmpul electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele parcurse de curenți de aducție variabili în timp. Totodată, se ilustrează pe un exemplu concret posibilitatea obținerii printr-o metodă sistematică a expresiilor asimptotice ale imitanțelor operaționale corespunzătoare descrierii de multipol a sistemului considerat.

1. Introducere

Problema calculului cîmpului electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele în regim inițial (adică pentru timpi mici) este legată atît de problema caracterizării regimului tranzitoriu la borne, considerată [1], [2], cît și de problema caracterizării regimului armonic de înaltă frecvență (efect pelicular net), [3].

Utilizînd ecuațiile generale stabilite în [4], în lucrare se obțin ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar în regim inițial considerînd că în acest regim repartiția cîmpului în conductoare este strict superficială, [1], [2]. Folosim metoda operațională (prin care valorilor mici ale timpului le corespund valori $|s| \to \infty$) și caracterizăm condițiile de trecere pe suprafețele conductoarelor cu ajutorul impedanței de undă a semispațiului conductor [3]. Se obține astfel o problemă la limită mixtă cu condiții de speța a III-a pe suprafața conductoarelor, a cărei soluție ține seama atît de efectele de inducție în domeniul izolant exterior cît și de pătrunderea superficială a cîmpului în conductoare. Expunerea este ilustrată printr-un exemplu menit să facă evidente afirmațiile de mai sus.

2. Ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar în regim inițial

Considerăm un sistem de conductoare paralele parcurse de curenții de aducție variabili în timp $i_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots m$. Utilizînd ipotezele și notațiile din [4], componenta axială solenoidală (de inducție) E_0 a cîmi-

Manuscris primit la data de 21 iunie 1982
* Șef lucrări dr. ing., Catedra Electrotehnică

pului electric din domeniul izolant D_0, exterior conductoarelor, satisface ecuaţia:

$$\Delta E_0 = 0 \tag{1}$$

unde $\Delta = \Delta_{x,y}$ reprezintă laplacianul exprimat în coordonatele carteziene (x, y) din secţiunea transversală. Pe suprafaţa S_0 a ecranului perfect conductor care separă sistemul considerat de exterior este satisfăcută condiţia la limită

$$E_0/S_0 = 0 \tag{2}$$

De asemenea, pe suprafeţele S_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ ale conductoarelor sînt satisfăcute condiţiile de trecere continuă ale componentelor tangenţiale ale cîmpurilor electric şi magnetic, mai precis avem

$$\begin{cases} E_z/S_k = E_0/S_k + u_k(s) \\ \dfrac{1}{\mu_k s}\dfrac{\partial E_z}{\partial n}\Big/_{S_k} = \dfrac{1}{\mu_0 s}\dfrac{\partial E_0}{\partial n}\Big/_{S_k} \end{cases} \tag{3}$$

unde E_z este cîmpul electric total interior din conductorul k, $u_k(s)$ reprezintă căderea de potenţial pe unitatea de lungime evaluată pe suprafaţa laterală S_k, iar n reprezintă versorul normalei la S_k orientat de la conductor spre izolant. (Ecuaţiile (1), (2) şi (3) de mai sus corespund ecuaţiilor (13), (17) şi (18) stabilite în [4].

Observăm că în (3) expresia

$$H_t \overset{\Delta}{=} \frac{1}{\mu_k s}\frac{\partial E_z}{\partial n}\Big/_{S_k}. \tag{4a}$$

reprezintă componenta tangenţială a cîmpului magnetic interior pe suprafaţa conductorului k. Pe de altă parte, în regimul iniţial repartiţia cîmpului electromagnetic în interiorul fiecărui conductor poate fi considerată strict superficială, [1], [2]. Aceasta înseamnă că în fiecare punct de netezime al suprafeţei sale laterale S_k, conductorul k poate fi asimilat (indiferent de forma sa geometrică concretă) cu un semispaţiu conductor [3], şi prin urmare caracterizat prin intermediul impedanţei de undă

$$\frac{E_z}{H_t}\Big/_{S_k} = \zeta_k(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\mu_k s}{\sqrt{\sigma_k \mu_k s}} \tag{4b}$$

Făcînd raportul membru cu membru al relaţiilor de trecere (3) şi utilizînd (4a), (4b) obţinem

$$p_k(s)\frac{\partial E_0}{\partial n} - E_0/S_k = u_k(s),\ k = 1, 2, \ldots, m \tag{5}$$

unde am notat

$$p_k(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\zeta_k(s)}{\mu_0 s} = \frac{\mu_k/\mu_0}{\sqrt{\sigma_k \mu_k s}}$$

Observăm că datorită ipotezei (4b) cîmpurile exterior și interior s-au separat complet, în particular relația (5) nu conține cîmpurile interioare E_z sau H_t.

Prin urmare, cîmpul electromagnetic cvasistaționar al sistemului de conductoare paralele este complet determinat în regim inițial (pentru timpi mici, deci pentru $|s| \to \infty$) de soluția unică E_0 a problemei la limite mixte (2), (5) pentru ecuația Laplace (1) considerată în domeniul D_0 exterior conductoarelor. În particular, curentul $i_k(s)$ care străbate axial conductorul k este determinat conform legii circuitului magnetic prin relația

$$(6) \qquad i_k(S) = \oint_{S_k} H_t \, dr = \frac{1}{\mu_0 S} \oint_{S_k} \frac{\partial E_0}{\partial n} dr$$

unde dr este elementul de arc pe S_k.

Observăm că, rezolvînd problema de cîmp (1), (2), (5) în care căderile de potențial $u_k(s)$ se presupun date, și introducînd soluția sa E_0 în (6), se obțin m relații liniare de forma

$$(7) \qquad i_k(s) = \sum_{l=1}^{m} Y_{kp}(s) \, \mu_p(s), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

în care $Y_{kl}(s)$ reprezintă expresiile asimptotice (pentru $|s| \to \infty$) ale admitanțelor operaționale (pe unitatea de lungime) asociate descrierii de multipol a sistemului de conductoare considerat.

Dacă în (5) considerăm că $p_k(s) \to 0$ atunci problema (1), (2) (5) este echivalentă cu o problemă clasică de electrostatică în care E_0 joacă rolul potențialului electrostatic, iar $si_k(s)$ din (6) este analog sarcinii acumulate pe suprafața conductorului k considerat la potențialul $u_k(s)$ față de potențialul de referință $u_0(s) = 0$ al ecranului. În acest caz, în relațiile (7) scrise sub forma

$$(8) \qquad u_k(s) = \sum_{l=1}^{m} Z_{kl}(s) i_l(s), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

vom avea $Z_{kl}(s) = sL_{kl}$, unde L_{kl} $k, l = 1, 2, \ldots, m$ reprezintă inductivitățile exterioare (proprii și mutuale) ale conductoarelor sistemului.

Subliniem că condiția la limită de speța a III-a (5) ține seama atît de efectele de inducție exterioare cît și de pătrunderea superficială a cîmpului electromagnetic în conductoare, astfel încît, problema (1), (2), (5) necesită metode specifice de rezolvare.

3. Cîmpul electromagnetic cvasistaționar în regim inițial al unui conductor cilindric circular

Considerăm un conductor cilindric circular de rază a, permeabilitate μ și conductivitate σ parcurs de curentul $i(s)$. (Eliminăm peste tot indicele $k = 1$). Presupunem că acest conductor este separat de mediul

exterior printr-un ecran cilindric circular concentric de rază $b > a$. Utilizînd coordonatele polare (r, φ) în secțiunea transversală și ținînd seama de simetria centrală a problemei, ecuațiile (1), (2), (5) devin respectiv

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_0}{\partial r}\right) = 0 \tag{9}$$

$$E_0\Big|_{r=b} = 0 \tag{10}$$

$$p(s)\frac{\partial E_0}{\partial r} - E_0\Big|_{r=a} = \mathrm{u}(s) \tag{11}$$

unde

$$p(s) = \frac{\mu/\mu_0}{\sqrt{\sigma\mu s}}$$

Din (9) și (10) rezultă

$$\frac{\partial E_0}{\partial r} = \frac{C}{r}, \quad E_0 = C \ln\frac{r}{b} \tag{12}$$

unde constanta C se determină din (11)

$$C = \frac{\mu(s)}{\dfrac{p(s)}{a} + \ln\dfrac{b}{a}} \tag{13}$$

Utilizînd (6) avem

$$i(s) = \frac{1}{\mu_0 s}\int_0^{2\pi}\frac{\partial E_0}{\partial r}\Big|_{r=a} a\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi C}{\mu_0 s} \tag{14}$$

deci, în acord cu (8), din (14) și (14) rezultă

$$\mu(s) = Z(s)\, i(s) \tag{15}$$

unde

$$Z(s) = \frac{\mu_0 s}{2\pi}\left(\frac{p(s)}{a} + \ln\frac{b}{a}\right) \tag{16}$$

În cazul $p(s) \to 0$ avem $Z(s) = sL$, unde inductivitatea exterioară L este [1]

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

iar pentru $b = a$ din (16) obținem expresia asimptotică valabilă pentru $|s| \to \infty$ a impedanței conductorului cilindric central. Punînd în evidență rezistența sa de curent continuu

$$R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$$

și introducînd constantele de timp interioară $\tau = \sigma\mu a^2$ și exterioară $T = \frac{L}{R}$ putem scrie

$$\frac{Z(s)}{R} = \frac{\sqrt{\tau s}}{2} + Ts \tag{17}$$

Utilizînd relațiile (15) și (17) putem calcula expresia asimptotică (valabilă pentru timpi mici, adică pentru $t < \tau$) a conductanței tranzitorii $g(t)$ [1], care reprezintă răspunsul în curent al sistemului considerat la o treaptă de tensiune $u(s) = 1/s$. Introducînd parametrul adimensional $k = \tau/2T$ precum și timpul normat $\theta = t/\tau$ avem

$$Rg(t) \overset{\Delta}{=} L^{-1} \frac{2k}{\tau s + k\sqrt{\tau s}} \cdot \frac{1}{s} = \tag{18}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\theta} - 2 \frac{1 - e^{k^2\theta}\, Erfc\,(k\sqrt{\theta})}{k} \Bigg|_{\theta = \frac{t}{\tau}}$$

în care notațiile sînt cele uzuale [5] p. 120 și [6] p. 211. Pentru $k \to \infty$ al doilea termen se anulează, iar pentru $k \to 0$ (deci $\tau \to 0$) utilizînd dezvoltarea în serie a funcției *Erfc* regăsim expresia asimptotică dată în [1], p. 62 care ține seama numai de inductivitatea exterioară a sistemului.

Pe de altă parte, punînd în (17), $T = 0$ și $s = j\omega$ obținem expresia cunoscută a factorului de creștere a impedanței conductorului în cazul efectului pelicular net [3].

$$\frac{Z(j\omega)}{R}\Bigg|_{T=0} = \frac{\sqrt{j\omega\mu\tau}\, a}{2} = (1+j)\frac{a}{2\delta}$$

unde $\delta = (2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$ reprezintă adîncimea de pătrundere. De asemenea, utilizînd (12) și (13) putem calcula vectorul Poynting pe suprafața conductorului, deci puterile activă și reactivă absorbite de acesta pe unitatea de suprafață în funcție de căderea de potențial aplicată.

4. Concluzii

În lucrare se stabilesc ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele în regim inițial (pentru timpi mici) ținînd seama atît de efectele de inducție exterioare cît și de pătrunderea superficială a cîmpului în conductoare. Rezultatele obținute

sînt utile avînd în vedere nu numai caracterizarea regimului tranzitoriu la borne al sistemului considerat pentru timpi mici ci și caracterizarea sistemului în regim de efect pelicular net.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Rădulet, Al. Timotin, A. Țugulea*, St. cerc. energ. electr. Vol. 16, Nr. 4, 1966
2. *A. Timotin*, Proprietăți asimptotice ale repartiției cîmpului electromagnetic cvasistaționar al elementelor inductive. (Compte rendu le 1.XI.1968 à la session scientifique de l'Institut polytechnique de Bucarest).
3. *C. I. Mocanu*, Teoria cîmpului electromagnetic EDP, 1981.
4. *Ch. Popeea*, Calculul cîmpului electromagnetic cvasistaționar al unui sistem de conductoare paralele (va apare în Bul. I.P.B.).
5. Handbook of Mathematical Functions, Ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series — 55, 1964.
6. *H. Bateman, A. Erdelyi*, Tables of Integral Transforms, vol. 1 Mc Graw-Hill Book Co, 1954.

Initial Transients of the Quasistationary Electromagnetic Field Generated by a System of Parallel Conductors

The paper deals with the equations describing the initial transients (i.e for small values of the time variable) of the quasistationary electromagnetic field generated by a system of parallel conductors carrying time-dependent currents. An illustrative example is used to present a systematic method of constructing assymptotic expressions for the operational immitances corresponding to the multiport description of the system under consideration.

C.Z.: 621.382

EFFECT OF SINTERING TREATMENT UPON THE BREAKDOWN CHARACTERISTICS OF PLANAR Al/n—Si SCHOTTKY DIODES

D. DASCĂLU, GH. BREZEANU, M. SUCIU, P. AL. DAN *

The breakdown characteristics of planar Al—Si Schottky diodes of various diameters and subjected to various post-metallization heat treatments were measured. The breakdown occurs at higher voltages for lower contact diameters and for samples treated at higher temperatures. The bulk breakdown voltage computed for 0.22 Ω cm n-type silicon was experimentally found for 10—25 μm planar contacts, provided with a large metal overlap on a 0.7 μm oxide and treated at 550°C. The improvement in breakdown characteristics and reproducibility may be due to metallurgical phenomena taking place during the heat treatment and/or to annealing of Si—SiO_2 interface states.

1. Introduction

Aluminium-silicon Schottky diodes with nearly ideal electrical characteristics were reported by Yu and Mead [1]. These are fabricated by allowing the metal to overlap the oxide and using a short post-metallization heat treatment. The metal overlap reduces the maximum field intensity in the semiconductor, at the edge of the metallization window, as shown in Fig. 1 [2]. The field at a sharp metal corner (zero radius of curvature) should be always infinite (even for a Yu-Mead structure with a metal overlap) and will determine a zero breakdown voltage [2], [3]. The actual breakdown voltages are not zero due to the finite curvature radius of the metal-electrode edge, as resulting from the photolithographic process. These voltages are, however, unreproducible [2], [3] and the usual way to solve the problem is to avoid the contact between the metallic edge and the semiconductor. In the diffused guard-ring structure, for example, the equipotential surfaces change their shape since the high-conductivity guard-ring acts as an extension of the metal. Other structures may be also used to avoid soft and unreproducible breakdown characteristics: these were reviewed recently by Rusu *et al* [3].

The Yu-Mead structure is, of course, advantageous since:

— occupies less area in an integrated circuit;

— requires no supplementary steps in fabrication of discrete devices;

Manuscript received October 11, 1982

* Associate professor; Assistant, dr.; Student, Department of Electronics; Engineer, IPRS-Băneasa.

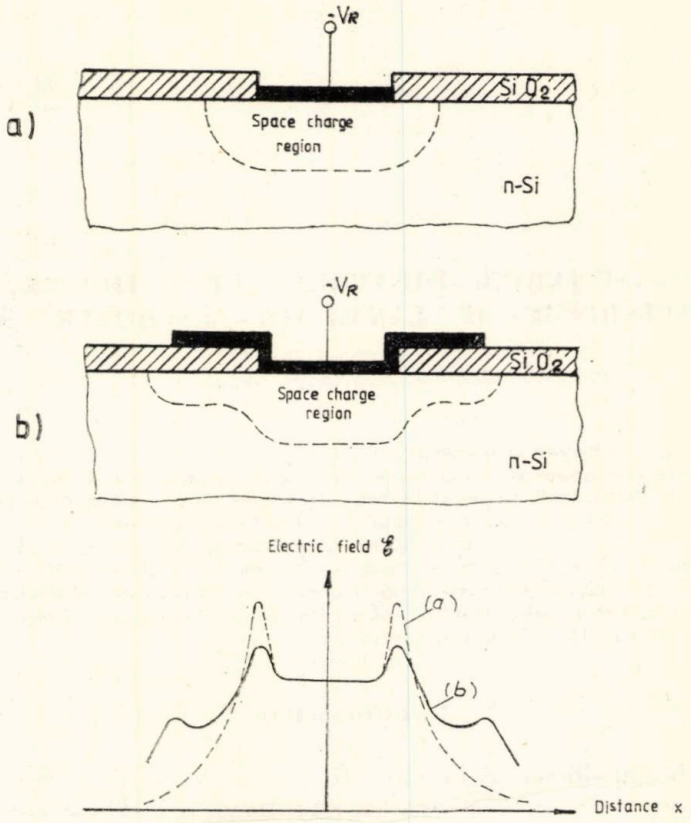


Fig. 1. Field intensity distribution at the semiconductor surface for two planar Schottky diodes with (b) and without (a) metal overlap (see Rusu *et al*, 1978).

— has no disadvantages associated with the „parasitic" peripheral diode.

In this paper we show that the reverse characteristics of the planar Al/n—Si Schottky diodes (with metal overlap) are strongly influenced by the post-metallization heat treatment. The Al—Si interaction and the annealing of the surface states at the Si—SiO_2 interface seem to be essential in determining the final characteristic.

2. Experimental

Special test structures with eight Al/n—Si Schottky contacts (diameters ranging from 10 to 250 μm) were fabricated in planar technology and encapsulated in plastic integrated circuit packages. A 1 μm thick Al film was evaporated on a 0.22 Ω cm epitaxial layer, (111) surface. Each contact has a 100 μm wide metallization pad. The oxide thickness is 0.7 μm. The heat treatment (sintering) takes place in nitrogen atmos-

phere, for 7 min. The sintering temperatures are $T_{sint} = 470°C$, 510°C and 550°C.

A SEM investigation of samples after Al was removed shows: a) an abrupt oxide step and b) more or less triangular pits on the (111) silicon surface, following Si dissolution in Al.

The electrical measurements were performed on a Tektronix curve tracer. A few samples from each wafer were tested. The reverse current was limited to 100 μA. At higher currents some beakdown characteristics exhibit a drift towards higher reverse voltages. However, the characteristics stabilize after a few minutes bias stress at room temperature. The electrical characteristics were found essentially the same after more than one year.

3. Electrical characteristics

The forward characteristics exhibit the exponential shape predicted by the thermionic emission theory. The ideality factor, n, is close to unity. The electron-energy barrier, determined from the $I_F - V_F$ characteristics increases, however, with increasing sintering temperature [4]. Such a result was first reported by Chino [5], and was attributed to the existence of an Al doped (p-type) surface layer occuring due to the heat treatment [6].

We note the importance of surface effects for lower diameter contacts. The lateral conduction increases the ideality factor and decreases the barrier evaluated from the $I_F - V_F$ characteristics. These effects become small for contacts with diameters of 150 μm and above [4].

The reverse characteristics are discussed below. Fig. 2 shows a $\log J_R - V_R$ plot for six contacts of various diameters on the same silicon structure (sintering at 510°C). The current density is an *average* value found by dividing the measured I_R to the nominal contact area (area of the metallization window). Note the fact that in certain cases smaller contacts (10—40 μm diameter) exhibit a higher current due to surface effects in planar metal /n—Si structures [7], which tend to dominate lower diameter contacts. A similar effect was found for forward biased structures. However, the breakdown voltage is *higher* for *lower* diameter contacts (see Fig. 2 for $D = 10 \ldots 40$ μm, at $J_R = 2$ Acm^{-2}, for example). Another anomalous result is the fact that larger diameter contacts ($D = 100$ and 150 μm) exhibit the largest current density. Their breakdown characteristic is soft, even at large current densities.

Fig. 3 shows $I_R - V_R$ characteristics of 150 μm contacts sintered at 470°C (open symbols) and 550°C. The higher sintering temperature should be preferred because it reduces the reverse current by up to three orders of magnitude and also (as far as Fig. 3 indicates) the disperssion of I_R at a given V_R. The reverse voltage (defined at $I_R = 100$ μA for example) is *higher* at *higher sintering temperatures*. The reverse characteristics are soft and exhibit a nonuniform shape.

The beneficent effect of sintering at higher temperatures may be seen from Fig. 4 which shows the improvement of breakdown characteristics for smaller contacts. The increase from 470 to 510°C reduces the

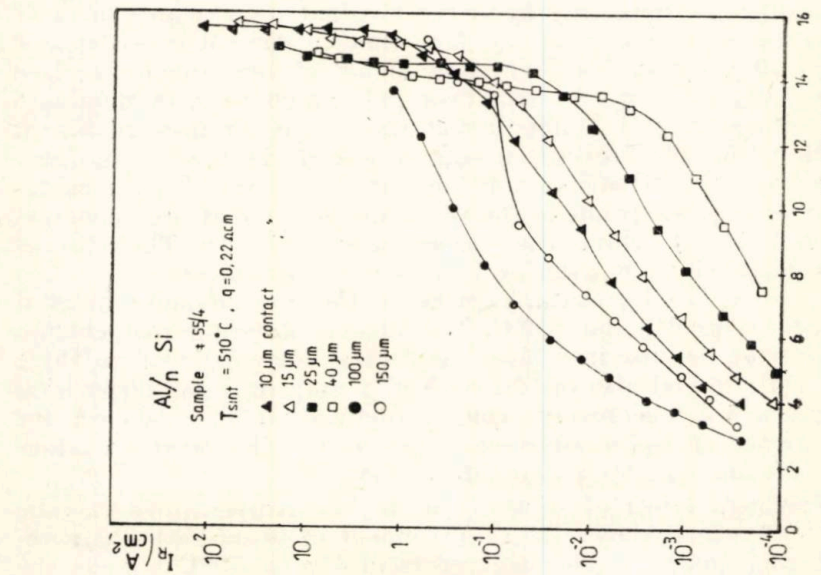


Fig. 2. Reverse characteristics of several circular contacts with different diameters, on the same semiconductor chip, sintered at 510°C. J_R is the average current density computed for the nominal contact area (i-e. area of the metallization window).

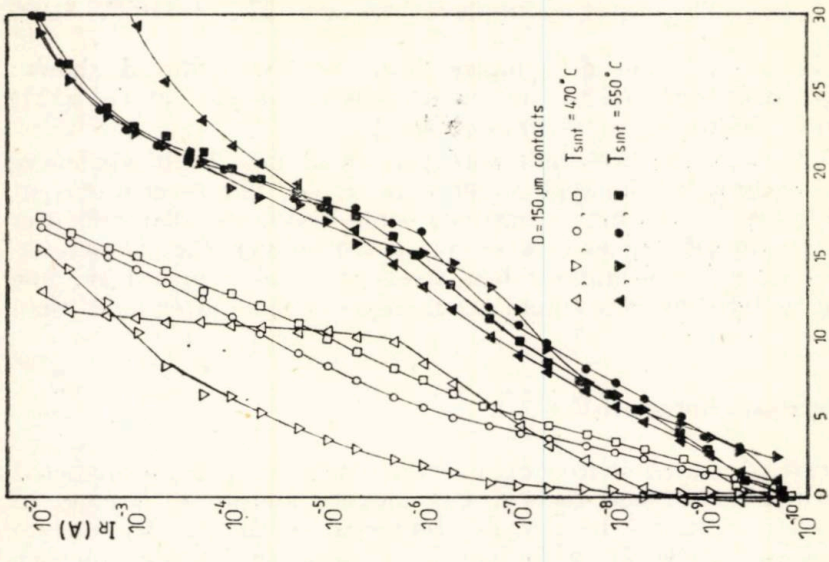
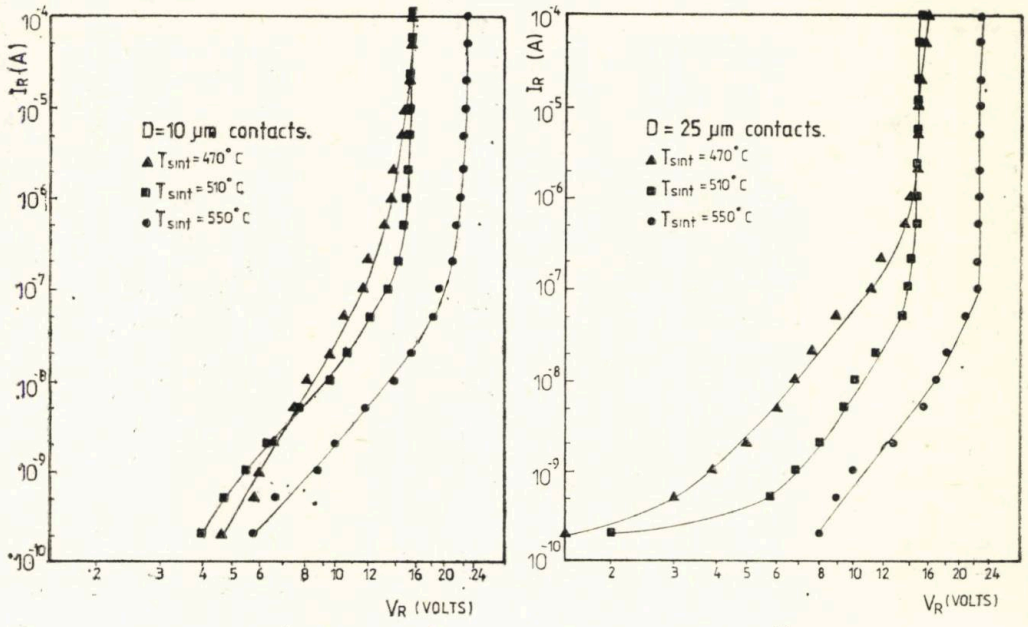


Fig. 3. A few reverse characteristics for 150 μm contacts sintered at 470°C and 550°C, respectively.



reverse current (moves the characteristic downward). At 550°C sintering the characteristic again was moved downward but was also shifted to the right: the breakdown voltage increased considerably.

The small contact diameters also exhibit a dispersion in breakdown characteristic, as shown in Fig. 5 (D= 25 μm). From this point of view, $T_{sint} = 510°C$ is better although a few contacts sintered at 550°C exhibit the highest breakdown voltage ($V_B = 20 \ldots 22$ V) and one of them has an extremely abrupt characteristic (Fig. 5.c).

Fig. 6 shows the breakdown voltage for all measured contacts. The number of samples was small and the reproducibility hardly can be appreciated. However, on average, the 550°C sintering temperature clearly yields the higher V_B. This value approaches that calculated for bulk breakdown at $\varrho \cong 0.22\ \Omega$ cm namely $V_B = 22$ V [8].

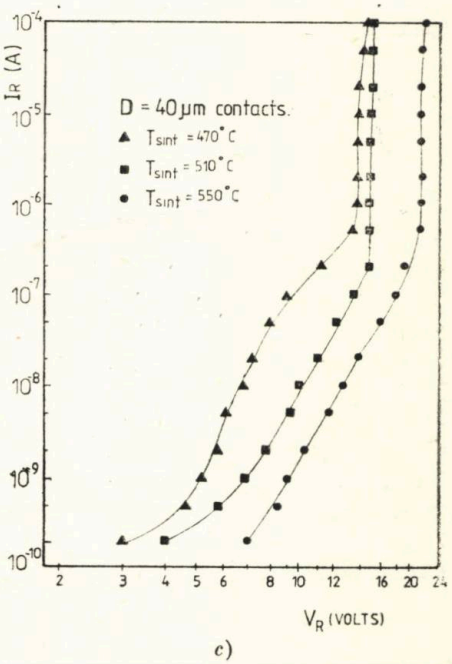
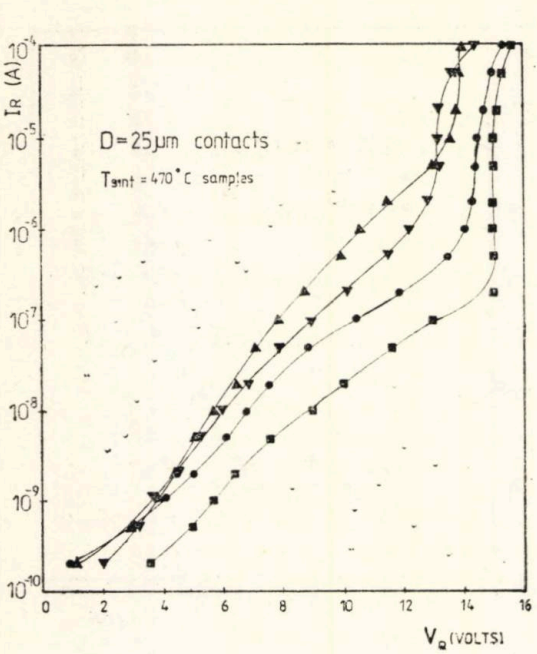
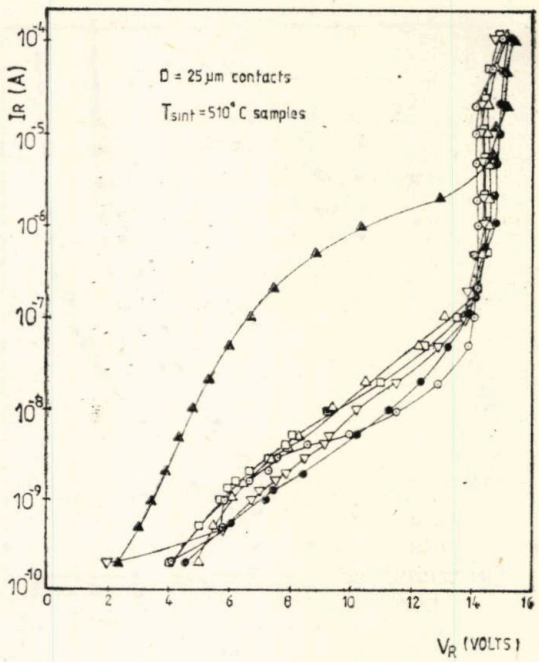


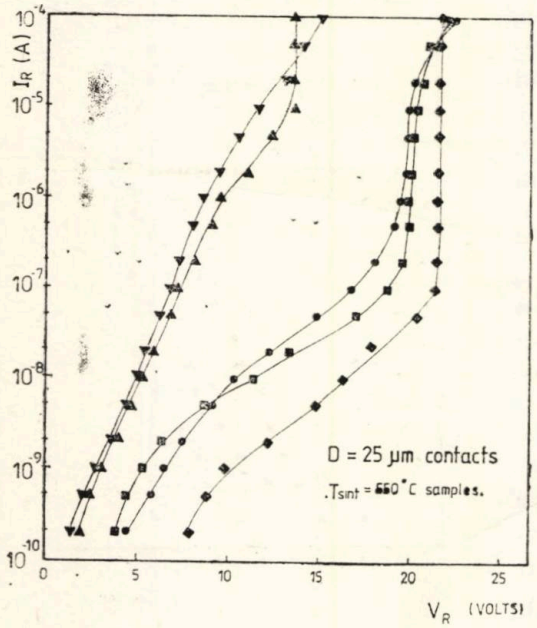
Fig. 4. Selected reverse characteristics of samples sintered at 470°C, 510°C and 550°C, respectively: a) 10 μm diameter contacts; b) 25 μm contacts; c) 40 μm contacts.



a)



b)



c)

Fig. 5. A few reverse characteristics of 25 μm contacts sintered at the following temperatures: a) 470°C, b) 510°C, c) 550°C.

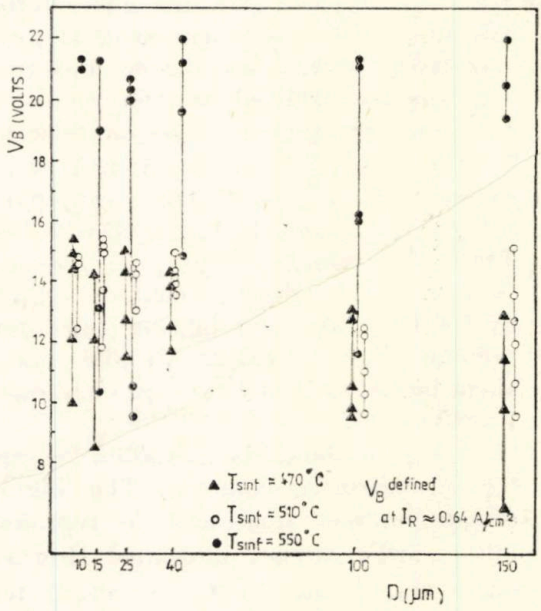


Fig. 6. Breakdown voltage of Al/n—Si Schottky diodes, defined at approximately the same average current density, for circular contacts of various diameters.

4. Discussion

The main results of the above investigation are:

— the reverse characteristic improves as the sintering temperature increases;

— the breakdown voltage is higher at 550°C sintering and even may reach the bulk value for lower contact diameters;

— the reproducibility from sample to sample is sometimes better at an intermediate temperature ($T_{sint} = 510°C$).

There exist a number of factors affecting the breakdown characteristic and they are discussed below.

First, poor reverse characteristics may by associated with surface effects at the contact periphery [7]. The improvement of these characteristics (Fig. 3 and 4) at higher sintering temperature may be due to a reduction in surface state density at the $Si—SiO_2$ interface [9]. This explanation is not, however, sufficient since (Fig. 2) the large diameter contacts (where the surface effects should be comparatively small) exhibit anomalously high leakage currents: these currents may be associated either with surface defects or with the field peak at the contact edge (Fg. 1). At a first glance, the effect of the metal overlap should be much more efficient for smaller contacts (10, 15, 25, 40 and 65 μm) since all are contacted with a 100 μm Al stripe. However, detailed calculations [2] have shown that the extent of the overlap is uniportant as far as it is several times larger than the thickness of the depletion layer which is here below 1 μm). Moreover, the effect of the metal overlap should be relatively small because the oxide is relatively thick (0.7 μm).

The exact shape of the *metallization corner* of a heat-treated planar contact should influence the breakdown characteristic, as Rusu *et al.* [2] pointed out. However, the actual configuration at the contact is that determined by the postmetallization heat-treatment. First, the very thin interfacial layer (10—20 Å) of SiO_2 is reduced [10] by Al at a rate which increases rapidly with the sintering temperature. The edge of the passivation oxide may be also influenced, especially if it is very sharp. Secondly, the silicon atoms dissolve in Al [10] and diffuse through tens or hundreds of micrometers. The actual Al—Si contact forms below the original interface [1]. The metal penetrates under the passivation oxide layer. This process should have a decisive effect upon the electrical phenomena at the contact edge and therefore upon the reverse characteristics.

The Al—Si interaction should be much stronger for the smaller contacts of our test structure, due to the much greater amount of Al available (per unit of contact area). We may speculate upon the effect of Si dissolution by assuming that the geometry of the *new* Al—Si interface approaches that of a diffused pn junction or, better, that of the moat-etched diode fabricated by Rhee *et al* [11]. The stronger the Si dissolution, the deeper the etching beneath the original interface and the higher the breakdown voltage. However, SEM (scanning electron microscope) micrographs of 0.22 Ω cm structures studied in this paper were taken with either Al, or both Al and SiO_2, removed. Si dissolution in Al was

found to be nonuniform : triangular pits (frequently reported in literature) occur in the metallization window. For the contacts described here a *uniform* Al penetration under the oxide does not occur. However, for other contacts (differing by metallization, silicon resistivity a.s.o) a deep Si etching was found : in certain cases the shape of the electrode edge *under* the oxide is regular and a definite improvement in breakdown voltage was obtained [12].

Finally, we may assume that the reverse characteristic is influenced by *material defects* located close to the interface or at the interface itself. These defects may cause poor reproducibility, especially for larger contacts. Their effect may be progressively eliminated as the Si surface is „etched" by Al. From this point of wiew higher sintering temperatures should be preferable. However, the inspection of Si surface reveals the occurence of regular triangular pits (see above). In fact these are defects introduced by the postmetallization treatment itself. It is interesting to note the fact that the dimensions of these defects are here comparable with the width of the depletion layer at breakdown (half a micrometer or so). We consider, therefore, that the effects of the postmetallization heat-treatment upon the contact are contradictory. This idea is confirmed by Fig. 5 which shows both good (one almost perfect) and poor breakdown characteristics for 25 μm contacts sintereted at 550°C.

It is interesting to investigate in more detail those breakdown characteristics which seem to be nearly ideal, i.e. with a very steep increases of the current at a voltage which is close to that expected for a plane junction. An exponential dependence, $\log_{10} I_R \propto V_R$, was found, with I_R rising three orders of magnitude over a voltage range of a fraction of volt (10 μm and 25 μm contacts) voltage range of a fraction of volt.

Shockley [13] has developed a theory of avalanche breakdown in pn junctions by taking into account the statistical spatial fluctuation of electronic impurities and found an exponential $I_R - V_R$ relationship characterized by

$$\frac{\mathrm{d}(\log_{10} I_R)}{\mathrm{d}V_R} = \frac{3(8 \ln N)^{1/2}}{\ln 10} \tag{1}$$

where N is the number of cubes in the space-charge layer which have the side equal to the depletion layer width (plane junction, uncompensated semiconductor).

Tyagi [14] verified equation (1) for alloyed silicon pn junctions. He found, however an effective area which is much smaller than the geometrical one. This occurs because the actual junctions, fabricated by alloying *aluminium* to silicon, have a very irregular geometry.

For our devices with a 0.8 μm wide space-charge layer one finds $N = 123$ and $N = 767$ cubes, respectively, for 10 μm and 25 μm diameter contacts. The slope calculated with equation (1) is 8.1 V^{-1} and 9.5 V^{-1} whereas we found experimentally 9 V^{-1} and 6 V^{-1}, respectively.

5. Conclusion

The experimental investigation reported in this paper shows that the postmetallization treatment modifies the breakdown characteristics of planar Al/n—Si Schottky diodes made on a 0.22 Ω cm (111) epitaxial layer. The 550°C treatment yields lower reverse currents and higher breakdown voltages but lower reproducibility. The *good* samples sintered at 550°C yield breakdown voltages near the value estimated for plane abrupt junctions and exponential regions of the $I_R - V_R$ characteristics in reasonable agreement with Shockley's theory (equation (1)). The *bad* ones exhibit a very soft breakdown at considerable lower voltages. The SEM micrographs indicate a very irregular interface and suggest that a too severe heat treatment is dangerous. However, a true explanation of this poor reproducibility still lacks.

The reproducibility attained at 510°C sintering is much better but the breakdown voltage is lower (Fig. 5.b).

The sintering may improve the reverse characteristic of Al/n—Si planar Schottky diodes through :

— modifications of the Al—Si interface (reduction of the very thin native oxide layer on silicon, modification of the edge of the metallic contact, etc.);

— reduction of surface states at the Si—SiO_2 interface.

BIBLIOGRAFIE

1. *Yu, A. Y. C., Mead, C. A.*, Solid-St. Electron., *13*, 97—104 (1970).
2. *Rusu, A., Bulucea, C., Dan, P. A.*, Int. Journ. Electron., *45*, 523—534 (1976).
3. *Rusu, A., Bulucea, C., Postolache, C.*, Solid-St. Electron., *20*, 499—506 (1977).
4. *Dascălu, D., Brezeanu, Gh., Dan, P. A.*, Solid-St. Electron., *24*, 897—904 (1981).
5. *Chino, K.*, Solid-St. Electron., *16*, 119—121 (1973).
6. *Rhoderick, E. H.*, „Metal-semiconductor contacts", Oxford University Press, Oxford, 1978.
7. *Yu, A. Y. C., Snow, E. H.*, J. Appl. Phys., *39*, 3008—3016 (1968).
8. *Grant, W. N.*, Solid-St. Electron., *16*, 1189—1203 (1973).
9. *Grove, A. S.*, „Physics and technology of semiconductor devices", John Wiley, N.Y. (1967).
10. *Black, J. R.*, IEEE Trans. Electron Dev., *ED-17*, 800—805 (1970).
11. *Rhee, C., Saltich, J., Zwernemann, R.*, Solid-St. Electron., *15*, 1181—1186 (1972).
12. *Dascălu, D., Brezeanu, Gh., Suciu, M., Dan, P. A.*, „Changes in breakdown characteristics of planar Al/n—Si diodes during the post-metallization heat treatment" (unpublished).
13. *Shockley, W.*, Solid-St. Electron., *2*, 35 (1961).
14. *Tyagi, M. S.*, Int. J. Electron., *35*, 25 (1973).

Efectul tratamentului de sinterizare asupra caracteristicilor de străpungere ale diodelor Schottky planare Al/n—Si

S-au măsurat caracteristicile de străpungere ale diodelor Schottky planare cu diametre diferite și supuse unor diferite tratamente termice post-metalizare. Străpungerea apare la tensiuni mai înalte pentru diodele de arie mai mică și pentru probele tratate la temperaturi mai înalte. Tensiunea de străpungere de volum calculată pentru joncțiuni abrupte cu siliciu n de 0,22 Ω cm a fost regăsită experimental pentru diodele planare de 10—15 μm diametru, care au margine metalică comparativ largă (suprapusă peste un oxid de 0,7 μm grosime) și au fost tratate la 550°C. Îmbunătățirea caracteristicilor de străpungere și a reproductibilității observate după aplicarea tratamentului termic se poate explica prin fenomenele metalurgice de la contact și/sau prin calmarea stărilor de la interfața Si—SiO_2.

C.Z. : 681.325.3

CIRCUITE DE CODARE ŞI DECODARE CU STRUCTURĂ VARIABILĂ PENTRU TRANSMISII DE DATE CU DETECŢIA ŞI CORECŢIA ERORILOR

D. A. STOICHESCU *

Se propune realizarea unor circuite de codare şi decodare cu structură variabilă, pentru coduri ciclice, destinate transmisiei de date cu detecţia sau corecţia erorilor.

După prezentarea avantajelor acestor echipamente de concepţie originală, sînt descrise principiile generale ce stau la baza funcţionării şi elaborării lor; în final, sînt menţionate cîteva aplicaţii posibile.

1. Introducere

Utilizarea codurilor detectoare şi corectoare de erori constituie una din cele mai complexe metode de luptă împotriva perturbaţiilor; ea urmăreşte diminuarea şi, eventual, înlăturarea efectelor acestor perturbaţii asupra informaţiilor numerice, putînd fi descrisă, pe scurt, astfel: dintre simbolurile transmise, numai o parte conţin informaţii utile; celelalte, numite redundante, sînt determinate, în punctul de emisie, în funcţie de primele, pe baza unei anumite legi; la recepţie, simbolurile primite sînt verificate şi chiar corectate pe baza relaţiilor dintre simboluri. Calitatea superioară a transmisiei impune, însă, nefolosirea integrală a capacităţii canalului.

În cazul unui nivel de perturbaţii ridicat este necesar un număr sporit de simboluri de control, iar introducerea unei redundanţe prea mari, în cazul unor canale de bună calitate, duce la scăderea eficienţei transmisiunii în mod nejustificat. Aşadar, pentru asigurarea unor performanţe optime, se impune adaptarea aparaturii de codare-decodare la caracteristicile de zgomot ale canalului. Este, însă, dificil a se construi, pentru fiecare canal, aparatura cea mai potrivită, iar dacă nivelul de zgomot al acestuia se modifică în timp, investirea unor fonduri în mai multe echipamente de codare-decodare, montate în paralel şi cuplate alternativ în timpul exploatării prezintă neajunsuri economice.

Manuscris primit la data de 9 februarie 1982

* Şef lucrări dr. ing., Catedra Electronică aplicată

O soluție mult mai avantajoasă o constituie realizarea unor instalații de transmisie cu detecția sau corecția erorilor, cu structură variabilă, capabile să folosească nu una ci mai multe legi de codare-decodare, trecerea de la una la alta făcîndu-se manual sau automat, în mod simplu. Scopul acestui articol constă tocmai în a prezenta modalitățile generale de elaborare a unor asemenea instalații.

2. Circuite de codare cu structură variabilă pentru coduri ciclice.

În elaborarea schemei generale a acestor circuite se pleacă de la codorul din fig. 1, constituit dintr-un circuit de divizare prin $g(x)$ — polinomul generator al codului — și o linie de întîrziere cu n celule (n este lungimea cuvintelor de cod).

Destinată sincronizării codorului, linia de întîrziere deschide porțile P_1 și P_2 și blochează poarta P_3 pe durata primelor k tacte ale ciclului de codare, iar pe durata ultimelor n-k tacte ale ciclului de codare blochează porțile P_1 și P_2, deschizînd poarta P_3.

Pentru a obține un codor variabil pornind de la fig. 1, se impun următoarele măsuri:

— înlocuirea registrului divizor cu structură fixă printr-unul cu structură variabilă, cu un număr de circuite basculante bistabile tip D egal cu m_{max} (unde m_{max} este gradul polinomului generator de grad maxim din setul de coduri pentru care este construit echipamentul).

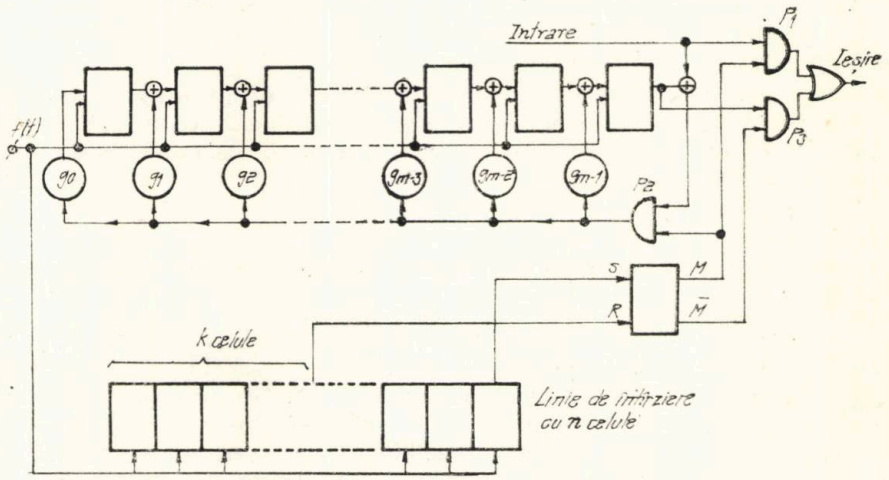


Fig. 1. Codor pentru coduri ciclice, cu registru de divizare prin g(X).

— folosirea unei linii de întîrziere de lungime n_{max} (unde n_{max} este lungimea maximă a cuvintelor de cod folosite) conectată la intrările S și R ale circuitului de comandă a porților P_1, P_2, P_3 prin intermediul unui decodificator, astfel încît valorile constantelor k și $m = n$-k să poată fi modificate în funcție de cod.

Schema generală a codorului variabil este ilustrată cu ajutorul fig. 2. Lungimea registrului divizor ca și valorile coeficienților g_i ai polinomului generator $g(x)$ sînt modificate prin intermediul setului de porți *SI* din figură, comandate de parametrii $a_0 \ldots a_{m-1}$.

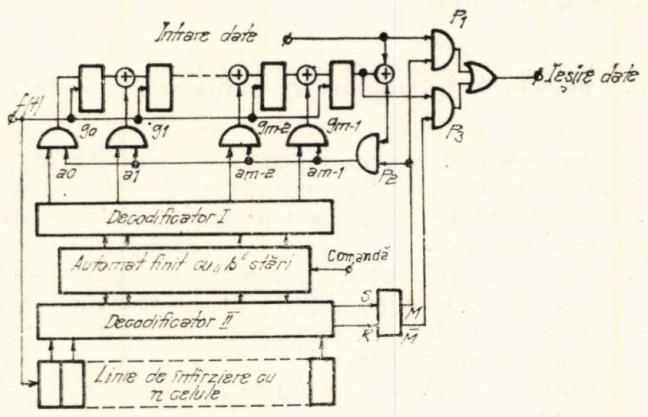


Fig. 2. Schema generală a unui codor variabil pentru coduri ciclice.

Schimbarea legii de codare este efectuată de către automatul finit cu s stări (s este numărul de coduri pe baza cărora poate lucra circuitul) conectat, pe de o parte, la decodificatorul I — care elaborează parametrii a_i — și, pe de altă parte, la decodificatorul II — care dirijează ieșirile liniei de întîrziere către intrările circuitului SR.

Automatul finit poate fi un numărător sau un ansamblu constituit dintr-un numărător și o memorie tip ROM; decodificatorul II este un ansamblu de două multiplexoare ale căror semnale de adresă sînt furnizate de către automatul finit.

3. Circuite de decodare cu structură variabilă pentru coduri ciclice.

În cazul în care se urmărește detecția erorilor, se poate pleca, pentru elaborarea schemei generale a decodorului variabil, de la circuitul din fig. 3. Acesta efectuează decodarea unui cuvînt de cod cu n simboluri în n perioade ale semnalului de tact. În timpul primelor k tacte, simbolurile de informație, coeficienți ai puterilor celor mai mari ale variabilei X, pătrund atît în registrul de divizare prin $g(x)$ (unde $g(x)$ este polinomul generator al codului) cît și în registrul de informație — constituit din k C.B.B. (k este numărul simbolurilor de informație dintr-un cuvînt de cod). După aceasta, semnalul de tact $f_1(t)$ al registrului de informație este blocat, prin intermediul porții P_1, de către semnalul M generat de C.B.B. — S.R. — conectat la linia de întîrziere cu n celule. Procesul de divizare continuă încă $m = n-k$ tacte după care este elaborat semnalul de eroare „e" ($e=1$ în absența erorilor; $e=0$ în cazul apariției uneia sau mai multor erori).

Circuitul de comandă are rolul de a deschide poarta P_2 numai după terminarea împărţirii cuvîntului recepţionat $v(x)$ prin $g(x)$ şi de a elabora semnalul de deschidere a porţii P_3 care lasă să treacă impulsurile de tact către o memorie tampon. Astfel, dacă $e_0 = 0$, pe parcursul ciclului „i" sînt transferate în memoria tampon impulsurile informaţionale separate în cursul ciclului „$i - 1$". Dacă $e_0 = 1$, semnalul de tact, $f_2(t)$, al memoriei tampon este blocat; registrul de informaţie este şters şi, concomitent, umplut cu impulsurile utile decodate în ciclul „i".

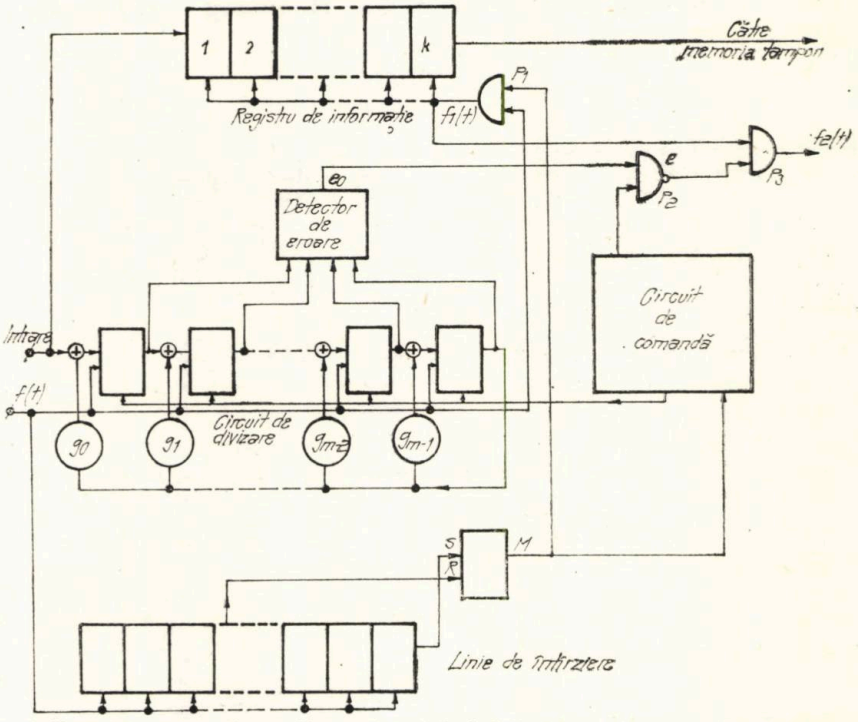


Fig. 3. Decodor cu detecţia erorilor pentru coduri ciclice, cu registru de divizare prin g(X).

Pentru a se obţine o schemă generală de decodor variabil pe baza circuitului din fig. 3, se ţine seamă de următoarele considerente:

— Registrul de divizare trebuie să aibă o structură şi o lungime variabile în funcţie de codul folosit, el poate fi realizat ca în fig. 4.a) unde coeficienţii g_i sînt determinaţi de parametrii a_i ca şi în cazul unui codor variabil, iar punctul de intrare este determinat de parametrii b_i (pentru un cod anumit un singur parametru $b_i \neq 0$, ceilalţi fiind nuli).

— Registrul de informaţie are o lungime variabilă deoarece numărul de simboluri utile dintr-un cuvînt variază de la un cod la altul; el poate fi realizat ca în fig. 4.b) unde intrarea este fixă, iar punctul de ieşire este determinat de parametrii b_i, sau ca în fig. 4.c) unde ieşirea este fixă iar punctul de intrare este modificat în funcţie de valorile parametrilor b_i.

— Linia de întîrziere trebuie să fie legată la circuitul SR de comandă a porţilor P_1, P_2, P_3 tot prin două multiplexoare ca şi în cazul

codoarelor variabile. Semnalele de adresă ale acestor multiplexoare sînt aceiași parametri b_i care modifică lungimile registrelor de divizare și de informație.

— Codorul constituit din registrele variabile menționate mai sus trebuie să fie comandat de un schimbător de cod format dintr-un automat finit (de obicei, un numărător) și două decodificatoare care furnizează parametrii a_i și b_i.

În situația în care se urmărește corecția erorilor, structura decodorului de bază este diferită; în fig. 5 este reprezentat un circuit care realizează această operație folosind un cod Hamming (n, k) corector de o eroare.

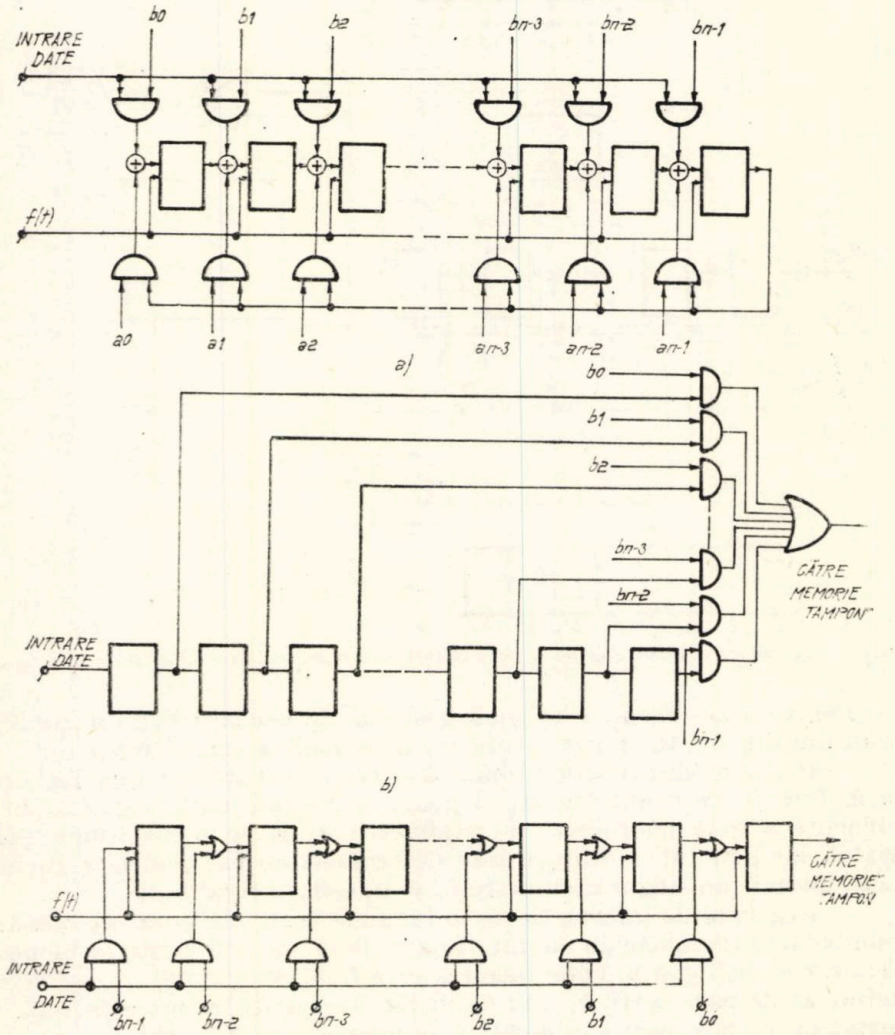


Fig. 4. a) Registru divizor cu structură variabilă. b) Registru de informație cu intrare fixă și ieșire variabilă. c) Registru de informație cu intrare variabilă și ieșire fixă.

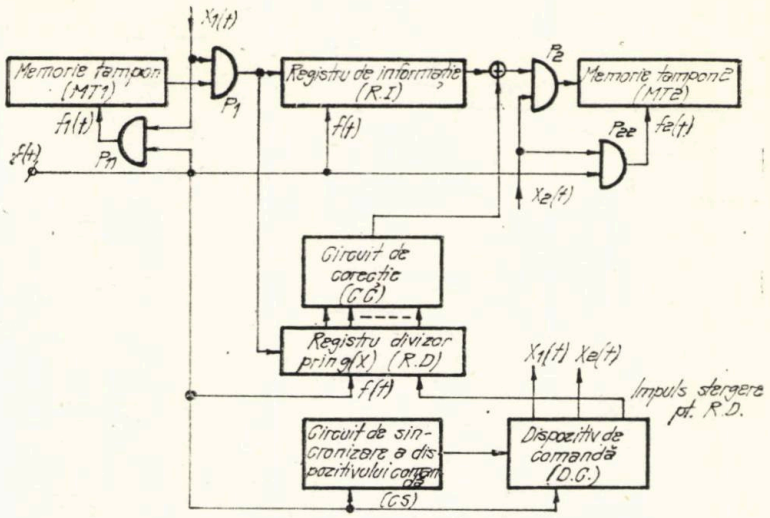


Fig. 5. Decodor pentru corecţia erorilor, folosind un cod Hamming, corector de o eroare.

Ciclul de decodare durează $n + k + 1$ tacte. În primele n tacte, porţile P_1 şi P_{11} sînt deschise, iar P_2 şi P_{22} sînt blocate. Informaţia numerică pătrunde în registrul de informaţie $R.I.$ şi în decodor, realizat sub forma unui registru divizor prin polinomul generator al codului $(R.D)$; este calculat restul împărţirii. În următoarele k tacte, P_1 şi P_{11} sînt blocate, iar P_2 şi P_{22} sînt deschise. Simbolurile de informaţie — coeficienţi ai termenilor de ordin superior ai cuvîntului de cod — trec în registrul de memorie MT_2. Circuitul de corecţie are rolul de a furniza semnalul „1" la ieşire în momentul apariţiei stării 10 ... 0; acest semnal modifică simbolul care părăseşte, în acel moment, registrul de informaţie. Pe durata tactului $n + k + 1$ se efectuează ştergerea registrului divizor, registrul de informaţie golindu-se în cursul ciclului următor, pe măsură ce primeşte date de la memoria MT_1.

Dispozitivul de comandă are rolul de a elabora semnalele $x_1(t)$ — de deschidere a porţilor P_1 şi P_{11} —, semnalul $x_2(t)$ — de deschidere a porţilor P_2 şi P_{22} şi semnalul de ştergere a decodorului.

Schema generală a decodorului pentru mai multe coduri Hamming corectoare de o eroare, elaborată pe baza circuitului din fig. 5 este reprezentată în fig. 6.

Automatul finit cu s stări (s = numărul codurilor pentru care este proiectat sistemul) comandă trei decodificatoare — I, II şi III — care furnizează, respectiv, seturile de parametri a_i, b_i şi c_i.

Parametrii a_i modifică structura registrului divizor; parametrii b_i determină punctul de ieşire al registrului de divizare legat la calea de reacţie printr-un multiplexor, punctul de intrare a datelor în registrul de informaţie şi structura circuitului de sincronizare constituit dintr-un numărător (în locul liniei de întîrziere din schemele anterioare) şi trei decodificatoare.

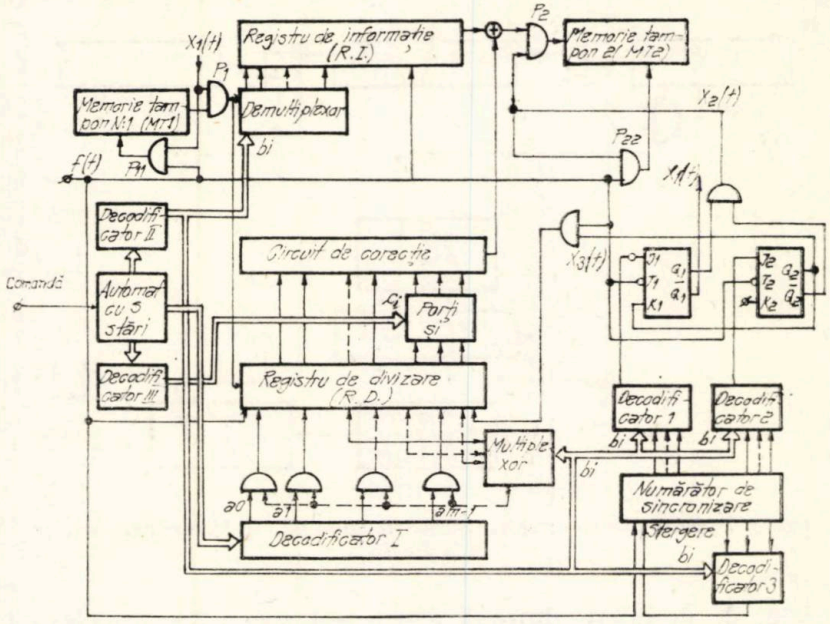


Fig. 6. Schema generală a unui decodor variabil pentru mai multe coduri Hamming, corectoare de o eroare.

Circuitul de corecție este o poartă SI cu m_{max} intrări legată la ieșirea primei celule a registrului $R.D.$ și la ieșirile negate ale celorlalte. Ieșirile ultimelor $m_{max} - m_{min}$ celule sînt conectate prin intermediul unor porți SI; deschiderea și blocarea acestor porți conform legii de codare utilizate este realizată de către parametrii c_i.

Circuitul de comandă care generează semnalele $x_1(t)$ și $x_2(t)$ și impulsul de ștergere al $R.D.$ este un numărător sincron cu 3 stări, corespunzătoare celor trei etape ale ciclului de decodare a unui cuvînt de cod.

4. Posibilități de utilizare a instalațiilor de codare și decodare cu structură variabilă.

O primă modalitate de a exploata conceptul circuitelor de codare și decodare variabile este legată de avantajele pe care el le poate asigura celor care le produc. Dacă mai mulți beneficiari solicită asemenea echipamente pentru canale cu nivele de zgomot diferite, se pot fabrica variante fixe ale aceluiași sistem de codare-decodare cu structură variabilă, ceea ce, evident, duce la micșorarea cheltuielilor de concepție și execuție.

O a doua posibilitate de utilizare a aparaturii descrisă în lucrare este legată de evaluarea mai rapidă și mai ușoară a canalelor de transmisiuni din punct de vedere al nivelului de perturbații și al debitului de informație, în vederea stabilirii legii de codare optime.

Pentru a compara legile de codare $L_0, L_1, \ldots, L_{s-1}$ dintr-un set, se impune introducerea unui coeficient care să fie o funcție crescătoare atît

de debitul de informație cît și de probabilitatea de depistare sau corecție a erorilor. Un asemenea coeficient ar putea fi

$$\lambda_i = \frac{k_i}{n_i} \cdot \frac{e_i}{e_{ti}}$$

unde :

— e_{ti} este numărul total de cuvinte recepționate eronat în cadrul transmisiei folosind codul L_i, în cazul detecției erorilor, sau numărul total al simbolurilor eronate, în cazul corecției erorilor.

— e_i este numărul de cuvinte eronate detectate cu ajutorul codului L_i, în cazul detecției erorilor sau numărul simbolurilor corectate, în cazul corecției erorilor.

— k_i și n_i reprezintă numărul de simboluri de informație, respectiv numărul total de simboluri dintr-un cuvînt de cod, pentru codul L_i.

În fig. 7 este prezentată o schemă generală de calcul a parametrilor e_{ti} și e_i în vederea determinării coeficienților λ_i.

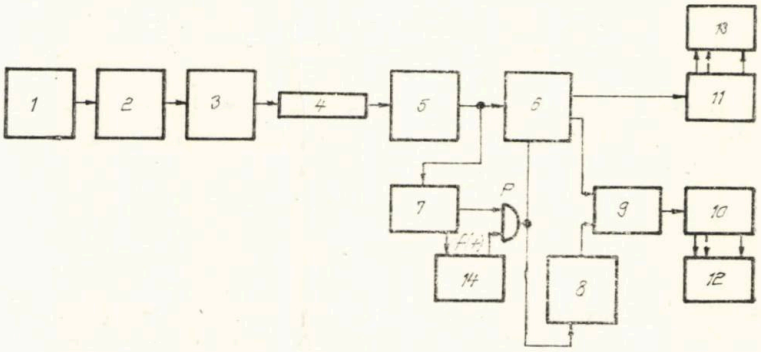


Fig. 7. Schema generală a unui echipament destinat determinării experimentale a coeficienților e_i și e_{ti} pentru un set de coduri : 1. Memorie de mesaje, M_1 ; 2. Codor ; 3. Modulator ; 4. Canal de transmisiune ; 5. Demodulator ; 6. Decodor ; 7. Bloc de recunoaștere a secvențelor de sincronizare ; 8. Memorie de mesaje, M_2 ; 9. Comparator ; 10, 11. Numărătoare ; 12, 13. Memorii de înregistrare a parametrilor e_{ti}, respectiv e_i ; 14. Blocul semnalului de sincronizare a receptorului.

Codorul și decodorul au structuri variabile, folosind același set de coduri ; memoriile M_1 (la emisie) și M_2 (la recepție) conțin același set de simboluri informaționale utile.

Pentru fiecare lege de codare, L_i cuvintele conținute în memoria M_1 sînt codate și transmise la recepție unde sînt decodate. Mesajele constituite din simboluri utile, furnizate de către decodor, și corespondentele lor, extrase din memoria M_2, sînt introduse în comparator, la ieșirea căruia se obține simbolul „0" în cazul identității cuvintelor pe cele două intrări sau simbolul „1" dacă sînt diferite. Blocul „10" numără cuvintele recepționate eronat, conținînd, la sfîrșitul transmisiei parametrul e_{ti}, iar blocul „11" numără cuvintele eronate detectate, conținînd, la sfîrșitul transmisiei parametrul e_i.

O a treia posibilitate de folosire a aparaturii descrise în capitolele anterioare este legată de realizarea unor instalaţii de transmisie de date cu detecţia sau corecţia erorilor, autoadaptabile la canalul de transmisiune. Schema bloc a unui asemenea sistem este ilustrată de fig. 8. Codorul — la emisie — şi decodorul — la recepţie — folosesc aceeaşi lege de codare, dictată de dispozitivele de selecţie corespunzătoare pe baza informaţiei furnizate de dispozitivul de evaluare.

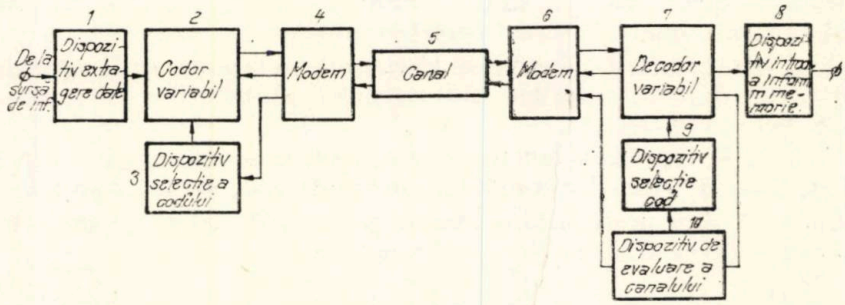


Fig. 8. Schema generală a unei instalaţii de transmisie de date cu detecţia sau corecţia erorilor, adaptabilă la canalul de transmisie.

Acesta din urmă ia decizii în urma comparaţiei coeficienţilor λ_i — sau ai altora echivalenţi — după un procedeu identic sau similar celui descris mai sus.

5. Concluzii

Proiectarea unor echipamente de codare-decodare pe baza principiilor expuse în lucrare duce, desigur, la scheme sofisticate, a căror complexitate creşte o dată cu mărimea setului de coduri folosite de echipament. Circuitele integrate actuale — în special cele MSI şi LSI — permit, însă, realizarea lor la dimensiuni şi preţ de cost acceptabile, asigurîndu-le, totodată, fiabilitatea corespunzătoare.

BIBLIOGRAFIE

1. *Peterson, W. W.*, Error Correcting Codes, Cambridge, The M.I.T, Press, 1968.
2. *Spătaru Al.*, Teoria transmisiunii informaţiei vol. II, Bucureşti, E.T. 1971.
3. H.P.S. System technik. R.F.G., 1973 (manual de circuite integrate neliniare, editat de firma SIEMENS).

Circuits de codage et décodage à structure variable, pour transmission des données avec la détection et la correction des erreurs

On propose la création des codeurs et décodeurs à structure variable, pour codes cycliques, détecteurs ou correcteurs d'erreurs.

Les avantages et le fonctionnement de ces circuits de conception originelle, ainsi que les méthodes mises au point pour leur développement sont présentées dans les grandes lignes ; quelques applications pratiques sont, enfin, énumérées.

C.Z.: 681.3

UN PUNCT DE VEDERE ASUPRA DISTRIBUȚIEI FUNCȚIONALE ÎN SISTEMELE DE CALCUL

C. BĂLEANU, D. TOMESCU *

Analiza efectuată asupra unui sistem de calcul evidențiază următoarele: 1) necesitatea realizării echilibrului între structura fizică și cea informațională; 2) într-un sistem multiprocesor se pot obține rezultate optime dacă se extinde structura pipeline la nivel de sistem; 3) un sistem multiprocesor poate fi eficient condus dacă unitățile lui funcționale sînt identice; 4) structura unei unități funcționale trebuie să realizeze funcțiunile de prelucrare, memorare, transfer și sincronizare prin module funcționale adecvate.

Sistemul funcțional distribuit, conceput pe baza acestei analize, conține unități funcționale identice și neomogene structural, interconectate pe un bus circular sincron.

În încheiere se subliniază direcțiile posibile de dezvoltare a sistemelor funcțional distribuite.

1. Introducere

Din ce în ce mai des, în literatura de specialitate, se constată că, din punct de vedere principial, mașina de calcul a evoluat foarte puțin pornind de la concepția originară von Neumann, astfel încît progresul tehnologic a devansat considerabil evoluția arhitecturii sistemelor. Structura fizică inițială, cuprinzînd o memorie, o unitate centrală și un canal de transfer, a fost încorporată într-o structură informațională din ce în ce mai amplă, organizată pe mai multe niveluri de programare, care a crescut spectaculos performanțele mașinii fizice, fără a-i înlătura limitele conceptuale. În mod paradoxal, revoluția tehnologică acționează în direcția reducerii ponderii structurii fizice în prețul total de cost al mașinii, deși ea reprezintă foarte puțin în raport cu mașina informațională oferită spre cumpărare. În același timp, efortul de programare rămîne constant, iar în unele cazuri crește, majorînd substanțial costul calculatoarelor. Apare în mod evident necesară realizarea echilibrului între structura fizică și cea informațională, favorizînd astfel tendința tehnologică și conducînd în mod direct la creșterea performanțelor sistemului.

Lucrare prezentată la sesiunea jubiliară consacrată aniversării a 100 de ani de la reorganizarea „Școlii naționale de poduri și șosele" Decembrie 1981.

* Inginer; Inginer, Catedra Dispozitive, circuite și aparate electronice

2. Sistemele multiprocesor și descompunerea funcțională

Sistemul multiprocesor reprezintă o primă încercare în sensul arătat în capitolul 1. El este definit în [1] ca un ansamblu de două sau mai multe procesoare care au acces la resurse de memorie și intrare-ieșire comune și lucrează în cadrul unui sistem de operare unic. Din punctul de vedere al ultilizatorului, un sistem multiprocesor este absolut necesar în două situații:

— pentru creșterea fiabilității, în măsura în care asigură un grad oarecare de rezervare;

— pentru reducerea duratei de execuție a unui anumit program.

Dezavantajele structurilor fizice de tip multiprocesor sînt numeroase: concurența la memorie și echipamentele de intrare-ieșire, concurența la procesorul master (în cazul în care acesta există), dificultățile legate de extinderea sistemului. Pentru ca un program să poată fi executat eficient pe un multiprocesor, este necesar să fie pus sub formă paralelă. Numărul de operații administrative executate de sistem depinde de „unitatea de calcul" care poate fi prelucrată în paralel cu altele [2]. Într-o organizare „pipeline", operațiile administrative sînt neimportante, astfel încît structura de prelucrare „pipeline" este preferabilă în raport cu structura multiprocesor [3]. Structura multiprocesor este condusă de un sistem de operare unic, de regulă distribuit procesoarelor. Eficiența sistemului de operare cît și gradul de paralelism al execuției programelor utilizator cresc spectaculos în cazul sistemelor cu unități funcționale identice [1].

O metodă de creștere a performanțelor unui sistem multiprocesor, propusă în această lucrare, îmbină două aspecte distincte:

— la nivel de sistem, se îmbină structura multiprocesor cu structura „pipeline";

— unitățile funcționale ale sistemului sînt identice și realizate pe baza distribuției funcționale.

Un sistem de calcul poate fi privit ca un ansamblu de funcții logice și fizice. Este evident că funcțiile logice sînt organizate pe diferite niveluri și se prezintă deosebit utilizatorului și sistemului de operare. Pentru a reduce din ce în ce mai mult activitatea de administrare a structurii informaționale este necesar ca numărul de niveluri să se reducă și ca funcțiile logice să corespundă din ce în ce mai mult resurselor fizice. La nivel fizic, într-o mașină de calcul se pot distinge patru tipuri de funcțiuni:

— funcțiunea de prelucrare, care realizează transformarea unor date de intrare în date de ieșire;

— funcțiunea de memorare a programelor și a datelor;

— funcțiunea de transfer a informației între modulele sistemului;

— funcțiunea de sincronizare a accesului la resursele fizice (inclusiv procesoarele).

Un proces de calcul își propune o transformare globală a unor blocuri de date în altele. În figura 1, prin procesul de calcul se trece de la datele D_0 la datele D_n.

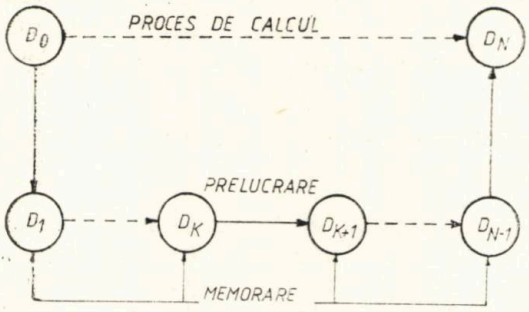


Fig. 1 — Funcțiuni de sistem necesare într-un proces de calcul

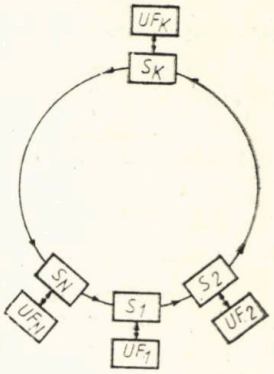


Fig. 2 — Calculatorul circular sincron

Funcțiunea de prelucrare apare la tranziția între două forme intermediare ale blocului de date (D_k — D_{k+1}). Funcțiunea de memorare apare explicit prin stocarea blocurilor de date D_0, ... D_n, și, implicit, prin stocarea diferitelor segmente de program. Funcțiunile de transfer și sincronizare sînt implicite pe întreaga durată a procesului de calcul.

Unitățile funcționale ale sistemului propus conțin module specializate pentru fiecare funcțiune, astfel încît se realizează o distribuție funcțională la nivel structural.

3. O propunere de sistem funcțional distribuit

Calculatorul circular sincron este un model de sistem de calcul care are ca punct de plecare un sistem multiprocesor ale cărui unități funcționale (procesoare, memorii, echipamente periferice) sînt conectate pe un bus circular sincron [4]. Busul circular sincron este un set de registre în care fluxul de date este controlat de un ceas unic. Fiecare registru (denumit „stație") este cuplat la una din unitățile funcționale ale sistemului (figura 2).

Fiecare unitate funcțională poate schimba blocuri de date cu oricare alta prin plasarea unor „vagoane" de informație în stația la care este cuplată. După un număr de perioade de ceas depinzînd de distanța între cele două unități, măsurată în sensul de rotație a busului, fiecare vagon emis ajunge la destinație. În lucrarea [4] se prezintă pe larg structura unui „vagon", structura unei „stații", schema bloc a unei interfețe de cuplare pe bus, precum și protocolul de interconectare a două unități funcționale.

Avantajele busului circular sincron sînt următoarele:

— soluție ieftină în comparație cu alte tehnici de interconectare (memorie multiport sau matrice de comutare);

— o metodă simplă de interconectare, cuprinzînd un număr redus de circuite de interfață și o logică unificată de cuplare;

— permite modificarea rapidă a numărului de unităţi funcţionale interconectate;

— realizează o rată înaltă de transfer (3 Mbiţi/secundă în varianta prezentată în [4]);

— adăugarea unor unităţi funcţionale conduce la creşterea spectaculoasă a performanţelor sistemului;

— permite $\frac{N}{2}$ transferuri simultane (N este numărul de unităţi funcţionale interconectate).

Calculatorul circular sincron îşi propune să utilizeze mai eficient avantajele transferului secvenţial şi circular de date decît sistemul descris în lucrarea [4]. Unităţile funcţionale interconectate sînt identice şi structurate prin distribuţie funcţională, iar transferul pe busul circular sincron se realizează doar între unităţi alăturate. În figura 3 este prezentată structura unei unităţi funcţionale a calculatorului circular sincron.

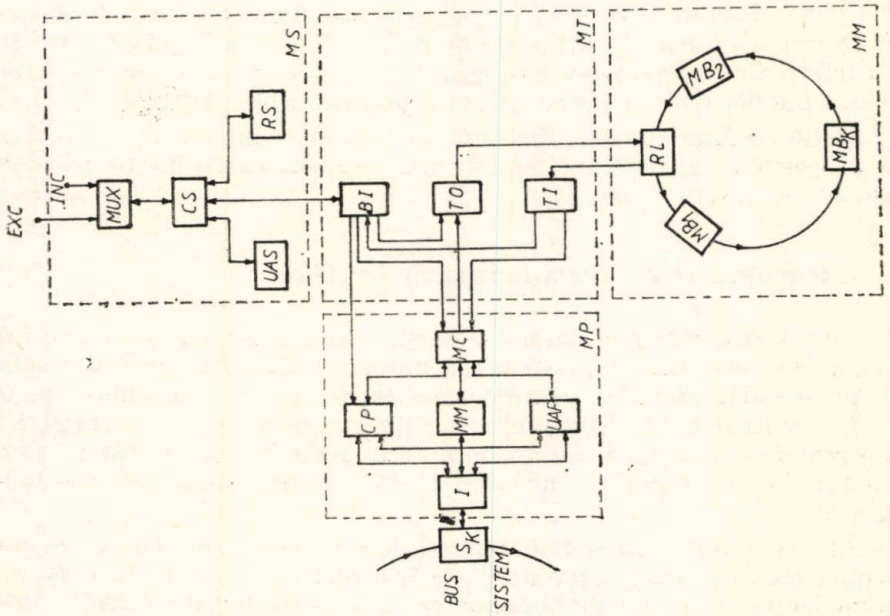


Fig. 3 — Structura unei unităţi funcţionale

O unitate funcţională cuprinde patru module: modulul de prelucrare (MP) modulul de transfer (MT), modulul de sincronizare (MS) şi modulul de memorare (MM).

1) Modulul de prelucrare (MP) este cuplat prin intermediul interfeţei I la staţia S_k a busului circular sincron al sistemului. Este o structură microprogramată, conţinînd memoria de microprogram (MM), blocul de control (CP), blocul aritmetico-logic (UAP). Accesul spre celelalte module funcţionale se face prin intermediul memoriei de canal (MC). Memoria de canal

este un set extins de registre organizat pe grupuri. Fiecare grup este asociat unui canal de prelucrare corespunzător unei căi din modulul de transfer și unui ceas din modulul de sincronizare. La recepția unei întreruperi de la blocul de întreruperi (*BI*) al modulului de transfer, se comută grupul de registre corespunzător nivelului de întrerupere activat. Memoria de canal și memoria de microprogram de tip *RWM* asigură funcționalitatea dinamică a modulului de prelucrare [6].

2) Modulul de sincronizare (*MS*) conține un număr de ceasuri, asociate căilor de transfer și canalelor de prelucrare. Este o structură microprogramată, conținînd un bloc de control (*CS*), o unitate aritmetică (*UAS*) și un set de registre (*RS*). Cuanta de incrementare a fiecărui ceas este selectată prin multiplexorul *MUX* dintr-un set de cuante externe (*EXC*) și interne (*INC*). Modulul de sincronizare permite declanșarea în sistem a unor procese în timp real, prin sincronizarea acceselor la resursele interne ale mașinii [5], [6]. În lucrarea [5] se prezintă un modul de sincronizare cu următoarele caracteristici :

— structură microprogramată rapidă (ciclul mașină 300 ns) și funcționalitate dinamică ;

— sincronizează 16 căi independente cu 8 cuante interne (10 μs ÷ ÷ 100 s din decadă în decadă) și 8 cuante externe ;

— generează întreruperi pe 32 niveluri (16 întreruperi de contor nul și 16 de eroare de ritm) ;

— sincronizează procese cu durata cuprinsă între 10 μs și 25600 secunde.

3) Modulul de transfer (*MT*) cuprinde două tampoane, unul de intrare (*TI*), iar celălalt de ieșire (*TO*) și un bloc de întreruperi (*BI*). Modulul de transfer este conectat la modulul de memorare (*MM*) prin intermediul registrului de linie (*RL*). Informația sosită în *RL* din *MM* conține adresa căii de transfer în care se va încărca. Tampoanele *TI* și *TO* conțin un număr de căi de transfer asociate canalelor de prelucrare din *MP* și ceasurilor din *MS*. Informația se autoîncarcă în calea corespunzătoare din *TI* (la recepție) și este emisă lui *TO* cu adresa căii din care provine (la emisie). Prin intermediul blocului de întreruperi *BI*, se generează întreruperi de tampon plin sau tampon gol către *MP*. Numărul de căi din unitatea de transfer determină numărul maxim de blocuri de memorie virtuală adresabile la un moment dat.

4) Modulul de memorie virtuală (*MM*) este organizat la rîndul lui pe un bus circular sincron. Informația transferată pe acest bus este controlată în totalitate de *MT* prin intermediul registrului de linie (*RL*). Blocurile de memorie virtuală (MB_k) pot fi memorii sau echipamente periferice. Accesul la MB_k se face unitar, prin intermediul tampoanelor *TI* și *TO* din *MT* [6].

Execuția unui program pe calculatorul circular sincron presupune următoarele etape:

— injecția programului pe bus dintr-un modul *MM* ;

— prelucrarea șirului de date prin rotații succesive ale informației injectate pe bus. Fiecare *MP* efectuează prelucrarea de pe nivelul cel mai elementar și emite rezultatul către *MP*-ul învecinat ;

— pe durata execuției se apelează la modulele *MM* în vederea memorării datelor intermediare sau a stocării rezultatului final (eventual pe un echipament periferic).

4. Concluzii

Principalele caracteristici ale sistemului de calcul propus sînt:

— structură de tip „pipeline" cu unități funcționale identice;

— unitățile funcționale modifică direct fluxul informațional de pe bus, fără a fi implicate într-un protocol de comunicare;

— modulele de memorie virtuală injectează șirul informațional pe bus, stochează diferitele etape în execuția programului, conțin biblioteca sistemului, colectează rezultatul procesului de calcul;

— modulele de prelucrare efectuează transformări numai asupra șirului de date de pe bus;

— modulele de transfer și sincronizare preiau în totalitate gestiunea operațiilor implicite ale procesului de calcul;

— accesul la/de la sistem se efectuează prin intermediul modulelor de memorie virtuală, proprii unităților funcționale;

— sistemul de operare se reduce drastic, în măsura în care nu există protocol de comunicare între unitățile funcționale, iar șirul informațional controlează direct procesul de calcul;

— limbajele de programare executabile pe o astfel de mașină nu sînt de tip clasic și se adresează direct funcționalității calculatorului.

Distribuția funcțională într-un sistem de calcul prezintă două caracteristici majore: distribuția sarcinilor de sistem între unitățile funcționale interconectate și asocierea funcțiunilor elementare unor blocuri fizice specializate.

Calculatorul circular sincron este o structură de tip multiprocesor cu organizare „pipeline" care evoluează către o mașină funcțional distribuită în măsura în care se va dezvolta un nou stil de programare atașat funcționalității sistemului.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. H. Enslow* Jr(ed), Multiprocessors and Parallel Processing, John Wiley, N.Y., 1974
2. *A. K. Jones, P. Schwartz*, Experience Using Multiprocessor Systems — A Status Report, Computing Surveys, vol. 12, nr. 2, June 1980
3. *C. V. Ramamoorthy, H.F. Li*, Pipeline Architecture, Computing Surveys, vol. 9, nr. 1, March 1977
4. *D. Tomescu, C. Băleanu, A. Botta*, The Circular Synchronous Bus, Microprocessing and Microprogramming, vol. 7, nr. 5, May 1981
5. *Cr. Băleanu, D. Tomescu*, ș.a., Unitate microprogramată pentru controlul proceselor în timp real, CAS, ICCE, Timișul de Sus, 1980
6. *Cr. Băleanu*, Soluții alternative pentru sisteme cu microprocesoare CAS, ICCE, Predeal, 1981

A Point of View on Functional Distribution of Computing Systems

The following aspects are revealed by an analysis of computing systems : 1) there is a great need for a balance between the informational and physical structures ; 2) the extension of pipelining on the system level of a multiprocessor is expected to result in a better utilization of the hardware resources ; 3) the efficient management of a multiprocessor made up of identical functional units is a rather trivial task ; 4) a functional unit has to achieve processing, storing and transfers of data, as well as synchronization operations through appropriate functional modules.

The functionally distributed system proposed in this paper is made up of identical functional units with a non-homogeneous structure, interconnected through a circular synchronous bus.

Finally, some potentially interesting research problems in the domain of functionally distributed systems are pointed out.

IDENTIFICAREA SISTEMELOR DIN MĂSURĂTORI PERTURBATE

P. STOICA *

Scopul acestui articol este de a prezenta o procedură simplă conceptual, de determinare a estimaţiilor de verosimilitate maximă ale parametrilor sistemelor liniare cu zgomote atît la intrare cît şi la ieşire. În cadrul acestei proceduri, funcţia de verosimilitate a măsurătorilor este evaluată utilizînd un algoritm rapid pentru determinarea rădăcinii pătrate a matricelor de covarianţă bandă.

1. Introducere

Identificarea sistemelor ce conţin mai multe surse independente de zgomot este o problemă relativ delicată. Åström şi Bohlin, [1], par să fie primii care au semnalat acest fapt. Procesele pentru care atît măsurătorile de intrare, cît şi cele de ieşire sînt afectate de zgomote (situaţie care apare prin excelenţă în cadrul identificării pasive, adică din date de funcţionare normală), constituie un caz special de sisteme cu mai multe surse de zgomot. Pentru astfel de procese se poate în general presupune că există două surse independente de zgomot: una afectînd ieşirea, cealaltă intrarea.

Problema identificării sistemelor liniare din măsurători de intrare-ieşire perturbate a fost abordată de un număr destul de mare de cercetători. Rezultatele recente şi, de asemenea, referinţele de bază în domeniu sînt trecute în revistă în [2]. Multe soluţii propuse s-au dovedit a fi eronate, de exemplu cele avansate în [3], [4] etc., vezi [2]. Alte proceduri — de exemplu analiza spectrală şi tehnicile de corelaţie — deşi consistente, par a furniza estimaţii cu o precizie destul de slabă [2]. Pentru unele aplicaţii, acest lucru poate să fie intolerabil. Metoda verosimilităţii maxime nu suferă de acest dezavantaj; aşa cum este binecunoscut, ea produce estimaţii asimptotic eficiente.

În [2] este discutat un algoritm pentru determinarea aproximativă a estimaţiilor de verosimilitate maximă (VM). În cadrul acelui algoritm, funcţia de verosimilitate (aproximativă) a datelor este evaluată într-un punct curent din spaţiul parametrilor utilizînd reprezentarea *de stare prin inovaţii invariantă în timp* a procesului bidimensional intrare-ieşire.

Manuscris primit la data de 17 mai 1982
* Şef lucrări dr. ing., Catedra Automatică II

Partea algebrică principală a algoritmului constă așadar în rezolvarea ecuației Riccati asociate reprezentării de stare a procesului. Să notăm că ideea poate fi adaptată pentru calculul estimației VM *exacte*, vezi [5—11]. O astfel de adaptare ar deveni necesară atunci cînd se dispune de un număr relativ mic de măsurători. În mod esențial, ea constă în determinarea reprezentării de inovații *variabile în timp* a procesului intrare-ieșire.

Implementarea algoritmului VM propus în [2] ridică unele probleme. Astfel, stabilitatea reprezentării de stare a sistemului (pe baza căreia se determină reprezentarea prin inovații sau, echivalent, filtrul Kalman) ar trebui să fie controlată în cursul optimizării. Aceasta cere fie o serie de teste de stabilitate la fiecare iterație a algoritmului de optimizare, fie o generare specială (garantat stabilă) a reprezentărilor de stare. De asemenea, algoritmul VM [2] este destul de complex din punct de vedere numeric și deci unele simplificări ar fi de dorit.

Algoritmul VM propus în acest articol încearcă să compenseze dezavantajele menționate anterior ale procedurii propuse în [2]. Aceasta înseamnă că în cadrul acestui algoritm, funcția de verosimilitate poate să fie evaluată în orice punct din spațiul parametrilor. De asemenea, ne așteptăm ca în general, algoritmul să fie mai rapid decît cel din [2]. El este și mai simplu din punct de vedere conceptual.

2. Preliminarii

Să considerăm un sistem discret a cărui parte „deterministă" este descrisă de următoarea ecuație:

$$v(t) = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} x(t) \tag{2.1}$$

unde $v(t)$ și $x(t)$ sînt semnalele neperturbate de ieșire și respectiv intrare (la momentul t), iar $A^*(\cdot)$ și $B^*(\cdot)$ sînt polinoame în operatorul de întîrziere unitară q^{-1}. Fie $y(t)$ și $u(t)$ semnalele perturbate de ieșire și intrare

$$y(t) = v(t) + \frac{C^*(q^{-1})}{D^*(q^{-1})} e_2(t) \tag{2.2}$$

$$u(t) = x(t) + \frac{K^*(q^{-1})}{L^*(q^{-1})} e_3(t) \tag{2.3}$$

unde $C^*(q^{-1})$ etc. sînt polinoame și unde $e_2(t)$ și $e_3(t)$ sînt zgomote albe independente, de medie zero:

$$\begin{aligned} E\, e_2(t)\, e_2(s) &= \lambda_2^2 \delta_{t,s} \\ E\, e_3(t)\, e_3(s) &= \lambda_3^2 \delta_{t,s} \\ E\, e_2(t)\, e_3(s) &= 0 \quad \forall\, t,\ s \end{aligned} \tag{2.4}$$

Facem următoarele presupuneri :

P1 : Toate semnalele care apar în (2.1)—(2.3) sînt staționare. Echivalent, $A^*(z) \neq 0$, $D^*(z) \neq 0$, $L^*(z) \neq 0$ pentru $|z| \leqslant 1$.

P2 : Perechile de polinoame $\{A^*(z), B^*(z)\}$, $\{C^*(z), D^*(z)\}$ și $\{K^*(z), L^*(z)\}$ sînt coprime. Cu alte cuvinte reprezentarea (2.1)—(2.3) este minimală.

P3 : Intrarea neperturbată $x(t)$ este un proces ARMA

$$x(t) = \frac{G^*(q^{-1})}{H^*(q^{-1})} e_1(t) \tag{2.5}$$

unde

$$E\, e_1(t)\, e_1(s) = \lambda_1^2 \delta_{t,s}, \text{ iar}$$

$G^*(z)$ și $H^*(z)$ sînt polinoame coprime. Mai mult

$$E\, e_1(t)\, e_i(s) = 0 \quad \forall t,\ s\ ;\ i = 2,\ 3$$

Presupunerile anterioare sînt standard. Singura care poate părea oarecum restrictivă este P3. Clasa de intrări (2.5) este totuși destul de largă și ca atare poate include multe din semnalele care apar în funcționare normală.

Fie θ vectorul parametrilor necunoscuți

$$\theta = \{\text{coef } A^*, \ldots, \text{coef } L^*,\ \lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2\}$$

Problema de identificare tratată aici este estimarea lui θ prin metoda VM, utilizînd să zicem N perechi de măsurători intrare-ieșire :

$$\{u(1),\ y(1),\ \ldots,\ u(N),\ y(N)\}$$

Să notăm cu u șirul de observații ale intrării și similar, cu y pe cel corespunzător ieșirii. Așa cum este binecunoscut, estimația de VM, $\hat{\theta}_{VM}$, a lui θ este dată de

$$\hat{\theta}_{VM} = \arg \max_{\theta} p\,(y, u \mid \theta) \tag{2.6}$$

În (2.6), $p(y, u \mid \theta)$ este funcția de verosimilitate a datelor. Problema de optimizare (2.6) poate fi soluționată cu un număr destul de mare de algoritmi. Pentru aceasta, este totuși necesară evaluarea (cel puțin a) lui $p(y, u \mid \theta)$, pentru θ dat. Un algoritm pentru realizarea acestui deziderat este discutat în secțiunea următoare.

3. Algoritm pentru evaluarea exactă a funcției de verosimilitate

Sistemul (2.1)—(2.5) poate fi pus sub următoarea formă

$$\begin{aligned} A(q^{-1})\, y(t) &= C(q^{-1})\, e_1(t) + D(q^{-1})\, e_2(t) \\ B(q^{-1})\, u(t) &= G(q^{-1})\, e_1(t) + H(q^{-1})\, e_3(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Coeficienţii polinoamelor ce apar în (3.1) pot fi uşor obţinuţi din θ. Să notăm prin na etc. gradul polinomului $A(z)$ etc.; şi fie

$$m = \max(na, nb, \ldots, nh)$$

Să considerăm apoi următoarea transformare a datelor (sugerată de abordarea propusă în [12] pentru estimarea VM exactă a parametrilor proceselor ARMA scalare)

$$z(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} & t = 1, m \\ \begin{bmatrix} A(q^{-1})y(t) \\ B(q^{-1})u(t) \end{bmatrix} & t = m+1, N \end{cases} \tag{3.2}$$

Deoarece Jacobian-ul transformării liniare (3.2) este unitar, urmează imediat că

$$p(y, u \mid \theta) = (2\pi)^{-N} \mid \sum \mid^{-1/2} e^{-1/2 z^T \Sigma^{-1} z} \tag{3.3}$$

unde

$$z \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} z(1) \\ \vdots \\ z(N) \end{bmatrix}, \quad \sum \overset{\Delta}{=} \operatorname{cov}[z \mid \theta]$$

Este destul de clar că $\sum$ este o matrice bandă, vezi (3.2), cu lungimea maximă a benzii egală cu $4m+1$. Urmează deci că $\sum$ poate fi factorizată Cholesky în O(N) operaţii, vezi [12], [13]. Fie L factorul Cholesky corespunzător

$$\sum = LL^T \tag{3.4}$$

În (3.4), L este o matrice bandă, inferior triunghiulară. Să introducem secvenţa $\{e(k)\}_{k=1}^{2N}$ prin

$$L \begin{bmatrix} e(1) \\ \vdots \\ e(2N) \end{bmatrix} = z \tag{3.5}$$

Atunci, (3.3) devine

$$p(y, u \mid \theta) = \frac{(2\pi)^{-N}}{|L|} e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2N} e^2(t)} \tag{3.6}$$

Notaţi că secvenţa $\{e(k)\}$ se obţine imediat din (3.5) în $O(N)$ operaţii, datorită structurii speciale a lui L. Notaţi, de asemenea, că $|L|$ este egal cu produsul elementelor de pe diagonala lui L. Putem deci conchide că evaluarea completă a funcţiei de verosimilitate, utilizînd abordarea de mai sus, va cere $O(N)$ operaţii aritmetice.

Problema care rămîne este desigur obţinerea matricei de covarianţă $\sum$ corespunzătoare unui set dat de parametrii θ. În timp ce această ope-

rație necesită un număr mic de calcule ($\sim m^3$), elementele matricei $\sum$ au expresii a căror programare pe un calculator numeric va fi destul de „întortocheată". Un cod complicat al programului de implementare, împreună cu timpul de calculator relativ mare necesitat, sînt motive care fac ca în multe aplicații să fie preferabilă *aproximarea* funcției (estimației) VM exacte [1]. O astfel de aproximare, conducînd la o programare relativ simplă și o salvare considerabilă de timp calculator, este discutată în continuare.

4. Algoritm pentru evaluarea aproximativă a funcției de verosimilitate

Ideea de bază a procedurii de calcul a funcției exacte de verosimilitate, descrisă mai sus, a fost introducerea transformării (3.2). Această transformare a fost astfel aleasă încît matricea de covarianță a datelor transformate să fie bandă. O idee similară poate fi exploatată pentru calculul aproximativ al estimației VM.

Să considerăm procesul (vezi (3.2) pentru analogie)

$$z_*(t) = \begin{bmatrix} A(q^{-1})y(t) \\ B(q^{-1})u(t) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

În mod evident $z_*(t)$ este un proces MA (vezi (3.1)). Matricea de covarianță

$$\sum\nolimits_* = E \begin{bmatrix} z_*(1) \\ z_*(2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} [z_*^T(1)\, z_*^T(2) \ \ldots]$$

are așadar o structură simplă, *bandă* (spre deosebire de matricea de covarianță a procesului ARMA $[y(t)\ u(t)]^T$ care este „plină").

În conformitate cu teorema factorizării spectrale va exista o reprezentare unică a lui $z(t)$ avînd următoarea formă

$$z_*(t) = S(q^{-1}, \theta)\varepsilon(t, \theta) \tag{4.2}$$

unde

$$E\ \varepsilon(t, \theta) \cdot \varepsilon(s, \theta)^T = \Lambda(\theta)\ \delta_{t,s}$$

iar $S(q^{-1}, \theta)$ este o matrice (2×2) ale cărei elemente sînt polinoame (de grade cel mult m), cu $S(0, \theta) = I$ și $\det S(z, \theta) \neq 0$ pentru $|z| \leqslant 1$.

Din (4.1) și (4.2) rezultă că reprezentarea prin inovații (de tip funcție de transfer) a procesului bidimensional intrare-ieșire este următoarea

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/A(q^{-1}) & 0 \\ 0 & 1/B(q^{-1}) \end{bmatrix} S(q^{-1}, \theta)\ \varepsilon(t, \theta) \tag{4.3}$$

---

[1] Aceasta este rațiunea pentru care nu vom prezenta aici expresiile elementelor matricei Σ, ca funcții de θ. Cei interesați în implementarea metodei VM exacte pot obține aceste expresii de la autor.

Utilizînd (4.3), putem calcula secvența de inovații $\{\varepsilon(1, \theta), \ldots, \varepsilon(N, \theta)\}$ corespunzătoare datelor observate [1] și apoi evalua aproximativ funcția de verosimilitate în următorul mod

$$p(y, u \mid \theta) \cong \frac{1}{(2\pi)^N \cdot |\Lambda(\theta)|^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon^T(t,\theta)[\Lambda(\theta)]^{-1}\varepsilon(t,\theta)} \tag{4.4}$$

Problema care rămîne este determinarea, pentru un θ dat, a filtrului $S(q^{-1}, \theta)$ și a matricei de covarianță $\Lambda(\theta)$. O posibilitate eficientă pentru realizarea acestui deziderat este factorizarea Cholesky a matricei infinite de covarianță $\sum_*$.

Să observăm mai întîi că $\sum_*$ poate fi ușor calculată ca o funcție de θ. Într-adevăr:

$$Ez_*(t)z_*(t+s)^T = \begin{bmatrix} \lambda_1^2(c_0c_s + \ldots + c_{nc-s}c_{nc})\lambda_2^2(d_0d_s + \ldots + d_{nd-s}d_{nd}) & \\ \lambda_1^2(g_0c_s + \ldots + g_{nc-s}c_{nc}) & \\ & \lambda_1^2(c_0g_s + \ldots + c_{ng-s}g_{ng}) \\ \lambda_1^2(g_0g_s + \ldots + g_{ng-s}g_{ng})\lambda_3^2(h_0h_s + \ldots + h_{nh-s}h_{nh}) & \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

unde $c_k = 0$ pentru $k < 0$ sau $k > nc$ etc. (notați că așa cum era de așteptat $Ez_*(t)z_*(t+s)^T = 0$ pt. $s > m$).

Un algoritm eficient numeric pentru factorizarea Cholesky a lui $\sum_*$,

$$\sum_* = L_*L_*^T$$

este prezentat în [14]. El cere $0(m)$ operații per iterație (o iterație însemnînd calculul unei linii de blocuri (2×2) a lui L_*) și converge într-un număr de iterații care pentru aplicațiile curente va fi mult mai mic decît N. Liniile-blocuri ale lui L_* (care evident este o matrice bandă) converg la modelul MA (4.2) al lui $z_*(t)$, vezi [14].

Algoritmul pentru calculul reprezentării prin inovații (4.3) a procesului $\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$, descris anterior, este de așteptat să fie, în general, mai rapid decît utilizarea filtrului Kalman pentru determinarea lui (4.3) (ca în [2]), vezi [15] pentru unele detalii. Mai mult, utilizînd algoritmul propus în acest articol putem evalua funcția de verosimilitate aproximativă (4.4) în orice punct din spațiul parametrilor. Într-adevăr $\sum_*$ este pozitiv definită pentru orice θ (deci L_* există, $\forall\, \theta$), iar (4.3) este evident invertibil, oricare θ, datorită proprietății de invertibilitate a reprezentării MA, (4.2), ce rezultă prin factorizarea lui $\sum_*$ ([14]).

5. Concluzii

Algoritmul propus în acest articol pentru calculul aproximativ al funcției de verosimilitate asociate unui sistem cu date perturbate de intrare-ieșire, are unele avantaje față de algoritmii similari propuși anterior în literatură. Așa cum s-a arătat, dacă se dorește, ideea de bază a algoritmului poate fi utilizată pentru calcul exact al verosimilității.

[1] Valorile inițiale necesare pentru a „porni" (4.3) pot fi alese egale cu zero.

BIBLIOGRAFIE

1. *K. J. Åström, T. Bohlin,* Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. Proc. IFAC Symp. Theory of Self-Adaptive Processes, Teddington, 1965.
2. *T. Söderström,* Automatica, vol. 17, 713—725, 1981.
3. *M. S. Ahmed, M. Shridkar,* Int. J. Systems Sci., vol. 10, 669—680, 1979.
4. *A. E. Rogers, K. Steiglitz,* Int. J. Control, vol. 12, 625—635, 1970.
5. *C. Gueguen, L. Scharf,* Exact maximum likelihood identification of ARMA models : a signal processing perspective. Ist European Signal Processing Conf., EUSIPCO-80, Lausanne, 1980.
6. *J. P. Dugré, L. Scharf, C. Gueguen,* Exact likelihood for stationary vector autoregressive moving average processes. Workshop on Fast Algorithms for Linear Systems, Aussois, 1981.
7. *J. G. Pearlman,* Biometrika, vol. 67, 232—233, 1980.
8. *M. Morf, G. S. Sidhu, T. Kailath,* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, 315—323, 1974.
9. *A. C. Harvey, G. D. A. Phillips,* Biometrika, vol. 66, 49—58, 1979.
10. *F. C. Schweppe,* IEEE Trans. Inf. Th., vol. IT-11, 1965.
11. *R. H. Jones,* Technometrics, vol. 22, 389—395, 1980.
12. *C. F. Ansley,* Biometrika, vol. 66, 59—65, 1979.
13. *R. S. Martin, J. H. Wilkinson,* Numer. Math., vol. 7, 355—361, 1965.
14. *J. Rissanen,* Math. Comput, vol. 27, 147—154, 1973.
15. *J. Rissanen,* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-18, 555, 1973.

System Identification from Noise-Obscured Measurements

The aim of this paper is to present a conceptually simple procedure for determining the maximum likelihood estimates of linear-systems parameters from noise-corrupted measurements. The bulk of the procedure for evaluating the likelihood of data is an efficient algorithm for factoring positive matrix polynomials.

CUPRINSUL SERIEI PE ANUL 1982

MATEMATICĂ

I. Bacalu — Asupra unor proprietăți speciale reziduale pentru sisteme de operatori, nr. 1, p. 3.
S. G. Hristova, D. D. Bainov — Asupra unor inegalități integrale pentru funcții scalare de argument vectorial nr. 1, p. 11.
I. Tache — Aplicarea unor metode geometrice în studiul circuitelor electrice. nr. 1, p. 15.
P. Stoica, O. Stănășilă — Asupra proprietăților spectrale ale matricilor A^{-1} B. nr. 2, p. 3.
Tatiana Stănășilă — Asupra funcțiilor aleatoare polinomiale. nr. 3, p. 3.
Elena Deciu — Relații de dualitate pentru operatorii de observabilitate și controlabilitate pentru un sistem invariant în timp infinit-dimensional diferențial liniar. nr. 3, p. 9.
C. M. Bucur — Algoritm de clasificare și regăsire a elementelor unei colecții. nr. 3, p. 16.
I. Drăghicescu — Asupra unei familii de șiruri de numere reale și cîteva proprietăți ale sale. nr. 3, p. 25.
M. Roșculeț — Operator integral asociat la o ecuație cu derivate parțiale, liniară, de ordin oarecare, cu coeficienți constanți, într-un număr oarecare de variabile. nr. 4, p. 3.
D. D. Bainov, S. S. Milușeva — Aplicarea metodei de mediere unei probleme la limită pentru sisteme integro-diferențiale Fredholm neexplicite relativ la derivată. nr. 4, p. 15.
D. Suciu — Asupra unei teoreme de izomorfism în algebre universale nr. 4, p. 27.

FIZICĂ

Luminița Daniello, D. Iordache, I. M. Popescu — Asupra parametrilor corelațiilor care descriu dependența de temperatură a permeabilității materialelor ferimagnetice în zona tranziției de fază. nr. 1, p. 23.
Gh. Stanciu, Gabriela Cone, I. M. Popescu, C. Stoichiță — Realizarea unei instalații experimentale pentru studiul efectului Faraday rezonant și nerezonant la gaze. nr. 2, p. 9.
Vl. Iancu, D. Iordache, M. Stan, Doina Gavrilă, Gh. Lăzărescu, A. Tomovici — Probleme fizice în proiectarea cablurilor criogenice. II. Metoda de calcul a distribuției longitudinale a temperaturii în cabluri răcite în contracurent pentru stări staționare (îmbunătățire a metodei Edney-Fox-Gilbert) nr. 2, p. 13.
I. M. Popescu, E. N. Ștefănescu, P. E. Sterian — Analiza bistabilității electrooptice în dispozitivele optice bistabile cu cavitate Fabry-Pérot. nr. 3, p. 29.
Gh. Lăzărescu, D. Iordache, Vl. Iancu, Liliana Popa, I. Pop, Viorica Tudoricu — Probleme fizice în proiectarea cablurilor criogenice. III. Evaluarea distribuției transversale a temperaturii în cabluri simetrice cilindrice pentru stări staționare. nr. 3, p. 36.
A. Chattopadhyay, A. K. Pal — Propagarea undelor SH într-un mediu neomogen cu suprafața neregulată. nr. 3, p. 47
I. M. Popescu, P. Sterian, N. Pușcaș — Calculul susceptibilităților neliniare de ordinele 5, 7 și 9 în aproximația neglijării structurii fine. nr. 4, p. 30.
D. Anghelescu, Amelitta Vogel, Maria Haiduc, Rozalia Nițu — Observații asupra multiplicității și distribuției unghiulare într-o interacțiune cu primar de mare energie în emulsia nucleară expusă în satelitul artificial „Intercosmos 6". nr. 4, p. 35.

ELECTROTEHNICĂ

Gabriela Spineanu — Influența neuniformității întrefierului asupra determinării inducției magnetice rezultante, la un cuplaj cu curenți turbionari, în construcția cu poli aparenți. nr. 1, p.31.
Fl. Ionescu — Criterii privind alegerea schemelor de protecție împotriva supratensiunilor în stațiile construite cu echipament capsulat, izolat cu SF_6, nr. 1, p. 39.

M. Preda, P. Cristea, G. Ionescu — O nouă metodă de analiză a circuitelor electrice bazată pe calculul iterativ al funcțiilor de transfer hibride. nr. 2, p. 25.
Gabriela Spineanu — Influența neuniformității întrefierului asupra determinării inducției magnetice rezultante la un cuplaj cu curenți turbionari, în construcția cu poli aparenți (II). nr. 2, p. 36.
P. Cristea, Rodica Tuduce — Generarea asistată de calculator a problemelor de analiză a circuitelor electrice în regim permanent. nr. 4, p. 49.
M. Maricaru, Th. Vascan, I. Albeanu, D. Rucinschi, M. Dumitrescu, V. Truşcă — Instalație de încercare la înaltă tensiune tip modul comandată electronic. nr. 3, p. 57.
M. Iordache, S. Chira — Program de determinare a arborelui normal comun (ANC) și a matricelor incidentelor esențiale (MIE) într-un circuit nereciproc. nr. 3, p. 64.
A. Moraru, Cristina Buda, V. Dimancea, M. Cremenescu — Cîmpul electric în vecinătatea conductoarelor multiple. nr. 4, p. 39.
Christiana Popeea — Regimul tranzitoriu inițial al cîmpului electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele. nr. 4, p. 61.

ELECTRONICĂ

G. Cartianu — Asupra criteriului de stabilitate a unui sistem în vecinătatea condițiilor limită. nr. 1, p. 47.
G. Rulea — Controlul măsurării parametrilor unei joncțiuni simetrice de tip diport. nr. 1, p.55.
T. Tebeanu, D. Dascălu, N. Marin — Modelarea funcționării diodei IMPATT la semnal mare în oscilatoare de putere. nr. 1, p. 61.
G. Rulea — Diagrama frecvenței de rezonanță a rezonatorului dielectric placă. nr. 2, p. 41.
D. Dascălu, M. Udrea-Spenea, E. Popa — Efectul disipării de putere asupra străpungerii prin multiplicare în avalanșă la joncțiunile pn difuzate. nr. 2, p. 46.
M. Dragoman, I. Ardelean — Implementarea filtrelor cu capacități comutate. nr. 2, p. 53.
D. Stanomir — Asupra transformării Fourier discrete. nr. 3, p. 72.
P. Șchiopu, C. Puiu — Instalație pentru sudura ultrasonică. Tehnologie și performanțe, nr.3,p.79.
D. Dascălu, Gh. Brezeanu, M. Suciu, P. Al. Dan — Efectul tratamentului de sinterizare asupra caracteristicilor de străpungere ale diodelor Schottky planare Al/n—Si. nr. 4, p. 67.
D. A. Stoichescu — Circuite de codare și decodare cu structură variabilă pentru transmisii de date cu detecția și corecția erorilor. nr. 4, p. 76.
C. Băleanu, D. Tomescu — Un punct de vedere asupra distribuției funcționale în sistemele de calcul. nr. 4, p. 85.

CENTRALE ELECTRICE

P. Buhuș, Gh. Comănescu — Valoarea echivalentă pentru calculul pierderilor curentului absorbit de motoarele sondelor petrolifere în pompaj, nr. 1, p. 79.
N. Dănilă, D. Golici — Contribuții la analiza funcționării economice a centralelor termoelectrice cu abur, nr. 2, p. 61.

REȚELE ELECTRICE

D. Cristescu, Marilena Ungureanu, Ioana Dorobanțu, P. Postolache — Efecte perturbatoare ale liniilor electrice aeriene (perturbații și zgomot acustic). nr. 1, p. 69.
A. Arie, P. Postolache, E. Dumitrescu — Model mecano-electric pentru studiul vibrațiilor unui ansamblu conductor-amortizor în cazul liniilor electrice aeriene. nr. 2, p. 70.
M. Eremia, A. Diaconu — Zonarea sistemelor electroenergetice — etapă intermediară în studiul regimurilor de funcționare. nr. 3, p. 85.

AUTOMATICĂ

T. Borangiu, R. Dobrescu, T. Ionescu — Sistem CNC cu prelucrare distribuită pentru conducerea adaptivă a mașinilor unelte. nr. 1, p. 89.
I. Cataná — Unele probleme privind proiectarea și simularea sistemelor electrohidraulice. nr. 1, p. 97.
S. Călin, Gh. Petrescu, I. Tăbuș — Considerente de îmbunătățire a comportării tranzitorii în proiectarea directă a sistemelor automate numerice. nr. 2, p. 79.

I. Catană — Comanda discretă a amplificatoarelor electrohidraulice. nr. 2, p. 89.
Cr. Tănăsescu — O tehnică de definire a modelelor pentru memorie. nr. 2, p. 98.
I. Dumitrache, S. Dumitriu, F. Munteanu — Sinteza unui algoritm discret cu structură variabilă destinat conducerii acţionărilor cu tiristoare. nr. 3, p. 92.
P. Stoica — Asupra fracţiilor matriceale „pline". nr. 3, p. 99.
P. Stoica — Identificarea sistemelor din măsurători perturbate. nr. 4, p. 92.

CALCULATOARE

Irina Athanasiu, Cr. Zervos — Evaluarea performanţelor sistemului de calcul microprocesor FELIX M18. nr. 1, p. 105.

INDEX DE AUTORI

Albeanu I., *3*, p. 57
Anghelescu D., *4*, p. 35
Ardelean I., *2*, p. 53
Arie A., *2*, p. 70
Athanasiu Irina, *1*, p. 105

Bacalu I., *1*, p. 3
Bainov D. D., *1*, p. 11 ; *4*, p. 15
Băleanu C., *4*, p. 85
Borangiu T., *1*, p. 89
Brezeanu Gh., *4*, p. 67
Bucur C. M., *3*, p. 16
Buda Cristina, *4*, p. 39
Buhuș P., *1*, p. 79

Cartianu Gh., *1*, p. 47
Catană I., *1*, p. 97 ; *2*, p. 89
Călin S., *2*, p. 79
Chattopadhyay A., *3*, p. 47
Chira S., *3*, p. 64
Comănescu Gh., *1*, p. 79
Cone Gabriela, *2*, p. 9
Cremenescu M., *4*, p. 39
Cristea P., *2*, p. 25 ; *4*, p. 49
Cristescu D., *1*, p. 69

Dan P. Al., *4*, p. 67
Daniello Luminița, *1*, p. 23
Dascălu D., *1*, p. 61 ; *2*, p. 46 ; *4*, p. 67
Dănilă N., *2*, p. 61
Deciu Elena, *3*, p. 9
Diaconu N., *3*, p. 85
Dimancea V., *4*, p. 39
Dobrescu R., *1*, p. 89
Dorobanțu Ioana, *1*, p. 69
Dragoman M., *2*, p. 53
Drăghicescu I., *3*, p. 25
Dumitrache I., *3*, p. 92
Dumitrescu E., *2*, p. 70
Dumitrescu M., *3*, p. 57
Dumitriu S., *3*, p. 92

Eremia M., *3*, p. 85

Gavrilă Doina, *2*, p. 13
Golici D., *2*, p. 61

Haiduc Maria, *4*, p. 35
Hristova S. G., *1*, p. 11

Iancu Vl., *2*, p. 13 ; *3*, p. 36
Ionescu Fl., *1*, p. 39
Ionescu G., *2*, p. 25
Ionescu T., *1*, p. 89
Iordache D., *1*, p. 23 ; *2*, p. 13 ; *3*, p. 36
Iordache M., *3*, p. 64

Lăzărescu Gh., *2*, p. 13 ; *3*, p. 36

Maricaru M., *3*, p. 57
Marin N., *1*, p. 61
Miluşeva S. S., *4*, p. 15
Moraru A., *4*, p. 39
Munteanu F., *3*, p. 92

Nițu Rozalia, *4*, p. 35

Pal A. K., *3*, p. 47
Petrescu Gh., *2*, p. 79
Pop I., *3*, p. 36
Popa E., *2*, p. 46
Popa Liliana, *3*, p. 36
Popeea Cristiana, *4*, p. 61
Popescu I. M., *1*, p. 23 ; *2*, p. 9 ; *3*, p. 29 ; *4*, p. 30
Postolache P., *1*, p. 69 ; *2*, p. 70
Preda M., *2*, p. 25
Puiu C., *3*, p. 79
Pușcaș N., *4*, p. 30

Roșculeț M., *4*, p. 3
Rucinschi D., *3*, p. 57
Rulea G., *1*, p. 55 ; *2*, p. 41

Spineanu Gabriela, *1*, p. 31 ; *2*, p. 36
Stan M., *2*, p. 13
Stanciu Gh., *2*, p. 9
Stanomir D., *3*, p. 72
Stănășilă O., *2*, p. 3
Stănășilă Tatiana, *3*, p. 3
Sterian P., *3*, p. 29 ; *4*, p. 30
Stoica P., *2*, p. 3 ; *3*, p. 99 ; *4*, p. 92
Stoichescu D. A., *4*, p. 76
Stoichiță C., *2*, p. 9
Suciu D., *4*, p. 27
Suciu M., *4*, p. 67

Șchiopu P., *3*, p. 79
Ștefănescu E. N., *3*, p. 29

Tache I., *1*, p. 15
Tăbuș I., *2*, p. 79
Tănăsescu Cr., *2*, p. 98
Tebeanu T., *1*, p. 61
Tomescu D., *4*, p. 85
Tomovici A., *2*, p. 13
Truşcă V., *3*, p. 57
Tudoricu Viorica, *3*, p. 36
Tuduce Rodica, *4*, p. 49

Udrea-Spenea M., *2*, p. 46
Ungureanu Marilena, *1*, p. 69

Vascan Th., *3*, p. 57
Vogel Amelitta, *4*, p. 35

Zervos Cr., *1*, p. 105

TEZE DE DOCTORAT SUSTINUTE ÎN ANUL 1982

Alexandru Curelaru — Contribuţii la introducerea echipamentelor româneşti cu S.F.6 în sistemul energetic naţional şi stabilirea condiţiilor de funcţionare sigură în exploatare. (14.I.1982)

Trandafir Moisa — Contribuţii la proiectarea sistemelor de calcul cu prelucrare paralelă. (13.II.1982)

Alexandru A. Sevastă — Elaborarea prognozelor tehnologice ale aparatajului electric de joasă tensiune în vederea fundamentării planurilor de perspectivă ale întreprinderilor de profil. (16.II.1982)

Alexandru M. Bălan — Contribuţii la diagnosticarea automată a circuitelor logice secvenţiale complexe. (18.II.1982)

Valeriu B. Iorga — Contribuţii privind conducerea numerică directă în aplicaţii de conducere cu microcalculatoare-regulatoare. (4.III.1982)

Nicolae Tăpuş — Contribuţii la elaborarea de noi structuri de sisteme de calcul microprogramate. (4.III.1982)

Dan L. Stoichiţoiu — Studiul fiabilităţii sistemelor pe baza domeniilor de funcţionare şi derivei parametrilor tehnici. (27.III.1982)

Florica Tănăsescu Moldoveanu — Contribuţii la optimizarea proiectării produselor program. (1.IV.1982)

Dumitru Petrică — Metode de specificare a sistemelor numerice. (1.IV.1982)

Cherkaoui Sidi Jaafar — Transformări ortogonale în codarea imaginilor digitale. (2.IV.1982)

Florin I. Filip — Contribuţii la conducerea ierarhizată a proceselor industriale complexe. (27.IV.1982)

Ioan Z. Dragu — Metode de transmitere a semnalelor de televiziune prin funcţii ortogonale. (29.IV.1982)

El Mesbahi Jelloul — Metode numerice de prelucrare a imaginilor. (17.V.1982)

Horia Crişciu — Contribuţii la metodele de rezolvare pe calculatoare numerice a problemelor de reţele electrice. (20.V.1982)

Guillermo Antonio Loria Martinez — Contribuţii privind structurile microcalculatoarelor pentru automatizarea proceselor tehnice. (3.VI.1982)

Carmen M. Hartulari — Modelarea cibernetică a proceselor de ordonanţare cu aplicaţii în industria constructoare de maşini. (4.VI.1982)

Ion G. Săndulescu — Contribuţii privind sistemele automate de generare a traiectoriilor la maşinile unelte cu comanda numerică. (14.VI.1982)

Marin Ghergu — Mişcarea sub presiune printr-o conductă de secţiune variabilă. (17.VI.1982)

Monica R. Grigorescu — Contribuţii la studiul creşterii mentenabilităţii calculatoarelor prin metode eficiente de diagnoză a defectelor. (28.VI.1982)

Aurică Radu — Contribuţii teoretice şi experimentale privind generarea, transmisia şi transformarea impulsiilor de foarte scurtă durată şi de mare putere. (29.VI.1982)

Constantin P. Neguş — Efectele perturbatorii produse în sistemele electro-energetice de mari consumatori dotaţi cu mutatoare. Metode de atenuare a lor. (2.VII.1982)

Viorel Gh. Şerban — Contribuţii la asigurarea securităţii centralelor nuclearo-electrice prin dimensionarea sistemelor la acţiuni seismice. (2.VII.1982)

Arabella D. Gavrilescu — Studii asupra tehnologiei cu fascicole electronice şi ionice. Modelarea profilelor de dopare prin implantare ionică în producţia de dispozitive electronice. (17.IX.1982)

Mustafa El Sayed Mohamed El Shebini — Contribuţii la studiul motoarelor sincrone cu reluctanţă variabilă. (21.X.1982)

Dan Ionescu — Contribuţii la analiza funcţională şi proiectarea sis'emelor automate cu parametri distribuiţi. (25.X.1982)

Mircea Vlăduțiu — Contribuții la creșterea coeficientului de disponibilitate al echipamentelor automate de prelucrare a informației prin testare neconvențională. (25.X.1982)
Aurel Ivănescu — Sistem integrat de conducere a producției în industria mobilei. (20.XI.1982)
Adrian Ciamba — Mijloace moderne de instruire a personalului de exploatare din sistemele electroenergetice. (26.XI.1982)
Nicolae Gh. Stan — Contribuții la studiul proceselor termice tranzitorii din reactoarele nucleare. (6.XII.1982)
Mircea Beldiman — Contribuții la optimizarea reglării în sistemele de termoficare alimentînd cu căldură consumatori cu inerție mică. (6.XII.1982)
Constantin P. Popescu — Contribuții la studiul transferului de căldură într-o casetă de elemente combustibile cu agent termic lichid la reactorii nucleari din C.N.E. (6.XII.1982)
Constantin Răchitan — Metode moderne privind elaborarea deciziilor de comerț exterior. Marketing industrial. (11.XII.1982)
Sanda Maican — Diagnoza și corectarea erorilor în sistemele numerice. (14.XII.1982)
Mahammad Montaz Al Saharani — Contribuții la studiul rețelelor electroenergetice. (17.XII.1982)
Eugenie Stăicuț — Contribuții privind studiul mijloacelor și metodelor pentru realizarea de rețele de calculatore cu fiabilitate ridicată. (20.XII.1982)
Issam Bahssas — Optimizarea circulației de putere reactivă în sistemele electroenergetice. (23.XII.1982)

c. 1212 I. P. Informația

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI ELECTROTEHNICĂ, ENERGETICĂ, AUTOMATICĂ — CALCULATOARE, ELECTRONICĂ

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti", şi «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЁТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА

Выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti", «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне:

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL — COMPUTERS, ELECTRONICS

The Bulletin is issued quarterly continuing the old scientific periodicals: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI ÉLECTROTECHNIQUE, ÉNERGÉTIQUE, AUTOMATIQUE — ORDINATEURS, ÉLECTRONIQUE

parait tous les trois mois, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est:

Adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI ROMÂNIA
Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)

1963 OKT 14